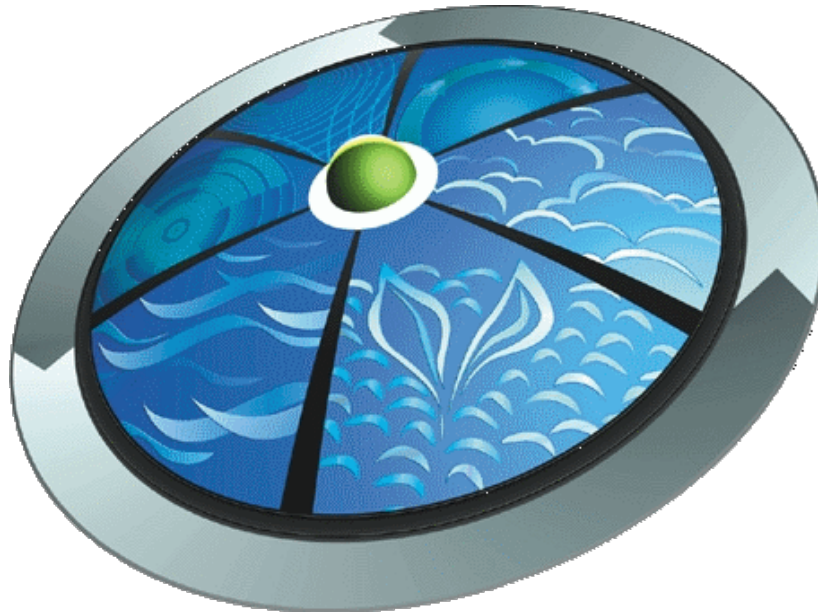




Az anyag a TAMOP-4.1.2-08/1/A-2009-0021 téma keretében készült a Pannon Egyetemen.



Környezetmérnöki Tudástár
Sorozat szerkesztő: Dr. Domokos Endre



22. kötet

Transzportfolyamatok a környezetvédelemben

Szerkesztő: Dr. Domokos Endre

Pannon Egyetem – Környezetmérnöki Intézet

Az anyag a TAMOP-4.1.2-08/1/A-2009-0021 téma keretében készült a Pannon Egyetemen.



Környezetmérnöki Tudástár
Sorozat szerkesztő: Dr. Domokos Endre

22. kötet
**Transzportfolyamatok a
környezetvédelemben**
Szerkesztő: Dr. Domokos Endre

Szerzők:
Dr. Domokos Endre
Dr. Gribovszki Zoltán
Dr. Gulyás Lajos
Dr. Hodúr Cecília

ISBN: 978-615-5044-47-2

2013
Veszprém
Pannon Egyetem – Környezetmérnöki Intézet

Környezetmérnöki Tudástár

eddig megjelent kötetei

01. Környezetföldtan
02. Környezetgazdálkodás
03. Talajvédelem, talajtan
04. Egészségvédelem
05. Környezeti analitika
06. Környezetvédelmi műszaki technológiák, technológiai rendszerek modellezése, ipari technológiák és szennyezéseik
07. Környezettan
08. Földünk állapota
09. Környezeti kémia
10. Vízgazdálkodás-Szennyvíztisztítás
11. Levegőtisztaság-védelem
12. Hulladékgazdálkodás
13. Zaj- és rezgésvédelem
14. Sugárvédelem
15. Természet- és tájvédelem
16. Környezetinformatika
17. Környezetállapot-értékelés, Magyarország környezeti állapota, monitorozás
18. Környezetmenedzsment rendszerek
19. Hulladékgazdálkodás II.
20. Környezetmenedzsment és a környezetjog
21. Környezetvédelmi energetika
22. Transzportfolyamatok a környezetvédelemben
23. Környezetinformatika II.
24. Talajtan és talajökológia
25. Rezgési spektroszkópia

Felhasználási feltételek:

Az anyag a Creative Commons „Nevezd meg!-Ne add el!-Így add tovább!” 2.5 Magyarország Licenc feltételeinek megfelelően szabadon felhasználható.



Nevezd meg! — A szerző vagy a jogosult által meghatározott módon fel kell tüntetned a műhöz kapcsolódó információkat (pl. a szerző nevét vagy álnevét, a Mű címét).



Ne add el! — Ezt a művet nem használhatod fel kereskedelmi célokra.



Így add tovább! — Ha megváltoztatod, átalakítod, feldolgozod ezt a művet, az így létrejött alkotást csak a jelenlegivel megegyező licenc alatt terjesztheted.

További felhasználás esetén feltétlenül hivatkozni kell arra, hogy
"Az anyag a TAMOP-4.1.2-08/1/A-2009-0021 téma
keretében készült a Pannon Egyetemen."

Részletes információk a következő címen találhatóak:
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/hu/>

Tartalomjegyzék:

Előszó: A jegyzet tárgya és ennek kifejtése. A legfontosabb forrásanyagok.	24
1. Alapfogalmak, Definíciók, a diffúziós egyenlet.....	25
1.1. Alapfogalmak, lényeges kérdések és definíciók	25
1.1.1. Néhány mintapélda a környezeti áramlástan területéről	26
1.1.2. A koncentráció definiálása	31
1.1.3. Dimenzió analízis	32
1.2. A diffúzió	35
1.2.1. A Fick-féle törvény.....	35
1.2.2. Diffúziós tényező	38
1.2.3. A diffúziós egyenlet általános alakja	39
1.2.4. Az egy dimenziós diffúziós egyenlet.....	41
1.3. Az egy dimenziós diffúziós egyenlet hasonlósági alapon történő megoldása	43
1.3.1. A maximum koncentráció meghatározása	48
1.3.2. A hasonlósági megoldás interpretációja	48
1.3.3. A koncentráció eloszlás alakja és az önazonosága	50
1.4. Mintapélda: Diffúzió értelmezése egy tóban.	51
1.4.1. Molekuláris diffúzió esete	52
1.4.2. Turbulens diffúzió esete	53
2. Advektív diffúziós egyenlet.....	55
2.1. Az advektív diffúziós egyenlet levezetése.....	55
2.1.1. Az alapegyenlet általános alakja	55
2.1.2. Pontszerű szennyezés esete, mint egy lehetséges megoldás	57
2.1.3. Összenomhatatlan folyadékra való értelmezés.....	59
2.2. Az advektív diffúziós egyenlet megoldásai	61
2.2.1. Kezdeti ismert egyenletes koncentráció megoszlás esete	61
2.2.2. Ismert állandó koncentráció a peremen	64
2.2.3. Ismert fix, lezárt (no flow) perem.....	65
2.3. Mintapéldák.....	69
2.3.1. Folytatás a diffúzió értelmezése egy tó példáján.....	69
2.3.2. Vízkivétel védelme	69
3. Elkeveredési folyamatok vízfolyásokban: Turbulens diffúzió és diszperzió	79
3.1. Turbulencia és elkeveredés értelmezése	79
3.1.1. A turbulencia matematikai leírása	81
3.1.2. A turbulens advektív diffúziós egyenlet	85
3.2. Turbulens diffúziós tényezők értelmezése vízfolyásokban	88
3.2.1. Vertikális elkeveredés	88
3.2.2. Keresztirányú elkeveredés	90
3.2.3. Hosszirányú elkeveredés	90
3.3. A hosszirányú diszperzió értelmezése	91
3.3.1. Az advektív diszperziós egyenlet levezetése	93
3.3.2. Hosszirányú diszperziós tényezők számítása	98
3.4. Mintapélda: Nyomjelzős vizsgálat.....	103
3.4.1. A mérés előkészítése	103
3.4.2. Vízhozam meghatározása mért adatokból.....	107
3.4.3. Diszperziós tényezők meghatározás a mérés alapján	108

3.4.4.	Nyomjelzős vizsgálat pillanatszerű beadagolással	110
4.	Fluidumok áramlása.....	114
4.1.	Fluidumok jellemzése	114
4.1.1.	Viszkozitás	114
4.2.	A folyadékok mozgása	114
4.2.1.	Folytonosság tétele	116
4.2.2.	Áramlások jellemzése.....	116
4.2.3.	Lamináris áramlás.....	117
4.2.4.	Bernoulli egyenlet	117
4.3.	Venturi cső.....	120
4.4.	Pitot cső.....	121
4.5.	Nem-Newtoni folyadékok folyásgörbéi	122
4.5.1.	Binghami v. Plasztikus anomális folyadékok	123
4.5.2.	Pszudoplasztikus anomális folyadékok.....	124
4.5.3.	Dilatáló anomális folyadékok	124
4.5.4.	Instacioner v. Időtől függő anomális folyadékok.....	124
4.5.5.	Időtől függő anomális folyadékok	125
4.5.6.	Szilárd testhez hasonló, Maxwelli, viszkoelasztikus anomális folyadékok	125
4.6.	Anomális folyadékok áramoltatása	126
4.6.1.	Binghami v. plasztikus anomális folyadékok:	126
4.6.2.	Pszudoplasztikus és dilatáló anomális folyadékok:	127
4.6.3.	Instacioner anomális folyadékok.....	127
5.	Súrlódó közegek	130
5.1.	Lamináris és turbulens áramlások	130
5.2.	Határrétegek jellemzői	131
5.2.1.	Folyadékfilmek jellemzése	132
5.3.	Impulzus- hő és anyagátadás a határrétegben.....	134
5.4.	Határréteg- együttható hő- és anyagátadás esetében.....	136
6.	Súrlódási veszteségek	138
6.1.	Turbulens áramlás súrlódási nyomásesése	138
6.2.	A csősúrlódási veszteség.....	139
6.3.	Beömlési veszteség, a veszteségtényező	141
6.4.	Sorba kapcsolt csővezetékek	143
7.	Áramlástechnikai gépek	147
7.1.	Térfogatkiszorítás elvén működő gépek	147
7.2.	Örvényáramú (centrifugál-) szivattyúk	148
7.2.1.	Az örvényáramú szivattyúk felépítése.....	148
7.2.2.	Örvényáramú szivattyúk jellemzése.....	150
7.2.3.	A szivattyú szívóképessége.....	151
7.2.4.	A szivattyúk jelleggörbéi.....	153
7.2.5.	Szivattyú kiválasztása adott folyadékszállító feladatra	153
7.2.6.	Az affinitás törvénye.....	156
8.	Áramlás töltött oszlopon	159

8.1.	Áramlási ellenállás töltött oszlopon	159
8.2.	Fluidizáció	161
8.3.	Pneumatikus szállítás	166
8.4.	Töltött oszlopok, mint reaktorok	167
8.5.	Töltött ágyas oszlopok.....	167
9.	Szűrés.....	169
9.1.	Szűrőközegek	169
9.2.	Szűrési mechanizmusok.....	169
9.2.1.	Mélységi szűrés	170
9.2.2.	Felületi szűrés.....	170
9.2.3.	Iszapleány szűrés.....	170
9.3.	Szűrőegyenletek.....	171
9.4.	Mélységi szűrés	173
9.5.	Szűrőberendezések	174
9.5.1.	Szerelvénytűzők.....	175
9.5.2.	Szakaszos működésű tűzők.....	175
9.5.3.	Folyamatos működésű tűzők.....	177
10.	Membrán szeparációs műveletek.....	181
10.1.	Membrános eljárások alapjai.....	181
10.2.	Membrános eljárások fejlődése	182
10.3.	Membránok jellemzése	183
10.4.	A membrán konfigurációk	184
10.5.	Nyomáskülönbségen alapuló membrános eljárások	185
10.5.1.	Mikroszűrés	185
10.5.2.	Ultraszűrés és nanoszűrés	186
10.5.3.	Fordított ozmózis.....	189
10.6.	További membrános eljárások	190
10.6.1.	Pervaporáció.....	190
10.7.	Membrán-szeparációs eljárások alkalmazási lehetőségei a vegyiparban	191
10.8.	Membrán szeparációs berendezések.....	192
11.	Fluidumok keverése	196
11.1.	A keverés teljesítményszükséglete.....	196
11.2.	Keverőberendezések csoportosítása	200
11.3.	Gyorskeverés	202
12.	Az üleptetés hidrodinamikája.....	208
12.1.	Részecske ülepedése gravitációs erőterben.....	208
12.2.	Több szemcse egyidejű ülepedése gravitációs erőterben	213
12.2.1.	Ülepedés nem végtelen térben	214
12.3.	Üleptető berendezések.....	215
12.4.	Flotálás	219

12.5.	Centrifugálás.....	220
12.6.	Szeperálás, emulzióbontás.....	221
12.7.	Centrifugák	221
13.	Hőtani alapfogalmak, bevezetés.....	227
13.1.	Hőtani alapfogalmak	227
13.1.1.	Termodinamikai rendszer	227
13.1.2.	A rendszer termodinamikai és kalorikus állapotjelzői	227
13.2.	Hővezetés	232
13.2.1.	Stacioner hővezetés szilárd anyagban.....	232
13.2.1.1.	Egyrétegű homogén síkfal hővezetése	233
13.2.1.2.	Többrétegű sík fal hővezetése	234
13.2.2.	Hővezetés csőfalon keresztül	235
13.2.3.	Instacioner hővezetés.....	237
13.3.	Hősugárzás.....	245
13.4.	Hőáramlás.....	247
13.4.1.	A hőáramlás formái	247
13.4.2.	A hőáramlás Nusselt-függvényei	248
13.4.3.	Szabadkonvekció kicsiny határolt térben	250
13.4.4.	Szabadkonvekció határtalan térben	250
13.4.5.	Kényszerkonvekciós hőátadás	252
14.	Hőcsere	256
14.1.	A hőátbocsátás.....	256
14.2.	Logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbség.....	258
14.3.	Hőcserélő berendezések csoportosítása	259
14.3.1.	Tartályszerű hőcserélők.....	259
14.3.2.	Átáramlásos hőcserélők	260
14.4.	Bepárlás.....	262
14.4.1.	A bepárlás anyagmérlege	262
14.4.2.	A bepárlás hőmérlege.....	263
14.4.3.	Bepárló berendezések	265
15.	Anyagátadási alapfogalmak	273
15.1.	A diffúziós műveletek osztályozása	273
15.1.1.	Gáz-folyadék rendszerek	273
15.1.2.	Gőz-folyadék rendszerek	274
15.1.3.	Gáz-szilárd rendszerek.....	274
15.1.4.	Folyadék-folyadék rendszerek.....	274
15.1.5.	Folyadék-szilárd rendszer	275
15.2.	A szétválasztási módszer megválasztása	275
15.3.	Az anyagátadási műveletek megvalósításának módjai	276
15.3.1.	Szakaszos műveletek	276
15.3.2.	Folyamatos műveletek	276
15.3.2.1.	Folyamatos műveleti egységek csoportosítása az áramlás iránya szerint.....	277
15.3.2.2.	Fokozatszerű és folytonos műveletek.....	277
15.4.	Általános irányelvek	278
16.	A fázisok közötti anyagtranszport, anyagátbocsátás.....	279

16.1. Anyagtranszport a fázison belül	279
16.1.1. Konvektív anyagtranszport	279
16.1.2. Diffúziós anyagtranszport.....	280
16.2. Anyagtranszport a fázisok között	281
16.2.1. Egyensúly	281
16.2.2. Fázisegyensúly, egyensúlyi görbék.	283
16.2.3. Fázisegyensúly termodinamikai megfogalmazása.....	284
16.3. Diffúzió a fázisok között.....	288
16.4. Anyagátbocsátási együtthatók.....	292
16.5. Anyagmérlegek	297
16.5.1. Állandósult állapotú egyenáramú folyamatok.	297
16.5.2. Állandósult állapotú ellenáramú folyamatok.	300
16.6. Az anyagátadási folyamat megvalósításának módjai	304
16.6.1. Átadás kolonna típusú berendezésekben, az átviteli egység	304
16.6.2. Átadás egy fokozatszerű berendezésekben	305
16.6.3. Szakaszos diffúziós folyamatok	307
16.6.4. Kaszkádok	307
16.6.4.1. Keresztáramú kaszkádok	307
16.6.4.2. Ellenáramú kaszkádok	308
16.6.5. Fokozatok és anyagátviteli sebességek.	310
17. Gáz- folyadék rendszerek közötti anyagtranszport, gáz abszorpció és deszorpció 311	
17.1. Gázok egyensúlyi oldhatósága folyadékban	311
17.1.1. Kétkomponensű rendszerek.....	311
17.1.2. Többkomponensű rendszerek	313
17.1.3. Ideális oldatok	313
17.1.4. Nem ideális oldatok.....	314
17.2. Az abszorpció anyagmérlege.....	315
17.2.1. Ellenáramú folytonos abszorber anyagmérlege.....	315
17.2.2. Egyenáramú folytonos és az egyfokozatú abszorpció anyagmérlege	318
17.3. Az elméleti fokozatok számának meghatározása	319
17.3.1. Elméleti tényérszám grafikus meghatározása	320
17.3.2. Elméleti tényérszám analitikus meghatározása	320
17.4. Az átviteli egység magasság és átviteli egységyszám meghatározása	322
17.4.1. Átviteli egység magasság számítása	323
17.4.2. Átviteli egységyszám számítása.....	324
17.4.3. Átviteli egységyszám grafikus meghatározása	325
17.4.4. Az abszorpciós torony magassága és átmérője.....	326
17.5. Deszorpció	326
17.6. Az oldószer kiválasztására az abszorpcióhoz.....	327
17.7. Abszorpciós berendezések.....	327
17.7.1. Gáz diszpergáló készülékek	328
17.7.1.1. Keverős készülékek.....	328
17.7.1.2. Buboréksapkás tányéros tornyok.....	329
17.7.1.3. Sztatitányéros (lyuggatott lemez) tornyok.....	332
17.7.2. Folyadékloszlással működő készülékek	332
17.7.2.1. Turillok.....	332
17.7.2.2. Nedvesített falú tornyok.....	333
17.7.2.3. Permetezett tornyok, permetezett kamrák.....	334
17.7.2.4. Terelőlemezes tornyok	334

17.7.2.5.	Töltetet tartalmazó tornyok	334
18.	<i>Gőz-folyadék rendszerek közötti anyagtranszport, desztilláció</i>	337
18.1.	Desztillációs egyensúly	338
18.2.	Egyszerű folyamatos desztilláció és az egyensúlyi desztilláció	341
18.3.	Egyszerű szakaszos, differenciális desztilláció	343
18.4.	Többfokozatú desztilláció	345
18.5.	Rektifikálás	346
18.5.1.	Folyamatos rektifikálás	349
18.5.1.1.	A dúsító szakasz munkavonala	351
18.5.1.2.	A kigőzölő szakasz munkavonala	352
18.5.1.3.	A betáplálás munkavonala, a q-vonal egyenlete	353
18.5.1.4.	A szükséges tányérszám meghatározása Lewis-Sorel módszerrel	356
18.5.1.5.	A szükséges tányérszám meghatározása McCabe – Thiele módszerrel	358
18.5.1.6.	A refluxarány és az elméleti tányérszám kapcsolata	359
18.5.1.7.	A minimális refluxarány	360
18.5.1.8.	Végtelen refluxarány	361
18.5.1.9.	Minimális tányérszám meghatározása	361
18.5.1.10.	A rektifikáló oszlopmagasságának meghatározása	365
18.5.1.11.	A rektifikáló oszlop átmérőjének meghatározása	365
18.5.2.	Szakaszos rektifikálás	366
18.5.2.1.	Szakaszos rektifikálás változó reflux aránnyal	366
18.5.2.2.	Szakaszos rektifikálás állandó reflux aránnyal	367
19.	<i>Folyadék-folyadék rendszerek közötti anyagtranszport, folyadék extrakció</i>	369
19.1.	Háromkomponensű folyadékrendszer egyensúlyi viszonyai	370
19.1.1.	Egyensúlyi viszonyok ábrázolása háromszögdiagramon	370
19.1.2.	Egyensúlyi viszonyok ábrázolása x-y diagramon	373
19.2.	Az oldószer kiválasztása	375
19.3.	Az extrakció kivitelezése	376
19.3.1.	Egylépcsős egyensúlyi extrakció	377
19.3.2.	Többfokozatú extrakció	382
19.3.2.1.	Többfokozatú egyenáramú extrakció	382
19.3.2.2.	Többfokozatú keresztáramú extrakció	382
19.3.2.3.	Többfokozatú folyamatos ellenáramú extrakció	387
19.3.2.4.	Ellenáramú extrakció nem elegendő oldószerpárok esetében	389
19.4.	Folyadék extrakció berendezései	391
19.4.1.	Egyfokozatú készülékek	391
19.4.2.	Többfokozatú ellenáramú készülékek	393
20.	<i>Szilárd-folyadék rendszerek közötti anyagtranszport, szilárd-folyadék extrakció</i>	397
20.1.	A szilárd anyag előkészítése a kilúgozáshoz	397
20.2.	Kilúgozási műveletek	398
20.2.1.	Szakaszos műveletek	398
20.2.1.1.	Perkolációs módszerek	398
20.2.1.2.	Ellenáramú többszörös érintkezés	401
20.2.1.3.	Perkoláció zárt edényekben	403
20.2.1.4.	Keverés és üleptetés	404
20.2.1.5.	Perkolálás és keverés	409
20.2.2.	Folyamatos műveletek	409
20.2.2.1.	Kilúgozás őrlés közben	409

20.2.2.2.	Keverős edények.....	409
20.2.2.3.	Ülepítők	410
20.2.2.4.	Folyamatos ellenáramú dekantálás	411
20.2.2.5.	Durván aprított szilárd anyagok folyamatos kilúgozása	411
20.2.3.	Számítási Módszerek	412
20.2.3.1.	Fokozathatásfok.....	412
20.2.3.2.	Egyfokozatú kilúgozás.....	415
20.2.3.3.	Többfokozatú keresztáramú kilúgozás	417
20.2.3.4.	Többfokozatú ellenáramú kilúgozás.....	417
20.2.4.	A kilúgozás sebessége.....	421
21.	Szilárd-fluidum rendszerek közötti anyagtranszport, adszorpció.....	422
21.1.	Adsorbensek.....	422
21.2.	Adszorpciós egyensúlyok	427
21.2.1.	Egyszerű gázok és gőzök egyensúlya	427
21.2.2.	Gáz- és gőzelegyek adszorpciója,	431
21.2.2.1.	Egy komponens adszorpciója.....	431
21.2.2.2.	Kétkomponensű gáz- vagy gőzelegyek, mindkét komponens adszorbeálódik	431
21.2.3.	Folyadékok adszorpciója	431
21.2.3.1.	Oldott anyag adszorpciója híg oldatból	432
21.2.3.2.	Oldott anyag adszorpció tömény oldatból	434
21.3.	Adszorpciós műveletek.....	435
21.3.1.	Fokozatszerű műveletek és berendezései	435
21.3.1.1.	Egyfokozatú adszorpció	437
21.3.1.2.	Többfokozatú keresztáramú adszorpció.....	440
21.3.1.3.	Többfokozatú ellenáramú adszorpció	442
21.3.2.	Folytonos, nem állandósult állapotú, nyugvóréteges adszorpció	445
21.3.2.1.	Adszorpciós hullám	445
21.3.2.2.	Gőzök adszorpciója	447
21.3.2.3.	Folyadékok adszorpciója, perkolálás	448
21.3.2.4.	Ipari kromatográfia.....	449
21.4.	Ioncsere	453
21.4.1.	Ioncsereélők	453
21.4.2.	Ioncsereélők alkalmazása	454
21.4.3.	Egyensúlyok	455
21.4.4.	Ioncsere sebessége.....	455
22.	A diffúzió elméleti modellje.....	460
22.1.	A diffúzió elméleti modellje	460
	Pontforrásból kiinduló diffúzió	461
22.2.	Feladatsor	464
22.2.1.	Feladat	464
22.2.2.	Feladat	464
22.2.3.	Feladat	464
22.2.4.	Feladat	465
22.2.5.	Feladat	466
22.3.	Megoldások	466
22.3.1.	Megoldás	466
22.3.2.	Megoldás	466
22.3.3.	Megoldás	467
22.3.4.	Megoldás	467
22.3.5.	Megoldás	468
23.	A tömegmegmaradás törvénye.....	470

23.1. Tömegmegmaradás.....	470
23.1.1. Anyagi derivált.....	474
23.2. Feladatsor.....	476
23.2.1. Feladat.....	476
23.2.2. Feladat.....	476
23.2.3. Feladat.....	477
23.2.4. Feladat.....	477
23.2.5. Feladat.....	477
23.2.6. Feladat.....	478
23.2.7. Feladat.....	479
23.3. Megoldások.....	479
23.3.1. Megoldás.....	479
23.3.2. Megoldás.....	480
23.3.3. Megoldás.....	481
23.3.4. Megoldás.....	482
23.3.5. Megoldás.....	486
23.3.6. Megoldás.....	487
23.3.7. Megoldás.....	488
24. Pillanatnyi pontforrás diffúziója.....	491
24.1. Pillanatnyi pontforrás diffúziója.....	491
24.2. Feladatsor.....	497
24.2.1. Feladat.....	497
24.2.2. Feladat.....	498
24.2.3. Feladat.....	498
24.3. Megoldások.....	498
24.3.1. Megoldás.....	498
24.3.2. Megoldás.....	499
24.3.3. Megoldás.....	501
25. Határfeltételek.....	505
25.1. Határfeltételek.....	505
25.2. Feladatsor.....	513
25.2.1. Feladat.....	513
25.2.2. Feladat.....	514
25.2.3. Feladat.....	514
25.2.4. Feladat.....	515
25.3. Megoldások.....	515
25.3.1. Megoldás.....	515
25.3.2. Megoldás.....	516
25.3.3. Megoldás.....	518
25.3.4. Megoldás.....	520
26. Pillanatnyi kibocsátás advekción és diffúzió.....	522
26.1. Pillanatnyi pontforrásból történő advekción és diffúzió.....	522
26.2. Feladatsor.....	530
26.2.1. Feladat.....	530
26.2.2. Feladat.....	530
26.2.3. Feladat.....	530
26.2.4. Feladat.....	531
26.2.5. Feladat.....	532

26.3. Megoldások	532
26.3.1. Megoldás	532
26.3.2. Megoldás	533
26.3.3. Megoldás	534
26.3.4. Megoldás	536
26.3.5. Megoldás	536
27. Állandó pontforrások.....	538
27.1. Állandó kibocsátási pontforrás	538
27.2. Feladatsor	544
27.2.1. Feladat	544
27.2.2. Feladat	544
27.2.3. Feladat	544
27.2.4. Feladat	545
27.2.5. Feladat	545
27.3. Megoldások	546
27.3.1. Megoldás	546
27.3.2. Megoldás	547
27.3.3. Megoldás	549
27.3.4. Megoldás	550
27.3.5. Megoldás	552
28. Sebességprofilok és turbulencia	554
28.1. A turbulens áramlás alapjai	554
28.2. Feladatsor	565
28.2.1. Feladat	565
28.2.2. Feladat	565
28.2.3. Feladat	566
28.2.4. Feladat	566
28.2.5. Feladat	567
28.3. Megoldások	568
28.3.1. Megoldás	568
28.3.2. Megoldás	569
28.3.3. Megoldás	569
28.3.4. Megoldás	570
28.3.5. Megoldás	571
29. Diszperziós folyamatok	573
29.1. Nyírási diszperzió.	573
29.2. Feladatsor	580
29.2.1. Feladat	580
29.2.2. Feladat	580
29.2.3. Feladat	581
29.2.4. Feladat	581
29.3. Megoldások	582
29.3.1. Megoldás	582
29.3.2. Megoldás	582
29.3.3. Megoldás	583
29.3.4. Megoldás	584
30. Reakció és határfelület váltakozása	586
30.1. Reakciók és cserefolyamatok	586

30.1.1.	Reakció-Advekcio-Diffuzio megoldások.....	586
30.1.2.	Oldódó	588
30.1.3.	Levegő-víz cserefolyamatok	593
30.1.4.	Particionálási folyamatok	600
30.2.	Feladatsor	604
30.2.1.	Feladat	604
30.2.2.	Feladat	604
30.2.3.	Feladat	604
30.2.4.	Feladat	605
30.2.5.	Feladat	605
30.2.6.	Feladat	606
30.2.7.	Feladat	606
30.3.	Megoldások	607
30.3.1.	Megoldás	607
30.3.2.	Megoldás	608
30.3.3.	Megoldás	610
30.3.4.	Megoldás	611
30.3.5.	Megoldás	612
30.3.6.	Megoldás	613
30.3.7.	Megoldás	614
31.	Részecsketranszport	616
31.1.	Bevezetés a részecsketranszportba	616
31.2.	Feladatsor	621
31.2.1.	Feladat	621
31.2.2.	Feladat	622
31.2.3.	Feladat	622
31.2.4.	Feladat	622
31.2.5.	Feladat	623
31.3.	Megoldások	624
31.3.1.	Megoldás	624
31.3.2.	Megoldás	625
31.3.3.	Megoldás	625
31.3.4.	Megoldás	627
31.3.5.	Megoldás	628

Ábrajegyzék

1. ábra: Egy zárt helyiségben az elkeveredési folyamatok sematikus megjelenítése. A vizsgált anyag pontforrása a zárt helyiség bal alsó sarkában található. Az elkeveredés a helyiségbe érkező és távozó, a levegőztető rendszer által előidézett, főáramlás és a cirkuláló levegőben lezajló véletlen mozgások következménye. (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán)	27
2. ábra: Egy ipari kibocsájtó pontszerű szennyezése egy természetes vízfolyás, mint befogadó, esetében. Ahogy a szennyezőanyag csóva lefelé mozog a vízfolyáson keresztirányban a partok felé szétterjed a diffúzió és az advekciónak együttes hatására. (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán).....	28
3. ábra: A szennyezőanyagok főbb áramlási útvonalainak szemléltetése (forrás Jolánkai 1989).....	29
4. ábra: Az oxigén diffúziója a víztestbe a víz-légkör határátmeneten keresztül. A sötét területek jelképezik a magasabb oxigén koncentrációjú, a világosabb részek az alacsonyabb oxigéntartalmú rétegeket. (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán)	30
5. ábra: Egy ipari létesítmény atmoszférába történő kibocsájtása kéményen keresztül. A füstfáklya az átlagos szélmezőnek megfelelően mozog és terül szét a széliránnyal ellentétes irányban. (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán)	30
6. ábra: A Fick-féle diffúziós modell illusztrálása a részecskék egy csoportjának egy dimenziós, ún. Brown-féle molekuláris mozgásának sematikus ábrázolásával. Az ábra felső része magukat a részecskéket mutatja, az alsó rész pedig a részecskék elhelyezkedésének megfelelő hisztogram, amely analóg a koncentrációval	36
7. ábra: A diffúziós egyenlet levezetésénél használt differenciális kontrol térfogat (forrás Sokolofsky-Jirka 2005).....	40
8. ábra: Az egy dimenziós tiszta diffúzió esetének ábrázolása egy végtelen csőben (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán).	43
9. ábra: A Gauss-féle normális eloszlás redukálódása a kezdetben egy pontban tömörülő jelzőanyag tömeg „spike” irányába ($M=1$ és $D=1/4$ értékek mellett).(Fischer et al. 1979 nyomán)	49
10. ábra: A pillanatszerű, pontszerű forrás egy dimenziós diffúziójának önazonos megoldása végtelen végtelen domainban dimenziómentes formában ábrázolva. (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán).....	50
11. ábra: A rétegzett alpesi tó sematikus keresztmetszelve. (Nepf 1995 nyomán).....	51
12. ábra: Hőmérsékleti (a) és arzén koncentráció (b) profilok egy alpesi tóban. A 3 m-es mélységben lévő pontozott vonal a termokline zóna (a legnagyobb sűrűség gradienssel jellemzett régió) elhelyezkedését hivatott jelezni. (Nepf 1995 nyomán).....	52
13. ábra: Átfolyással rendelkező kontrol térfogat sematikus ábrája (forrás Sokolofsky-Jirka 2005).....	56
14. ábra: Az AD egyenlet egy dimenziós megoldásának sematizált megoldása három időpontra. A pontozott vonal a maximum koncentrációk értékeit mutatja a szennyezőanyag, fő áramlás szerinti mozgásának irányában. (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán)	58
15. ábra: A kezdeti egyenletes pillanatszerű koncentráció-megoszlás sematikus reprezentációja, a $-x$ -ban fekvő dM differenciális elemet ábrázolva. (Sokolofsky-Jirka 2005 nyomán).....	61
16. ábra: A féltérben egyenletes ($x < 0$) kezdeti koncentráció-megoszlás (lépcsőfüggvény) pillanatszerű problémájának megoldása $C_0=1$, kiindulási koncentráció esetében. (Sokolofsky-Jirka 2005 nyomán).....	63
17. ábra: Az intravénás injekció befecskendezési utáni időpillanat leegyszerűsített, sematikus ábrázolása.	63

18. ábra: A 2.49-es egyenlet $x=0$ pontban $C_0=1$ fix koncentrációjú peremmel megadott megoldása (Socolofsky és Jirka 2005 nyomán).	65
19. ábra: A no-flux perem hatásának ábrázolása egy pillanatszerű pontszerű szennyezőforrás esetében, ahol a bal oldalon az eredeti határ nélküli megoldás látható, míg jobbra a határ reprezentálására egy image forrás van elhelyezve. A szaggatott vonal jelöli az egyes forrásokból érkező koncentrációmegoszlást, míg a folytonos vonal a szuperpozíciós megoldást (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán).	66
20. ábra: A két oldalon elhelyezett no flux határ esete, amikor a szuperpozíciós megoldás elvileg végtelen számú image forrást igényel. A szaggatott vonal jelöli az egyes image forrásokból érkező koncentráció-megoszlást, a vékony folytonos vonal a valódi forrásból származó koncentráció-megoszlást határolás nélkül, míg a folytonos vonal a szuperpozíciós megoldást (Fischer et al. 1979 nyomán)	67
21. ábra: A tározó helyszínrajza, a vízkivétel helyével a réz szennyezés mintapéldájához kapcsolódóan. (Socolofsky- Jirka 2005 nyomán)	70
22. ábra: A réz koncentráció megoszlása a halnevelő vízkivételének helyén az idő függvényében. A pontozott vonal a maximális megengedhető réz koncentrációt mutatja ($1,5 \cdot 10^{-3}$ mg/l). (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán).....	71
23. ábra: Pillanatszerű, pontszerű forrás egy dimenziós példája végtelen térben (forrás Socolofsky-Jirka 2005)	72
24. ábra: Pillanatszerű, térben megoszló forrás egy dimenziós példája végtelen térben (forrás Socolofsky-Jirka 2005)	73
25. ábra: Fix koncentrációjú küszöb egy dimenziós példája végtelen féltérben (forrás Socolofsky-Jirka 2005)	74
26. ábra: Pillanatszerű, pontszerű forrás egy dimenziós példája két oldalról át nem eresztő határral (forrás Socolofsky-Jirka 2005).....	75
27. ábra: Pillanatszerű, pontszerű forrás 2D példája végtelen térben (forrás Socolofsky-Jirka 2005).....	76
28. ábra: Pillanatszerű, pontszerű forrás 3D példája végtelen térben (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán).....	77
29. ábra: A Reynolds-féle kísérlet szemléltetése (felső ábra kísérleti elrendezés, felső cső laminális áramlás, majd lefelé haladva a turbulencia hatása egyre erősödik). (Lajos 2008 és Reynolds 1883 nyomán)	80
30. ábra: A Lagrange-féle szubsztanciális tárgyalásmód elve a folyadék mozgásának leírására (forrás Haszpra 1989).....	82
31. ábra: Az óceánban jellemző örvények energiaspektuma, ahol K , a hullámszám, S pedig a hullámszám spektruma (Kundu-Cohen (2002).	83
32. ábra: A turbulensen fluktuáló sebesség egy ponton történő mérése, ahol az u , az átlagsebesség és az $u'(t)$ a fluktuáló komponens (Sokolofsky-Jirka 2005 nyomán).	84
33. ábra: A mérésekre illesztett autokorrelációs függvény és az integrál időskála összefüggése (Kundu-Cohen 2002 nyomán).....	84
34. ábra: Vertikális elkeveredés szemléltetése egy vízfolyás mederfenekén bejuttatott szennyvíz példáján (forrás Sokolofsky-Jirka 2005).	89
35. ábra: A hosszirányú diszperzió folyamatának sematikus ábrája. Egy nyomjelzőt injektálunk a keresztmetszvényben egyenletesen elosztva az áramlási tér (a.) pontjában, amely a nyíróáramlás sebességprofilja következtében széthúzódik a (b.) helyen. A (c.) szelvényben a vertikális diffúzió már homogenizálta a koncentráció gradienst és egy mélység átlagolt Gauss féle normális eloszlás formájában várható a hosszirányban vett koncentráció profil megjelenése (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán).	92

36. ábra: A Reynolds féle dekompozíció összehasonlítása egy (adott ponton mért) turbulens áramlás (bal oldal) és egy (térben változó) nyíróáramlás (jobb oldal) sebességértékeinek esetére (Sokolofsky-Jirka 2005).....	94
37. ábra: Szennyezőanyagok permanens elkeveredésének szemléltetése keresztirányban (középvonalban történő bevezetés esete), (Somlyódy 1985 nyomán)	102
38. ábra: A Mariott-féle üveg sematikus rajza (Fischer et al. 1979 nyomán).....	107
39. ábra: A minta kísérletben mért nyomjelző anyag koncentrációk állandó, folyamatos jelzőanyag bebocsátás mellett. A látható jelzőanyag fluktuáció a mérőműszer bizonytalansága miatt jelentkeznek és nem a turbulens ingadozás okozza azokat (Sokolofsky-Jirka 2005 nyomán).....	108
40. ábra: A koncentráció felhő eloszlásának torzulást mérése egy adott (a beadagolástól $x=3$ km-re lévő) keresztiszelvényben. Bár a pillanatszerűen beadagolt jelzőanyag szétterjedése a szimmetrikus haranggörbe alak a jellemző, egy fix ponton mérve mégis ferdült alakot érzékelünk az időben. Ennek oka, hogy a haranggörbe a mérés időtartama alatt folyamatosan terjed szét (forrás Chapra 1997).	109
41. ábra: A Cowaselon-patakon pillanatszerű beadagolással történt nyomjelzős vizsgálat koncentráció-megoszlásai folyásirányban lefelé három jellemző keresztiszelvényben. A mérések egy adott keresztiszelvényben a vízfolyás középvonalában és a jobb illetve bal parthoz közel történtek (Sokolofsky-Jirka 2005 nyomán).	111
42. ábra: Laminárisan áramló rétegek	115
43. ábra: Változó keresztmetszetű csőben történő áramlás.....	116
44. ábra: Ventúri cső	121
45. ábra: Leggyakoribb folyásgörbék.....	123
46. ábra: A folyásgörbék időbeli függése és a hiszterézis jelensége a tixotróp folyadékoknál. Adott anyag egymás után felvett (1-4) folyásgörbéinek alakja eltérő.....	125
47. ábra: Plasztikus folyadékok súrlódási tényezője.....	126
48. ábra: Lamináris és turbulens sebesség profil.....	130
49. ábra: Síkfal mentén áramló folyadékfilm.....	132
50. ábra: Hőmérséklet gradiens turbulensen áramló közeg esetében.....	134
51. ábra: Acélcsővek csősúrlódási tényezője	140
52. ábra: Moody diagram	141
53. ábra: Csavarszivattyú	147
54. ábra: Fogaskerékes szivattyú.....	148
55. ábra: Perisztaltikus pumpa	148
56. ábra: Örvényszivattyú felépítése (szívócsonk, szárnyak, ház) (animáció angol nyelven: http://www.rpaulsingh.com/animated%20figures/fig2_21.htm).....	149
57. ábra: a. Radiális vagy centrifugális áramlás b. Axiális áramlás	149
58. ábra: A szivattyúrendszer szívóoldala.....	152
59. ábra: Örvényszivattyú jelleggörbéje.....	153
60. ábra: Folyadék szállítása két tartály között	154
61. ábra: Szivattyú és a csővezeték jelleggörbéje	154
62. ábra: Szivattyú jelleggörbéje	155
63. ábra: Szivattyú jelleggörbéje	156
64. ábra: Kagylódiagramok	157
65. ábra: A töltött cső és a töltet jellemzői.....	159
66. ábra: Fluidizációs állapotok sebességfüggése	161
67. ábra: Fluidizációs ellenállás meghatározása	164
68. ábra: A pneumatikus szállítás típusai	166
69. ábra: Szűrési állandók meghatározása.....	172

70. ábra: Nyitott homokszűrő működési elve. 1-vízelosztó csatorna; 2-tiszta szűrő feletti minimális vízszint; 3-eltömődött szűrő feletti maximális vízszint; 4- szűrőréteg; 5-szűrőgyertya; 6-szűrvtvíz-állványcső; 7-öblítőzagy elvezető vályú (vízelosztó vályú öblítéskor); 8-öblítővíz; 9-öblítőlevegő; 10-leürítés; 11-rendelkezésre álló nyomásvesztéség	173
71. ábra: A nyomásvesztéség és a koncentráció változása mélységi szűréskor	174
72. ábra: Csővezetékbe iktatható szitakosaras szűrő. 1 - szitakosár; 2 - fedél	175
73. ábra: Kavicságyas vízszűrő	176
74. ábra: Zárt homokszűrő. 1 -szürendő víz; 2 -szürt víz; 3 -homokágy; 4 -levegőkieresztő szelep; 5 -levegőbeeresztő; 6 -öblítő levegő; 7 -leürítés; 8 -öblítővíz; 9 –úszó	176
75. ábra: Kamrás szűrőprés. 1- szűrőlapok, 2 - nyomólap, 3 - szűrlet kilépő, 4 - motor, 5 - kapcsolók, 6 - kamratoló, 7 - nyomó légüst, 8 - szívó légüst, 9 - visszacsapó szelep, 10 – mozgó motor, 11 - olajtároló	177
76. ábra: Keretes szűrőprés. 1- szűrőlap, 2 - átmosó szűrőlap, 3 - keret, 4 - álló fejrész, 5 - mozgó fejrész, 6 - zárószervezet, 7 - állvány, 8 - tartórúd, 9 - anya, 10 - a szürendő közeg, ill. a mosófolyadék bevezetése; 11 - leeresztő (csap)	177
77. ábra: Vákuum-dobszűrő	178
78. ábra: A membránszűrés elve	181
79. ábra: Membrános eljárások csoportosítása	181
80. ábra: A nitrocellulóz (NC) képlete (v. cellulóz trinitrát)	182
81. ábra: A hagyományos szűrési eljárás elve	183
82. ábra: A keresztáramú membránszűrés elve	183
83. ábra: Spiráltekeres modul	184
84. ábra: Nyomáskülönbségen alapuló membrános eljárások típusai	185
85. ábra: A membránszűrés általános modellje	186
86. ábra: Membrános műveletek	190
87. ábra: A pervaporáció általános modellje	191
88. ábra: Membránszűrő berendezések sémája	192
89. ábra: Pervaporációs készülék elvi felépítése	193
90. ábra: Folyadékkeverők optimális fordulatszám	196
91. ábra: Eu-Re diagram logaritmikus léptékben	198
92. ábra: Különböző keverők Eu-Re diagramja	199
93. ábra: Radiális áramlást biztosító keverőtípusok (P. Csiszar engedélyével)	200
94. ábra: Propellerkeverő a. háromszárnyú b. négyszárnyú (P. Csiszar engedélyével)	201
95. ábra: Zárt turbókeverő a - egyszeres beömlésű, b - kettős beömlésű	201
96. ábra: Sztatikus (Kenics-) keverő a - működési elvi vázlat, b - elkeverés rétegei	202
97. ábra: In-line gyorskeverő rendszer	203
98. ábra: Pneumatikus gyorskeverő felépítése	204
99. ábra: Fluidumban mozgó részecskére ható erők	208
100. ábra: Az ülepedési ellenállási tényező a Re és az alaki tényező függvényében	211
101. ábra: A korrekciós tényező szuszpenzió sűrűségének függvényében	215
102. ábra: Porkamra	215
103. ábra: Dorr ülepitő	217
104. ábra: Hidrofil és hidrofób anyagok nedvesítési szögei	219
105. ábra: Szeparátor	221
106. ábra: a) Csőves centrifuga, b)Tányéros centrifuga	223
107. ábra: Csőcentrifuga	224
108. ábra: Egyrétegű síkfal hővezetése	234
109. ábra: Hővezetés többretegű sík falban	235
110. ábra: Hővezetés csőfalon keresztül	236

111. ábra: Hővezetés többrétegű csőfalon keresztül	237
112. ábra: Testek hűlése során a hőmérséklet kiegyenlítődés és hőmérséklet-eloszlás az idő függvényében	237
113. ábra: A hőtranszport folyamata	238
114. ábra: Fo-Y diagram végtelen síklap esetén	241
115. ábra: Fo-Y diagram végtelen henger esetén	242
116. ábra: Fo-Y diagram gömb esetén	243
117. ábra: Síkfal a vele érintkező fluidum határrétegével.....	247
118. ábra: Síkfal a vele érintkező fluidumok határrétegeivel.....	256
119. ábra: Egyenáram és ellenáram animációja cső a csőben típusú hőcserélőben	258
120. ábra: A két közeg hőmérsékletének változása egyenáramú és ellenáramú hőcserélőben.	259
121. ábra: Dezinfektor.....	260
122. ábra: Duplikátor.....	260
123. ábra: Lemezes hőcserélő	261
124. ábra: Csököteges hőcserélő	262
125. ábra: Vákuumgömb bepárló	266
126. ábra: Csököteges bepárló (animáció angol nyelven http://www.rpaulsingh.com/animated%20figures/fig8_1.htm).....	267
127. ábra: Filmbepárló (animáció angol nyelven: http://www.rpaulsingh.com/animated%20figures/fig8_8.htm).....	268
128. ábra: Többtestes bepárló (animáció angol nyelven: http://www.rpaulsingh.com/animated%20figures/fig8_2.htm).....	269
129. ábra: Oldott anyag egyensúlyi megoszlása gáz- és folyadékfázis között, állandó hőmérsékleten.....	284
130. ábra: Egyensúlyi görbe két típusa	287
131. ábra: A hajtóerők helykoordináta szerinti változása a két-film elmélet alapján	289
132. ábra: Hajtóerők a kétfázisú rendszerben	291
133. ábra: A teljes hajtóerők lineáris egyensúlyi görbe esetében	292
134. ábra: A teljes hajtóerők nem lineáris egyensúlyi görbe esetében.....	294
135. ábra: Hajtóerők m kis értékénél.	295
136. ábra: Hajtóerők az m nagy értékénél.....	296
137. ábra: Stacionárius állapotú egyenáramú folyamat.....	297
138. ábra: Egyenáramú diffúziós folyamat, az oldott anyag átvitele az R fázisból az E fázisba	299
139. ábra: Egyenáramú diffúziós folyamat, az oldott anyag átvitele az E fázisból az R fázisba	300
140. ábra: Állandósult állapotú ellenáramú folyamat	301
141. ábra: Ellenáramú diffúziós művelet munkavonalai.....	302
142. ábra: Ellenáramú diffúziós folyamat görbe munkavonallal	303
143. ábra: Anyagátadás tökéletesen kevert térben	305
144. ábra: Három reális fokozat keresztáramú kaszkádja	308
145. ábra: Többfokozatú ellenáramú kaszkád.....	309
146. ábra: Ellenáramú többfokozatú kaszkád, átadás az R fázisból az E fázisba	309
147. ábra: Gázok oldhatósága vízben.....	312
148. ábra: Ellenáramú abszorpciós kolonna.....	315
149. ábra: Az abszorpciós- és a kihajtó kolonna munkavonalai	317
150. ábra: Minimális folyadék-gáz arány.....	317
151. ábra: Egyenáramú abszorber	318
152. ábra: Ellenáramú többfokozatú abszorpció.....	319

153. ábra: Abszorber vázlata és a koncentrációk hossz menti változása	322
154. ábra: Átviteli egység szám meghatározása grafikus módszerrel	325
155. ábra: Átviteli egység szám meghatározása Baker grafikus módszerével	325
156. ábra: Gáz diszpergáló keverős készülék	328
157. ábra: Buboréksapkás tányéros torony	330
158. ábra: A Turill elvirajza	332
159. ábra: Speciális kiképzésű felületi abszorber	333
160. ábra: Töltött torony és különböző töltet	334
161. ábra: Gőz-folyadék rendszer egyensúlya.	339
162. ábra: Egyszerű folyamatos desztilláció elvi rajza.	341
163. ábra: A flash desztilláció elvi rajza.	342
164. ábra: Az egyensúlyi desztilláció, egyensúlyi értékeinek grafikus meghatározása.	343
165. ábra: A differenciális desztilláció elvi rajza.	343
166. ábra: Rayleigh egyenlet grafikus meghatározása.	344
167. ábra: Többfokozatú desztilláció	345
168. ábra: Az ellenáramú desztilláció elve	346
169. ábra: A rektifikálás elve.	347
170. ábra: Rektifikáló tányértípusok	347
171. ábra: Folyamatos működésű rektifikáló kolonna részei.	348
172. ábra: A rektifikáló oszlop i-edik tányérja	349
173. ábra: A folyamatos rektifikálás elvi rajza	350
174. ábra: A dúsító szakasz munkavonala	352
175. ábra: A kiforráló szakasz munkavonala	352
176. ábra: A betáplálási tányér.	354
177. ábra: A q-vonalak lehetséges esetei	355
178. ábra: A tányérszám meghatározása Sorel-Lewis módszerrel	358
179. ábra: A tányérszám meghatározása McCabe-Thiele módszerrel.	359
180. ábra: A minimális refluxarány meghatározása	361
181. ábra: Minimális tányérszám munkavonalai teljes reflux esetén	362
182. ábra: A minimális tányérszám meghatározása Fenske módszerrel	364
183. ábra: Rektifikáló kolonna költségei a reflux arány függvényében	364
184. ábra: Szakaszos rektifikálás elvi rajza	366
185. ábra: Szakaszos rektifikálás változó reflux aránnyal	367
186. ábra: Szakaszos rektifikálás állandó reflux aránnyal.	368
187. ábra: Koncentrációk ábrázolása Egyenlő oldalú háromszögben	371
188. ábra: Három folyadékfázisból álló rendszer, A és B részlegesen elegyedik	372
189. ábra: Extrakciós egyensúly	374
190. ábra: Az extrakció három fokozata	377
191. ábra: Egyensúlyi extrakció oldószer visszanyeréssel	378
192. ábra: Egyfokozatú extrakció mérlege háromszög diagramon	379
193. ábra: Az egyfokozatú extrakció grafikus mérlege	381
194. ábra: Egyenáramú extrakció elvi vázlata	382
195. ábra: Többfokozatú keresztáramú extrakció oldószer visszanyeréssel	382
196. ábra: Munkavonal és egyensúlyi vonal keresztáramú extrakció esetén	384
197. ábra Keresztáramú extrakció fokozatai	386
198. ábra: Többfokozatú ellenáramú extrakció	387
199. ábra: Többfokozatú ellenáramú extrakció háromszög diagramon	388
200. ábra: Ellenáramú extrakció számítása háromszög diagramon	388
201. ábra: Ellenáramú extrakció y-x diagramja	389
202. ábra: Keverő ülepítő elvi rajza	393

203. ábra: Szitatányéros extraktor, könnyű folyadék a diszpergált fázis	394
204. ábra: Permetező extraktor	394
205. ábra: Töltetes extrakciós oszlop	395
206. ábra: Pulzáló extrakciós berendezés	396
207. ábra: Szemcsés halmaz leszívása	400
208. ábra: Ellenáramú többszöri érintkezés, Shanks-rendszer	402
209. ábra: Cukorrépa diffuzőr	403
210. ábra: Keverővel ellátott szakaszosan működő kilúgozó berendezések	404
211. ábra: Pachuca edény	405
212. ábra: Szakaszos ülepítés	406
213. ábra: Az ülepedés sebessége	407
214. ábra: A szuszpenzió koncentrációjának befolyása az ülepedési sebességre	408
215. ábra: Ülepedés különböző kezdeti magasságok mellett	408
216. ábra: Hildebrandt extraktor	412
217. ábra: Koncentrációk a kilúgozásnál és mosásnál	413
218. ábra: Tipikus egyensúlyi diagramok	415
219. ábra: Egyfokozatú kilúgozás vagy kioldás	416
220. ábra: Egyfokozatú kilúgozás vagy mosás	417
221. ábra: Többfokozatú ellenáramú kilúgozás	418
222. ábra: Szilárd-folyadék egyensúlyi diagramja	420
223. ábra: Egyensúlyi adszorpció aktív szénen	427
224. ábra: Jellegzetes, teljes abszorpciós izoterma	428
225. ábra: Gőzök jellemző adszorpciós izotermái	429
226. ábra: Ábra. Histerézis mutató adszorpciós izoterma	429
227. ábra: A gyakoribb adszorpciós izotermák	430
228. ábra: Adszorpció híg oldatokból [2]	433
229. ábra: Olaj szintelenítése derítőföld adszorbens alkalmazásával [2]	433
230. ábra: Látszólagos adszorpció tömény oldatokból	434
231. ábra: Az egyensúly beállása szakaszos adszorpciónál	436
232. ábra: Adszorpció ideális fokozatban	438
233. ábra: Egyfokozatú adszorpció a Freundlich izotermákkal	439
234. ábra: Kétfokozatú keresztáramú adszorpció	440
235. ábra: Többfokozatú ellenáramú adszorpció	442
236. ábra: Kétfokozatú ellenáramú adszorpció	443
237. ábra: Kétfokozatú ellenáramú adszorpció	444
238. ábra: Az adszorpciós hullám	446
239. ábra: Adszorber az oldószergőzök visszanyerésére	447
240. ábra: Idealizált áttörési görbe	450
241. ábra: Egykomponensű, folyamatos ellenáramú adszorpció	452
242. ábra: Diffúzió általános ábrája	460
243. ábra: A valós forráshoz (fekete vonal) tükrökép-forrást (szaggatott vonal) rendelünk, a valós tartományban létrejövő megoldáshoz (szürke, x rendelünk, a valós tartományban létrejövő megoldáshoz (szürke, $x > -L$), amely kielégíti a $\delta C / \delta x = 0$ határfeltételt $x = -L$ pontban	507
244. ábra: Párhuzamos, szilárd határok közé bocsátott anyag. a rendszer x és z síkban nem körülhatárolt	510
245. ábra: Egységnyi anyagot bocsátunk egy folyékony tartományba ($x, y, z, t = 0$ értéknél. A tartomány $x-z$ síkban nem körülhatárolt, de $y = +L$ and $-L$ értékeknél párhuzamos, no flux határok övezik. A kibocsátás után több időpontban is mérjük a koncentráció profilok	

- profilokat $C(x=0, y, z=0)$. A rendszer az y -tartományban $t = (2L)^2/4D$ idő alatt válik teljesen egyenletessé (vegyülés)..... 512
246. ábra: A koncentrációs mező alakulása pillanatnyi tömegpont kibocsátás hatására egydimenziós rendszerben, állandó advekción, u , érték és diffúzió, D , mellett. A piros, kék és zöld görbék $C(x,t)$, $t = t_1, t_2$, és t_3 értékek alakulását jelölik. A koncentráció csúcs $\cdot t^{-1/2}$ és $x^{-1/2}$ értéknél fog lecsökkenni, ahogy a szaggatott vonal jelöli..... 524
247. ábra: A koncentrációs mező alakulása pillanatnyi tömegpont kibocsátás hatására egydimenziós rendszerben, állandó advekción, u , érték és diffúzió, D , mellett. A piros, kék és zöld görbék $C(x,t)$, $t = t_1, t_2$, és t_3 értékek alakulását jelölik. A koncentráció csúcs $\cdot t^{-1/2}$ és $x^{-1/2}$ értéknél fog lecsökkenni, ahogy a szaggatott vonal jelöli. 527
248. ábra: A Gauss-féle csóva koncentrációs határvonalai, ahol $x=0, y=50 \text{ cm}, z=0$. A $C(y)$ és $C(z)$ koncentrációs profilok Gauss félek. Lásd: $C(x=125, y, z=0)$ profil a fenti ábrán feketével jelölve. 539
249. ábra: Tömegmegmaradás referencia térfogaton belül, állandó helyhez kötött forrás. A meder felső része, ahol az áramlás (Q_r) és a koncentráció folyamatos befecskendezése (C_i), az áramlás (Q_i)..... 540
250. ábra: Állandó kibocsátás, ahol a középszélesség ($y=0$), a közép mélység ($z = 0$) és $x = 0$. Jelöltük a pontokat, ahol a csóva keveredik a mélységnél (x_1) és a szélességnél (x_2)..... 542
251. ábra: Áttörési görbe Jelölő anyag hozzáadása értéknél kezdődik, ahol $t = 0$. A koncentráció $x=L_x$ pontban érzékelhető, melyet a fekete görbe ábrázol. A szürke áttörési görbe a $Dx = 0$ pontban áll fenn, amennyiben a diffúziót figyelmen kívül hagyjuk. 543
252. ábra: Jelölőanyag mozgása lamináris és turbulens áramlás esetén. A feketével jelölt párhuzamos vízszintes egyenesek az áramlásvonalakat jelölik, melyek minden esetben párhuzamosak a főáramlással. Lamináris áramlás esetén a folyadék részecskék pontosan az áramlásvonalakkal együtt haladnak, ezt látszik a lamináris mozgás régióban, ahol a színes vonalak a jelölőanyag mozgását jelzik. Turbulens áramlás esetén a főáramlás mellett számtalan különböző méretű örvény is kialakul. Amikor a jelölőanyag a turbulens mozgású folyadékba érkezik, mozgását egyaránt befolyásolja a főáramlás és az örvények is. A nagyobb örvények akár a fő áramlásvonalak között is mozgathatják a folyadékot. A kisebb örvények hatására a jelölőanyag kisebb mértékben kezd el kavarni, és az örvény körül fog szétterjedni (diffúzió). 555
253. ábra: A mért sebesség értéke az előző ábra A pontjában. 556
254. ábra: Két áramlási csatorna felülnézetből. A felső csatorna esetében az oldalsó fal határvonala hibalehetőségre adhat okot, a sebesség egyenletesen oszlik el y környezetben. Az alsó csatornában nincs hibalehetőség az oldalsó fal határvonala mentén, ezáltal egy hosszanti nyírás eredményezve $\partial u/\partial y$. Mindkét csatorna ugyanakkora köztes átlagsebességgel rendelkezik (u). A jelölőanyagot $t = 0$ és $x = 0$ pontoknál bocsátjuk ki. Minden egyes köd térbeli eloszlását t_1 és t_2 időegységeknél jelöltük. Figyeljük meg, hogy a tömeg középpontja körül mindkét esetben u sebességnél figyelhető meg légmozgás. A csatorna alján keletkező nyírás sebesség elnyújtja a jelölőanyag köd felhőt, ami azt eredményezi, hogy a köd felhő hosszanti irányban sokkal gyorsabban áramlik, mint a kiegyenlített csatornában található köd felhő..... 574
255. ábra: Feltételezzük, hogy a jelölőanyag-felhő, melynek vezető pereme egyenletes t időben. A differenciált advekción eltorzítja a csóvát, egy új formát adva annak $t+ dt$ időben. A sebességben jelenlévő térbeli eltérés u' zavart kelt a $t + dt$ koncentrációban. Ebből adódóan a (11) egyenlet első két terminusában $c' = -(\partial C/\partial x) \cdot u' dt$ 576
256. ábra: A jelölőanyag kifejlődése $t=0$ pontban történik, ahol a vonal a mélységet felosztja. Eleinte differenciált advekción dominál (t_1), láthatóan eltorzítva a csóva alakját. Ekkor az átlagmélység koncentrációjának hosszanti eloszlása (c) aszimmetrikus. Végül a differenciált advekción és diffúzió egyensúlyba kerülnek, és a csóva eléri az egyenletes mélységi

- koncentrációt. Ezt követően az átlagmélység koncentrációjának hosszanti eloszlása Gauss-féle eloszlású (t_2) és a diszperziós folyamat eléri a Fick-féle határértéket. 578
257. ábra: Holtzónás diszperzió. A részecskék oldalirányú diffúziója egy zéró-sebességű régióba (holtzóna) oldalirányú diszperziót eredményez. A holtzónába érkező jelölőanyag háttérben marad a holtzónát el nem érő jelölőanyaggal szemben. Amikor a jelölőanyag a holtzónát elhagyja, szétválik a légtérben (eloszlik) a maradék porfelhőről 579
258. ábra: Néhány oldott vegyszer frakció (fehér körök) megköthet a szilárd, állandó közeg felületén (fekete körök). A megkötött vegyszer a mezsgyéről leválik miután az oldott porfelhő továbbhalad. A vegyszer adszorpciója és deszorpciója késleltetett transzportot eredményez, ami a jelölő felhőt eloszlatja 580
259. ábra: Koncentrációs profil oldódó felületnél, transzport által limitált áramlás lamináris alsó rétegen keresztül (δ_s) 589
260. ábra: Felületi forrással kialakult koncentráció 590
261. ábra: A koncentráció kialakulása az állandó koncentrációs határfelület felett. A határfelületi koncentráció egyensúlyban van a szilárd fázissal, $C(z=0) = C_{eq}$ 592
262. ábra: A koncentráció megoszlása a határfelületen, lassú transzportot feltételezve a lamináris alsó rétegben ($T\delta_s \gg TL$), és rapid transzportot feltételezve a lamináris alsó rétegben ($T\delta_s \ll TL$). 593
263. ábra: A vékonyréteg modell a volatilis anyagok cserefolyamatait írja le, a levegő-víz határfelületen keresztül olyan kondíciók mellett, mely szerint a transzportot a diffúziós folyamatok limitálják a lamináris alrétegeken keresztül. A felületen ($z = 0$) és a vízfázis (C_{sw}) egyensúlyban van a levegő koncentrációjával (C_{sa}), tehát $C_{sw} = C_{sa}/H$, ahol H a Henry hányados. 594
264. ábra: A tóból a légkörbe távozó TCE áramlatot a vízdoldali lamináris alréteg szabályozza. A levegőoldali alréteg figyelmen kívül hagyható, tehát $C_{sa} = C_a$. Továbbá, mivel $C_{sw} = C_{sa}/H$, így $C_{sw} = 0$ 596
265. ábra: Az első esetben (kék görbe) a megújuláshoz szükséges időmérték hosszabb, mint az egyensúlyi időmérték. A második esetben (narancsszínű görbe) a megújuláshoz szükséges idő sokkal rövidebb, mint az egyensúlyi időmérték. A második esetben erőteljesebb áramlás jön létre, mivel a határfelületen jelenlévő átlagos koncentrációs gradiensek nagyobbak, ($C_{szegmens} - C_{eq}$). 597
266. ábra: Egy új szegmensbe történő tömegdiffúzió $t = 0$ időpontban éri el a felszínt. Mielőtt a szegmens a felszínhez ér, ($t < 0$), $C = C_w$ a szegmensben keresztül. Mivel $t \geq 0$, a szegmens levegő határfelületén lévő koncentráció ($z = 0$) egyensúlyba kerül a levegővel, C_a/H 598
267. ábra: Az 1 és 2 számú határfelületek egydimenziós, alréteg által irányított keresztmetszeti tömeget feltételeznek. A talajszerkezetet barna színnel jelöltük az ábrán, a talajvíz pedig kék színű. A kémiai anyag tömege partíciónál a vízfázis (piros pontok) és a kötött fázis (rózsaszín pontok) között. Egyensúlyi állapotban a kötött fázisban lévő koncentrációs hányados (C_s), valamint a vízfázist (C_w) a partíciónálási együttható határozza meg, $K_d = C_s/C_w$ 601
268. ábra: Két megegyező tömegű, de különböző összetételű anyag egy egydimenziós talajvíz rendszerbe kerül pillanatnyi kibocsátással. A kibocsátási időpont $x = 0$. A talaj porozitás, $n = 0.4$. Az 1. sz. kémiai anyag partíciónál szilárd felületen, a 2. sz. kémiai anyag nem. Az 1. sz. kémiai anyag függvénye $f = 0.5$. Az ábra mutatja a teljes koncentráció-eloszlást, C_1 and C_2 , t időben a kibocsátást követően. A partíciónál 1. sz. kémiai anyag (C_2) kevesebb idegi áramlik és kisebb területen oszlik szét, mint a nem partíciónál 2. sz. kémiai anyag (c_2). 602

Előszó: A jegyzet tárgya és ennek kifejtése. A legfontosabb forrásanyagok.

A jegyzet a földi hidroszférában és atmoszférában, helyi és regionális léptékben, lejátszódó áramlási folyamatokkal és a szennyezőanyagok transzportjával foglalkozik. Ezt azt jelenti, hogy a tárgyalt folyamatok térbeli léptékének határa kb. 100 km-es távolság. Ezen az előbb említett nagyságrenden túl már a Föld forgásának következtében előálló ún. Coriolis erőt is figyelembe kell venni, és az már a Geofizikai áramlások dinamikai tanulmányozásának témakörébe tartozik.

A tananyagban a környezetben jelentős elkeveredési és transzportfolyamatok alapjai kapnak hangsúlyt. A passzív diffúzió tárgyalását például a transzportegyenlet bevezetésével kezdjük és a nem rétegzett víztestek esetében mutatunk be alkalmazásokat. A passzív diffúzió azoknak az elkeveredési folyamatoknak felel meg, amelyek a véletlen mozgásoknak megfelelően zajlanak le, és amelyeknek nincs visszacsatolása a vízmozgás dinamikájára.

A szöveget úgy terveztük, mint egy levegő és vízminőségi transzportfolyamatokkal foglalkozó tankönyvet. A munka egyedi tulajdonsága, hogy a legtöbb matematikai levezetés olyan részletességig kidolgozott, amelynek alapján az olvasó az összes egyenletet követheti és ellenőrizheti is. Minden fejezethez házi feladatok tartoznak, amelyek a törzsanyag megértését és gyakorlati alkalmazását segítik.

Az egyes fejezetek hasonlóan strukturáltak. Az első bekezdések az anyag többi részével teremtik meg a kapcsolatot és ráirányítják a figyelmet a fejezetben tanulandókra. A fejezetek első fele azoknak az általános és háttér információknak az ismertetését tartalmazza, amelyek a fejezetben foglaltak megértésére szolgálnak. A középső részek a lényeges elméleti levezetéseket tartalmazzák. A fejezetek utolsó részei a mérnöki gyakorlatban szereplő aktuális alkalmazásokat mutatják be. Minden fejezet végén van egy ismétlő rész, ami a leglényegesebb megállapításokat foglalja össze, ill. itt olyan példák szerepelnek, amelyek házi feladatként használhatóak.

A jegyzet nagy részének alapját egy a Texasi A&M Egyetemen kidolgozott tankönyv (Socolofsky-Jirka 2005: Special Topics in Mixing and Transport processes in the Environment) valamint egy az Egyesült Államokban kiadott elkeveredéssel foglalkozó könyv (Fischer et al. 1979: Mixing in Inland and Coastal Waters) képezi. A tananyag megírása során felhasználásra kerültek olyan anyagok is, amelyek az Egyesült Államokbeli Cornell Egyetemen, az MIT-n (Massachusetts Institute of Technology), ill. Magyarországon a BMGE-n, az ELTE-n, a Szegei és Miskolci, valamint a Nyugat-magyarországi Egyetemeken oktatnak. A szerző itt mond köszönetet azoknak az oktatóknak, akiknek az anyagait felhasználva volt lehetőség jelen jegyzet kidolgozására, így kiemelten Scott A. Socolofsky-nak és Gerhard H. Jirka-nak a külföldi szerzők közül, Jolánkai Gézának, Kovács Balázsnak, Lajos Tamásnak a hazai szerzők közül. Külön köszönet Józsa Jánosnak a BME Vízépítési és Vízgazdálkodási Tanszéke vezetőjének, akinek a jóvoltából lehetősége volt a szerzőnek egy a folyadékok környezeti mechanikájával foglalkozó nemzetközi tanfolyamon (Environmental Fluid Mechanics Course) való részvételre. A tanfolyam anyagának egyes részei is beépítésre kerültek a kidolgozott tananyagba.

A 22-31. fejezetek a MIT OpenCourseWare anyagainak fordításainak felhasználásával készültek. (Forrás: <http://ocw.mit.edu/>)

1. Alapfogalmak, Definíciók, a diffúziós egyenlet

Bevezetés

A fejezet megismertet minket az anyagok mozgásával, vagy más néven transzport folyamatokkal, kapcsolatos alapfogalmakkal és ráfordítja a figyelmünket a diffúziós folyamatok fizikájára. Mivel a diffúziós folyamatok fogalmának megértése a leglényegesebb része ennek a fejezetnek, igyekszünk azt minél alaposabban kifejteni és levezetni pontos matematikai formában. Az első alapelvekből kiindulva célunk egy fontos, a folyamatot leíró parciális differenciál egyenlethez eljutni. A tananyagban szükségesnek érezzük a matematikai eszköztár kissé nagyobb mértékű alkalmazását, hogy így a diákok eljuthassanak a diffúziós folyamatoknak és a diffúziós egyenletnek az alapos és teljeskörű megértéséhez. Ez az alapozás hozzá fog segíteni minket a későbbi fejezetben következő bonyolultabb folyamatok megértéséhez és elkezd, ill. folytatja annak a mérnöki intuíciónak a kifejlesztését, aminek a segítségével a környezetben lejátszódó transzportfolyamatokkal kapcsolatos problémákat oldhatunk meg.

1.1. Alapfogalmak, lényeges kérdések és definíciók

Egyszerűen fogalmazva a környezetben lejátszódó transzportfolyamatok közül itt most a azokra a folyamatokra koncentrálunk, amelyek a közegben lévő anyagok koncentrációváltozásával állnak kapcsolatban.

A fent említett folyamatok két nagyobb csoportba sorolhatók: transzport és transzformációs folyamatok.

A *transzport* felel meg azoknak a folyamatoknak, amelyek az egyes anyagokat mozgatják a hidroszférában, ill. az atmoszférában tisztán fizikai jellegüknel fogva. Ennek analógiája a postaszolgálat. Ez egy olyan transzport, amelynek során a levelek, mint vizsgált anyag, az egyik helyről egy másikra jutnak el. A posta szállító autója az analóg megfelelője a folyadéknak és a levél maga annak a kémiai anyagnak a megfeleltetése, aminek az útját figyelemmel kísérjük. A transzportfolyamatok két alapvető módja a környezeti áramlástanban az *advekcio* (a folyadék átlagos mozgásával kapcsolatos transzport) és a *diffúzió* (a folyadék belsejében a véletlenszerű mozgás által előálló transzport).

A másik lényeges folyamat a *transzformáció*, ami azoknak az átalakulásoknak felel meg, amelyek az általunk vizsgált anyagot egy másik anyaggá alakítják át. Kapcsolódva az előbbi analógiánkhoz, transzformáció például, amikor egy másodlagos nyersanyagokat felhasználó gyárban az előbbi levelünkéből egy cipősdobozt készítenek. A transzformációnak két alapvető módja van: a *fizikai* (a transzformáció a fizika törvényein alapul, mint pl. a radioaktív bomlás); és a *kémiai* (a transzformáció kémiai, illetve biokémiai reakciók alapján megy végbe, ilyen például az oldódás és a légzés).

A mérnöki gyakorlatban, a környezeti áramlástan egy eszközrendszer ad, pl. egyrészt a létfontosságú tápanyagok és egyéb kémiai anyagok ökoszisztémán keresztüli mozgásának becsléséhez; másrészt a toxikus szennyezőanyagok transzportjának megértéséhez és ezáltal a szennyezések hatásainak kiküszöböléséhez valamint lokalizálásához; harmadrészt pedig az emberiség globális klímára való ráhatásának minimalizálásához. Vegyük ezeket a példákat kissé részletesebben.

1, Az ökoszisztéma dinamikája: A táplálék az élő szervezetek számára olyan forrást jelent, amiből energiát hasznosítanak és annak tápelemeiből testüket is építik. A vizekkel foglalkozó mérnöknek pl. ismernie kell ezen tápanyagok mennyiségét, átalakulási útjait, ha meg akarja becsülni az egyes fajok populációnak alakulását a jövőben. Ilyen populációk például az algák,

amelyeknek a növekedése és a pusztulása a fitoplankton és a zooplankton dinamikáját adja a vizekben. Néhány közönséges tápanyag és létfontosságú kémiai anyag az oxigén, a szén dioxid, a foszfor, a nitrogén, a fémek egy része, stb.

2, Toxikusság: A toxikus kémiai anyagok esetében a mérnöknek szükséges ismernie és megértenie a természetben lejátszódó transzport és transzformációs folyamatokat, hogy olyan tevékenységet tudjon tervezni, ahol minimalizálható a toxikus koncentrációk megjelenése egy ésszerű haszon megtartása mellett. A legismertebb toxikus kémiai anyagok pl. a nehézfémek (ólom, cink, kadmium, stb.), a radioaktív anyagok (uránium, plutónium, stb.), és az erősen mérgező valamint karcinogén anyagok (PCB-k, szén-monoxid, arzén, az erős savak, stb.).

3, Globális klímaváltozás: Néhány kémiai anyag a globális klimatikus rendszerre kifejtett hatásai miatt is érdekes. Ilyen említésre érdemes anyagok a CFC-k (halogénezett szénhidrogének), amelyek az ózonréteget rombolják, az üvegházhatást fokozó gázok, különösen a szén-dioxid és a metán, amelyek a globális felmelegedést fokozzák és a más összetevők közül a szulfát aeroszolok, amelyek a Föld légkörének sugárzásviszaverőképességére vannak hatással a felhőképződésen keresztül.

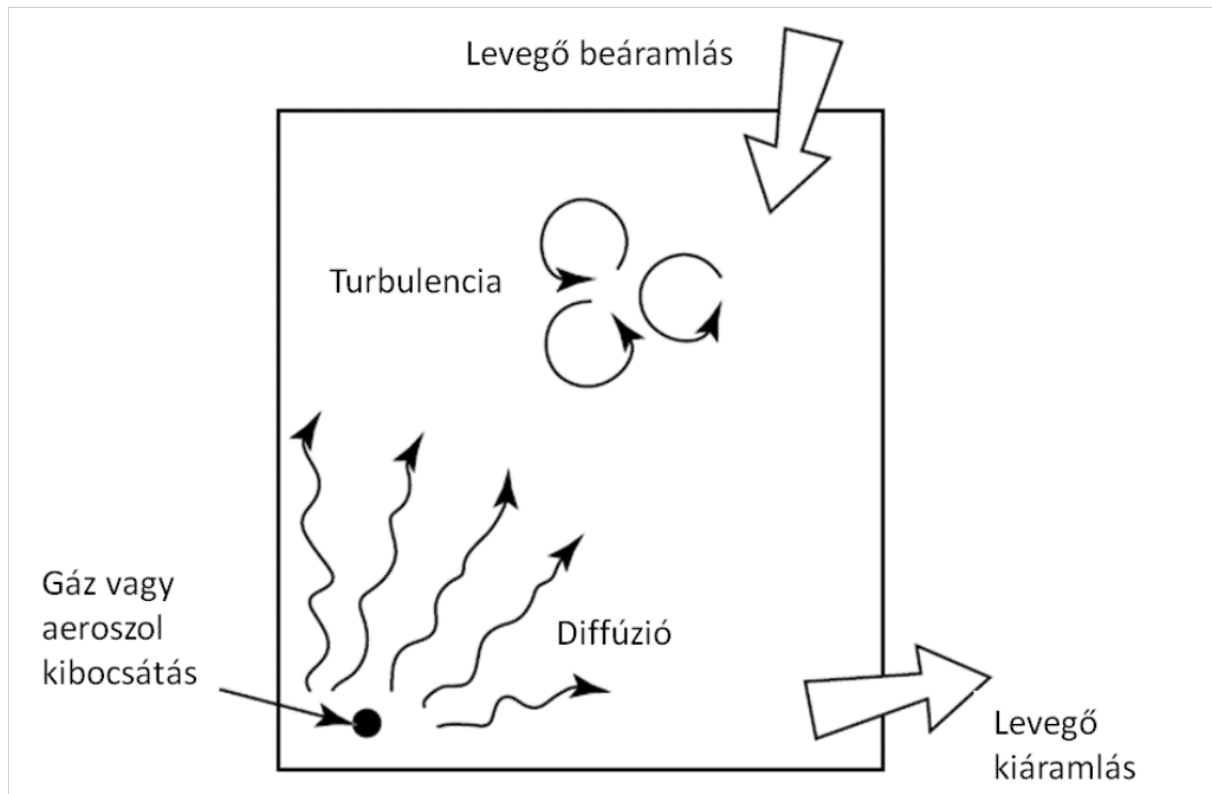
Fontos emlékeztetni a következőkre, egyrésztől hogy majd minden kémiai anyag szükséges egy bizonyos szinten az élet fenntartásához, valamint arra is, hogy a kémiai anyagok antropogén bevitele a környezetbe az ipari termelés szükséges mellékterméke. A mérnökök a környezeti áramlástanban szerzett ismereteik alapján képesek kell, hogy legyenek a negatív környezeti hatások kiküszöbölésére és a balesetek következményeinek enyhítésére a mérnöki projektek tervezésének optimalizálásával.

1.1.1. Néhány mintapélda a környezeti áramlástan területéről

Bár a környezeti áramlástan olyan folyamatokkal foglalkozik, amelyekkel a környezetünkkel való természetes kapcsolatunk folytán gyakran találkozunk, a mérnöki alkalmazásai ezen egyszerű jelenségeknek azonban nem túl gyakran képezik a tananyag tárgyát. Így a diákok gyakran találhatják magukat olyan helyzetben, hogy fogalmakat és a terminológiát értik, de nem érzik a fontosságát és nem tudják alkalmazni a szerzett ismereteket a gyakorlati problémákra. Ez a jelenség abból is fakad, hogy egy egész sereg új egyenletet kell elsajátítaniuk mielőtt még egy jelentősebb tervezési problémával megbirkózhatnának. Itt a bevezető részben próbálunk arra figyelmet fordítani, hogy megismertessük az olvasót néhány tipikus problémával és ezen problémák környezeti áramlástanai vonatkozásaival, hogy egy kis kedvet csináljunk, a későbbi sokkal alaposabb tanulmányokhoz valamint hogy egy bizonyos gyakorlati keretet adjunk a későbbi levezetéseknek.

Szennyeződés terjedése egy zárt helyiség levegőjében

A kémiai anyagok, amelyekkel legtöbbször kapcsolatba kerülünk, a leggyakrabban a levegőn keresztül jutnak el hozzánk, amit belélegzünk. A két lényeges transzport folyamat az advekción (itt a szél vagy a levegőztető rendszer által létrehozott légáramlással történő együttmozgás) és a diffúzió (itt a vizsgált anyag véletlen bolyongása következtében végbemenő fokozatos szétterjedés). Ez a folyamat sematikusán az **1. ábra** látható.

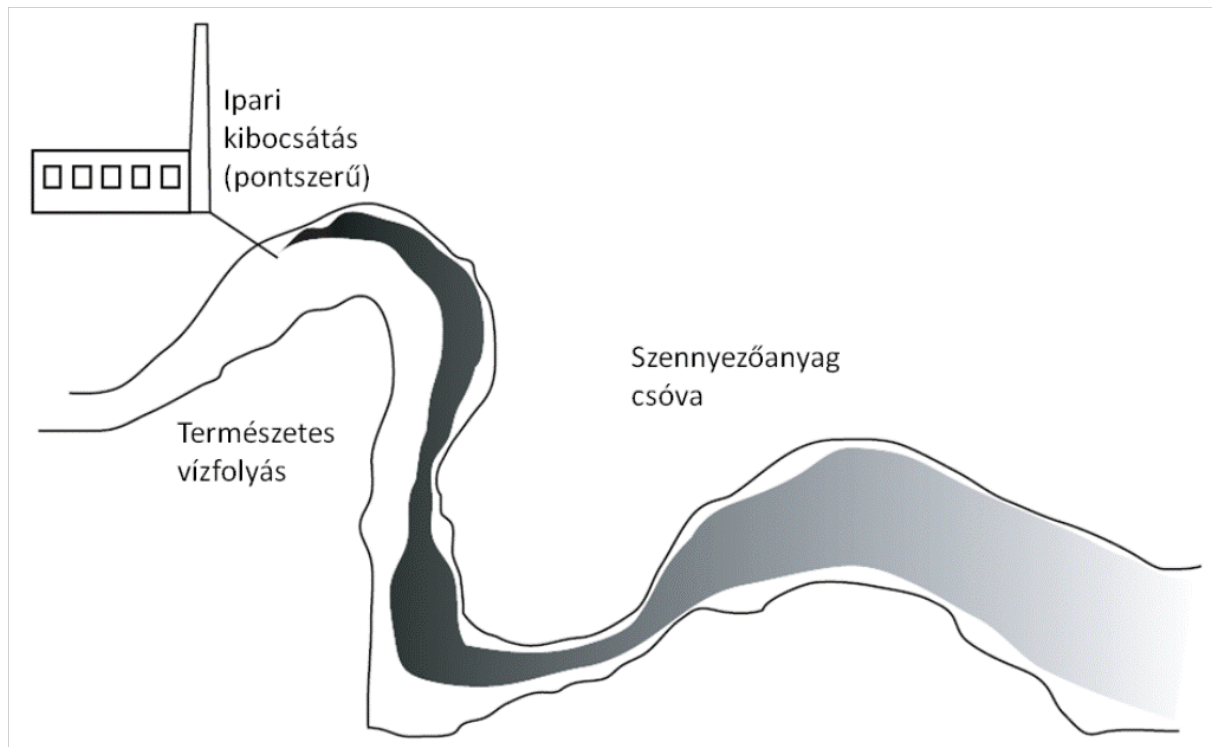


1. ábra: Egy zárt helyiségben az elkeveredési folyamatok sematikus megjelenítése. A vizsgált anyag pontforrása a zárt helyiség bal alsó sarkában található. Az elkeveredés a helyiségbe érkező és távozó, a levegőtető rendszer által előidézett, főáramlás és a cirkuláló levegőben lezajló véletlen mozgások következménye. (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán)

Amikor a mérnökök egy épület belső levegő-keringető rendszerét megtervezik, az egyik fontos dolog, amit szem előtt kell tartaniuk, hogy a rendszer megfelelően elkeverje a bejuttatott levegőt (vagyis ne legyenek holt terek, ahol az esetlegesen káros anyagok fel tudnak halmozódni) és a levegő gyakori frissítése is megtörténjen (a régi levegőt az új lecserélje). A környezeti áramlások tanulmányozása olyan eszközrendszer alkalmazását segíti elő, aminek a felhasználásával becsülni tudjuk az elkeveredés mértékét és jobban működő rendszereket tudunk tervezni. Az újonnan tervezett rendszerek csendesebbek, energiatakarékosabbak lehetnek, vagy nagyobb mértékben hasznosíthatják a kinti és benti hőmérsékletkülönbségek miatt előálló természetes ventilációt (pl. kémény statikus huzata). Az első nagyobb anyagréz, amely majd az advekción-diszperziós folyamatokat tárgyalja, közvetlenül ezekkel az előbb említett problémákkal és az ezek megoldásához szükséges tervezéssel foglalkozik.

Szennyeződés elkeveredése egy folyóban

Mivel a folyóvizek könnyen elérhetőek (gravitációsan) és a kémiai anyagok hatékony transzportját oldják meg az alvízi területek felé, ezért elsődleges befogadói az ipari és kommunális folyékony hulladékok teljes tárházának. A **2. ábra** egy folyóba bejutó ipari kibocsájtó pontszerű szennyezésének alakulását mutatja a vízfolyáson lefelé két dimenzióban, hossz és keresztirányban.



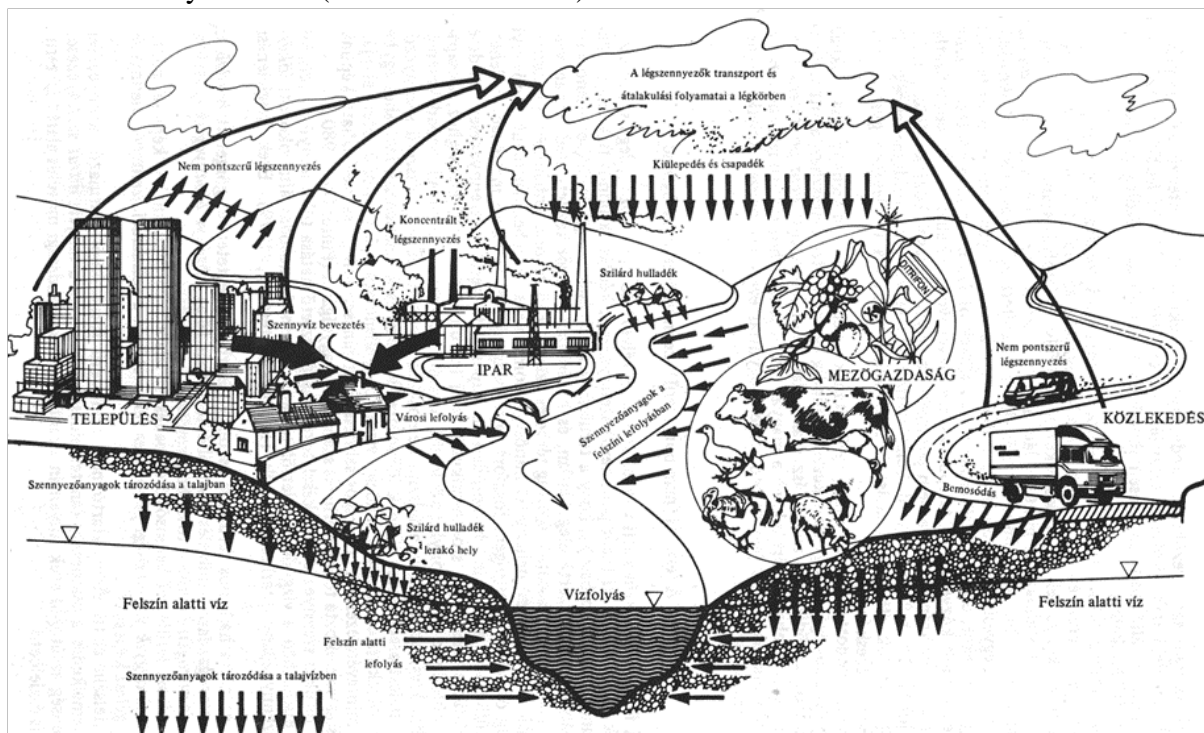
2. ábra: Egy ipari kibocsájtó pontszerű szennyezése egy természetes vízfolyás, mint befogadó, esetében. Ahogy a szennyezőanyag csóva lefelé mozog a vízfolyáson keresztirányban a partok felé szétterjed a diffúzió és az advekcio együttes hatására. (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán)

Általában a legvalószínűbb, hogy a települések szennyvíztisztítói által valamilyen mértékben megtisztított vizek is a helyi vízfolyásba vagy állóvízbe jutnak. Bármilyen jól működik is a telep, a kibocsájtott tisztított szennyvíz valószínűleg még mindig tartalmaz tápanyagokat, amelyek előmozdítják az alga és a baktérium tömeg növekedését a víztestben, folyásirányban a bebocsátás alatt. A víztest minőségében bekövetkező ilyen irányú változások általában problémákat idéznek elő az oxigénforgalomban (csökkentik az oldott oxigén szintet) és előmozdítják a víztest eutrofizációját, különösen igaz ez abban az esetben, ha tóról vagy tározóról van szó. Jelenleg a legtöbb szakértő egyetért abban, hogy nem a pontszerű szennyezések okozzák majd az igazán jelentős környezetvédelmi problémákat a jövőben az állóvizek és a vízfolyások esetében. A pontszerű kibocsájtások ugyanis könnyen kontrollálhatók és az olyan egységes vízügyi szabályozásokkal, mint pl. az Európai Unió Víz Keretirányelv, elsősorban ezen szennyezések esetében lehet erősebb hatósági kontrollal sikereket elérni a kidolgozott vízminőségi standardok alapján. A nem pontszerű forrásból származó szennyezések azonban (ezek azok a hatások, amelyek nem egy megadott helyen definiált adott keresztmetszetű csövön érkeznek a víztestbe, hanem diffúz módon egy meglehetősen nehezen meghatározható területről érkeznek) egyre nagyobb részét fogják majd kitenni a jövőben az összes szennyezésnek.

Egy definíció szerint a talajban, a levegőben, vagy esetünkben, a vízben azt a szennyezőanyag terhelés összetevőt tekintjük nem pontszerű, vagy más néven diffúz szennyezésnek, amelyik az adott vízgyűjtőn, a rendelkezésre álló adatok ismeretében, nem határozható meg pontszerű források emissziójaként egy adott pontra vonatkozó anyagmértékben. Az előbbi definícióból az is következik, hogy minden nem mért pontszerű forrás terhelése is nem pontszerű forrásként jelentkezik. A vízgyűjtő részletesebb feltárása esetén ezek az előbbi diffúz források már pontszerű forrásként azonosíthatóak (Jolánkai-Bíró 1999).

A pontszerű és nem pontszerű forrásokból származó szennyezőanyagok sorsát (3. ábra) alapvetően a csapadék lefolyási folyamatok határozzák meg, de a hidrológiai körfolyamat

egyéb elemei is közvetlen vagy közvetett hatással vannak a vízben lévő anyagok szállítási és átalakulási folyamataira (Jolánkai-Bíró 1999).



3. ábra: A szennyzőanyagok főbb áramlási útvonalainak szemléltetése (forrás Jolánkai 1989)

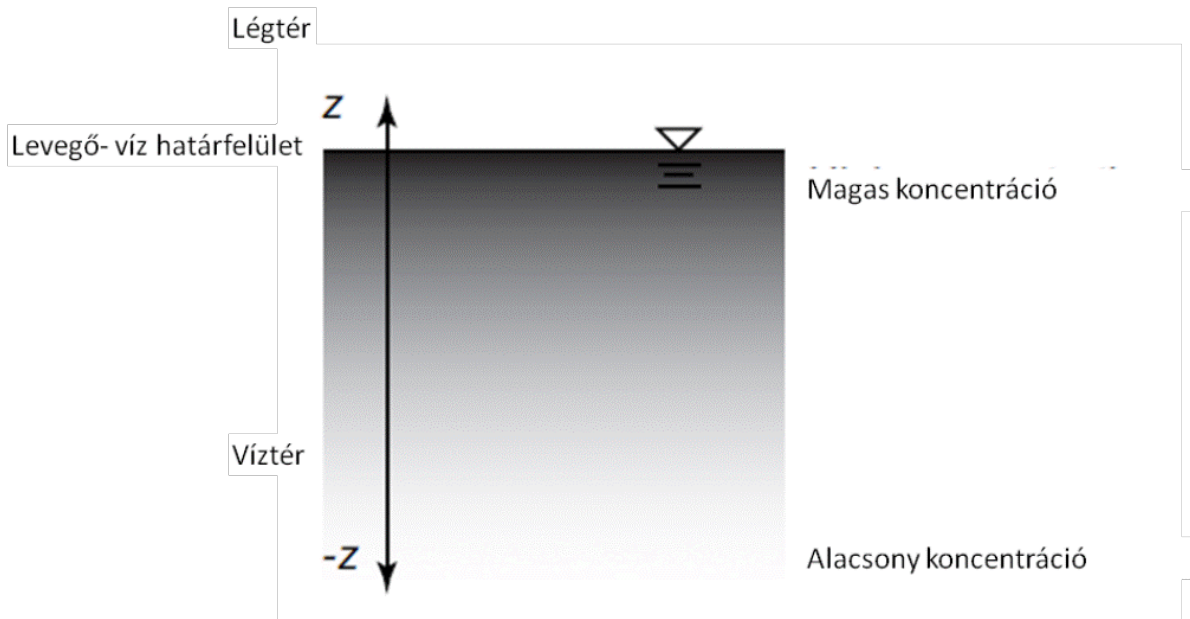
Azért, hogy a pontszerű forrásokból származó kibocsátásokat kontrolálni tudjuk, a mérnöknek általában a közeli (közvetlenül a forrásnál jelentkező) és a távoli (folyásirányban lefelé, de távolabb fekvő) hatásokat egyaránt értékelnie kell. A közeli hatásoknál általában a diffúziós folyamatok dominálnak, amelyek a szennyezés környezeti gyors elkeveredését okozzák. A távoli hatásoknál az advekción és a diszperzió (a vízfolyásokban a nem egyenletes, vertikális és keresztirányú, sebességmegoszlás, más néven nyíróáramlás, miatt jelentkező hatás), valamint a transzformációs folyamatok dominálnak. A transzformációs folyamatok azonban hosszabb távon meg is szüntethetik a szennyzőanyag jelenlétét a természetes biodegradáció következményeképpen. Az előbbi folyamatok közül a kurzus részletesen az advekción, a diffúziós és a diszperziós folyamatokkal foglalkozik, a transzformációs folyamatok területi korlátok miatt nem taglaltak.

Oxigén kicserélődése a víz és a légkör között

Nem minden a transzportfolyamatok és a környezeti áramlástan által érdekesnek tartott és vizsgált anyag veszélyes. Az egyik ilyen fontos, de nem ártalmas anyag az oxigén, amelynek jelenléte a légzés alapvető feltétele. Az oxigén koncentrációja csökkenhet például a vízben lévő szerves anyagok biokémiai lebomlása következtében. Ez a csökkenés azért jelentkezik elsődlegesen, mert a víz és az atmoszféra között az oxigén kicserélődési rátája viszonylag lassú. Amikor a vízfázisban lévő, a levegőbeni parciális párányomással egyensúlyt tartó, oxigén ún. egyensúlyi koncentrációja lecsökken, akkor oxigén beoldódás indul meg a légtérből a víztérbe és ott a víztér felszíni rétegeiből diffúzióval jut a víztér mélyebb rétegeibe. Ezt a folyamatot hivatott jelképezni a 4. ábra.

Ez a folyamat egy karakterisztikus jellemzője a diffúzióknak, hogy az adott anyagot, annak magasabb koncentrációjú régiójából az alacsonyabb koncentrációjú régiójába juttatja. Ha nem ez lenne a helyzet, akkor például egy parfüm illata soha nem terjedne szét, hanem az adott helyen lenne pl. egyre erősebb és erősebb, vagy a kiindulási koncentrációban maradna örökre

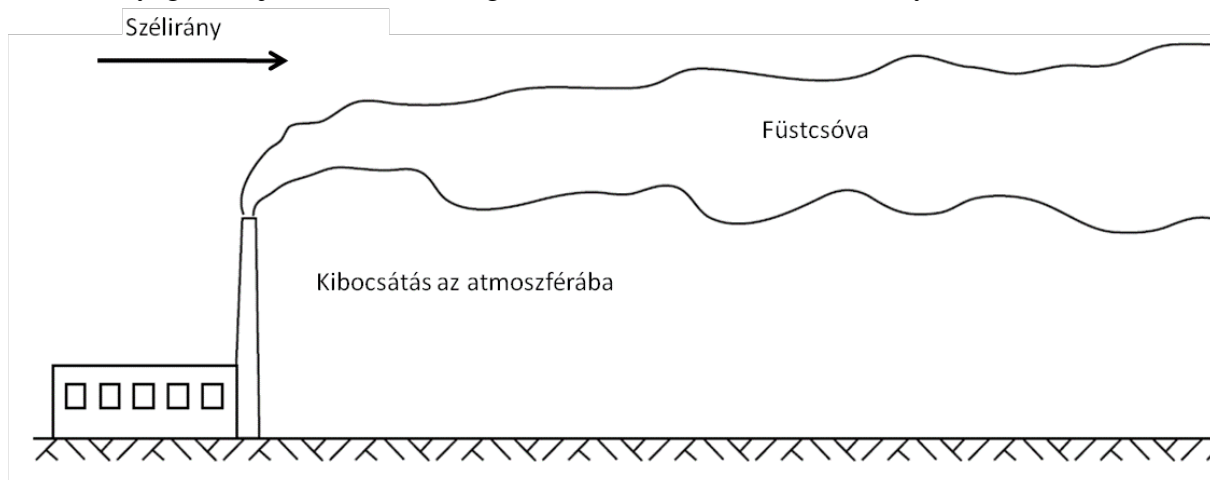
a kijuttatás helyszínén. Ehelyett azonban a diffúziós folyamat, a rá jellemző szokásos módon, csökkenti a parfüm koncentrációját a forrásnál és a parfüm illatát, annak szétterjedése miatt, előbb utóbb távolabb is meg lehet érezni.



4. ábra: Az oxigén diffúziója a víztestbe a víz-légkör határátmeneten keresztül. A sötét területek jelképezik a magasabb oxigén koncentrációjú, a világosabb részek az alacsonyabb oxigéntartalmú rétegeket. (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán)

Légtérbeli elkeveredés egy kémény környezetében (más ábra)

Valószínűleg az egyik legjellemzőbb kibocsátása a szennyezőanyagoknak a környezetbe, egy gyár vagy egy hőerőmű kéményén keresztül történő füstkibocsátás, ami csóvaszerűen jelenik meg (5. ábra). A füstfelhőben bekövetkező kondenzációs folyamatok miatt a kibocsátott gáz láthatóvá válik egy füstcsík vagy felhősáv formájában. Hasonló jelenséget tapasztalunk az autók kipufogója környékén a hideg téli napokon. Nyáron, amikor az autóból származó kipufogógáz nem látható, kevésbé gondolunk azokra a kémiai anyagokra, amelyek az autónkból származnak, amikor azonban a hideg levegő látható teszi ezeket az anyagokat meglepődünk. A transzportfolyamatok tématerület jól használható a környezetben megjelenő áramlások leírására, hogy pl. előrejelezzük a gázok koncentrációját mind nyáron, mind télen vagy, hogy kibocsájtó, ill. szellőzőrendszereket tervezzünk autók vagy gyárak számára, olyan módon hogy a káros anyagok ne jelenhessenek meg toxikus koncentrációban a környezetben.



5. ábra: Egy ipari létesítmény atmoszférába történő kibocsájtása kéményen keresztül. A füstfáklya az átlagos szélmezőnek megfelelően mozog és terül szét a széliránnyal ellentétes irányban. (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán)

1.1.2. A koncentráció definiálása

Abból a célból, hogy értékeljük mennyi kémiai anyag van jelen egy folyadék bármelyik régiójában, szükséges hogy számszerűen jellemezzük az adott kémiai anyag intenzitását, ill. jelenlétét. Ezt az alapvető mennyiséget a transzportfolyamatoknál koncentrációnak nevezzük. Általános szóhasználat szerint a koncentráció fogalom egy adott anyag mennyiségének jellemzésére szolgál egy elegyen belül.

Matematikailag, a C koncentráció általában egy adott összetevő tömegének (M_i) az aránya a teljes elegy térfogatához (V) viszonyítva.

$$C = \frac{M_i}{V} \quad (1.1)$$

A koncentráció dimenziója ebben az esetben [ML^{-3}], a leggyakoribb mértékegységek szerint mg/l , kg/m^3 , stb.. Egy vagy kétdimenziós problémák esetében a koncentráció esetlegesen kifejezhető tömeg per egységnyi szegmens hossz [ML^{-1}] vagy tömeg per egységnyi felület [ML^{-2}] dimenzióban.

Egy másik lehetőség a tömegarány (χ) alkalmazása, ami az adott összetevő tömegének (M_i) viszonya az elegy összes tömegéhez (M) képest.

$$\chi = \frac{M_i}{M} \quad (1.2)$$

A tömegarány dimenzió nélküli, mégis gyakran fejezik ki eltérő nagyságrendű tömegre vonatkozó mértékegységekkel, úgy mint pl. mg/kg , parts per million (ppm) vagy parts per billion (ppb).

A kémikusok által elterjedten használt koncentráció definíció a moláris koncentráció θ . A moláris koncentrációt úgy definiáljuk, mint egy összetevő moljainak N_i a számát az összes térfogathoz (V) viszonyítva.

$$\theta = \frac{N_i}{V} \quad (1.3)$$

A moláris koncentráció dimenziója a molekulaszám/ L^3 , jellemző mértékegységei a mol/l és a mmol/l . Hogy a moláris koncentrációval dolgozni lehessen ismerni kell a vegyületet alkotó atomok súlyát a periódusos rendszer szerint pl. g/mol mértékegységben és tudni kell, hogy egy mól $6,022 \cdot 10^{23}$ db. molekulát jelent.

Annak a kiválasztása, hogy melyik koncentráció definíciót részesítjük előnyben általában a feladatnak megfelelően történik. Arra is figyelni kell azonban, hogy az alkalmazott koncentráció formula mértékegységei megfeleljenek annak az egyenletnek, amelyiket az adott összetevő transzportjának és jövőbeli sorsának az előrejelzésére használunk. Egy gyakori probléma ered abból a tényből, hogy a tömegarányt és a klasszikus koncentrációt gyakran használják egymással felelősen a vizes rendszerekben történő folyamatok esetében. Az előbbi dolog oka, hogy a tiszta víz sűrűsége $3,98 \text{ }^\circ\text{C}$ -on 1 g/cm^3 , ami a hagyományos koncentrációban mg/l -ben és a tömegarányal ppm-ben kifejezett értékeket azonossá teszi. Kifejezett figyelmet kellene azonban szentelni az előbbieknél, a tengervíz vagy az atmoszféra esetében, ahol a ppm és a mg/l nem azonosak. A konklúzió tehát a következő, minden esetben ellenőrizni kell a mértékegységeket. Ezáltal el is jutunk a következő alapvető kérdéshez a dimenzióvizsgálat módszeréhez.

1.1.3. Dimenzió analízis

Egy nagyon hasznos elemzési technika, amit a tananyagban többször is alkalmazni fogunk a dimenzió analízis. A dimenzió analízis koncepciója mögött az áll, hogy ha definiálni tudunk olyan paramétereket, amelyekről a vizsgált folyamat függ, akkor tudnunk kellene ezeket a paramétereket használni, általában dimenzió nélküli változók formájában, úgy hogy mindenféle skálán képesek legyünk leírni ezekkel a folyamatot (nemcsak azon a skálán, amit a laboratóriumban vagy a terepen mérünk).

A dimenzióanalízis a Buckingham-féle π elméleten alapszik (Fischer et al. 1979, Lajos 2008). Vegyünk egy folyamatot, amelyet n db. fizikai mennyiség ír le. Az összes fizikai mennyiség (változó) r db. különböző fizikai alapidimenziót tartalmaz (pl. hossz, idő, tömeg, hőmérséklet, stb.). A Buckingham-féle π elmélet azt állítja, hogy $n-r$ féle dimenziótlan csoport formálható ezekből a vezérlő fizikai mennyiségekből. Amikor ezeket a dimenziótlan csoportokat formáljuk, kizárólag az egyik dimenziótlan csoportban kell tartanunk a függő változónkat (amelyet előre akarunk jelezni) vagy másik oldalról megközelítve el kell kerülnünk, hogy a dimenziótlan csoportokban ismétlődjön a függő változónk (Fischer et al. 1979).

A leggyakoribb transzportfolyamatokban szereplő fizikai mennyiségek dimenziói általában a mértékegységrendszer három fizikai alapidimenziójára, a tömegre $[M]$, a hosszúságra $[L]$ és az időre $[T]$ vezethetők vissza. Az SI-ben leggyakrabban használt mértékegységeik sorrendben a tömeg esetében a kilogramm (kg), a hossz esetében a méter (m) és az időnél a szekundum (s). Kiindulásként tegyük fel, hogy valamennyi Q fizikai mennyiség dimenzió szempontjából előállítható a fizikai mennyiségek dimenzióinak (a következőkben a dimenziók helyett sokszor azok egyszerű mértékegységeit használjuk) hatványainak szorzataként, pl.

$$[Q] = M^\alpha \cdot L^\beta \cdot T^\gamma \quad (1.4)$$

Adott leggyakrabban $n > 3$ fizikai mennyiség: Q_1, Q_2, \dots, Q_n . A probléma megoldása során az $f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ függvényt akarjuk meghatározni. A Q fizikai mennyiségek dimenziói az előbbiek szerint a következőképpen állíthatók elő:

$$[Q_1] = M^{a_{11}} \cdot L^{a_{21}} \cdot T^{a_{31}} \quad (1.5)$$

$$[Q_2] = M^{a_{12}} \cdot L^{a_{22}} \cdot T^{a_{32}}$$

.....

$$[Q_n] = M^{a_{1n}} \cdot L^{a_{2n}} \cdot T^{a_{3n}}$$

Az a_{ij} kitevőket ismerjük, hiszen a jelenségben szerepet játszó fizikai mennyiségek dimenziói ismertek. (például ha az egyik Q_i a v sebesség $[L T^{-1}]$ abban az esetben: $a_{1i}=0$, $a_{2i}=1$ és $a_{3i}=-1$). A kérdés az, hogy létezik-e a vizsgálandó jelenségben szereplő fizikai mennyiségek hatványainak szorzataként előállítható dimenziótlan csoport, a következő alakban,

$$[\pi] = Q^{k_1} \cdot Q^{k_2} \cdot Q^{k_3} \quad (1.6)$$

és ha igen, hány ilyen egymástól független csoport van? A következőkben írjuk fel a 1.6 összefüggés dimenzióegyenletét, figyelembe véve a 1.4 kifejezéseket:

$$[\pi] = M^0 \cdot L^0 \cdot T^0 = (M^{a_{11}} \cdot L^{a_{21}} \cdot T^{a_{31}})^{k_1} \cdot (M^{a_{12}} \cdot L^{a_{22}} \cdot T^{a_{32}})^{k_2} \cdot (M^{a_{1n}} \cdot L^{a_{2n}} \cdot T^{a_{3n}})^{k_3} \quad (1.7)$$

Az 1.7 egyenlet segítségével az M , az L és a T hatványkitevőiből három egyenletből álló egyenletrendszer határozható meg:

$$a_{11} \cdot k_1 + a_{12} \cdot k_2 + \dots + a_{1n} \cdot k_n = 0 \quad (1.8)$$

$$a_{21} \cdot k_1 + a_{22} \cdot k_2 + \dots + a_{2n} \cdot k_n = 0$$

$$a_{31} \cdot k_1 + a_{32} \cdot k_2 + \dots + a_{3n} \cdot k_n = 0$$

A k_1, k_2, \dots, k_n darab ismeretlenre, mint látjuk egy három egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kapunk. Képezzünk az a_{ij} kitevőkből egy ún. dimenziómátrixot:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{matrix} \quad (1.9)$$

Az **1.9** dimenziómátrix rangja r , amennyiben létezik r -ed rendű, zérustól különböző aldeterminánsa, de nem létezik $r+1$ -ed rendű, nem zérus értékű aldeterminánsa (megjegyzendő, hogy az r általában a fizikai alapmennyiségek számával egyenlő, esetünkben $r=3$).

Amennyiben a dimenziómátrix rangja r , akkor az **1.8** egyenletrendszernek $n-r$ független megoldása van (ugyanis ennyi összetartozó k_1, k_2, \dots, k_n értékből álló csoport létezik). Az előbbi megállapítás azt jelenti, hogy $n-r$ dimenziótlan π csoport képezhető, tehát a kísérletileg vizsgálandó változók száma általában a fizikai alapmennyiségek számával, az előbbieket szerint például hárommal, csökkenthető (Lajos 2008).

A dimenzióanalízis alkalmazásának lépései összefoglalva:

- a jelenséget befolyásoló fizikai mennyiségek (Q_1, Q_2, \dots, Q_n változók) meghatározása;
- a jellemző fizikai alapmennyiségek (pl. tömeg, hossz, idő) meghatározása és a változók dimenziójának felírása ezek szerint;
- a dimenziómátrix felállítása és rangjának meghatározása;
- az egyenletrendszer megoldása ($n-r$ megoldás meghatározása);
- a $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-r}$ dimenziótlan csoport képzése.

Amint megkaptuk az $n-r$ dimenziótlan π csoportot, a Buckingham-féle π elmélet tovább is segít nekünk az egyes változók egymáshoz képesti viszonyának meghatározásában a következő egyenlet szerint

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-r}) \quad (1.10)$$

ahol, π_i az i -edik dimenziótlan csoport.

Amint látni fogjuk ez a módszer nagyon hatékonyan használható a komplex fizikai problémák esetében arra, hogy egyszerűbb mérnöki megoldásokat találjunk rájuk.

Alkalmazás a Reynolds szám példáján:

Példaként vegyük azt a problémát, amikor az egyik első áramlástani alapként az áramlás turbulensé válásának feltételeit vizsgáljuk. Ebben az esetben a függő változónk egy minőségi jellemző, hogy az áramlás lamináris vagy turbulens és ez a jellemző nem rendelkezik dimenzióval. Azok a független változóink, amelyek befolyásolják az áramlás lamináris vagy turbulens voltát a következők: a sebesség (u); az áramlást zavaró hatások, amelyek hossz-menti kiterjedésükkel (l) jellemezhetőek; és a folyadék belső tulajdonságai, úgy mint a sűrűség (ρ), a hőmérséklet ($h\ddot{o}m$) és a dinamikus viszkozitás (μ). Elsőként azt kell észrevennünk, hogy a ρ és a μ a hőmérséklet függvényei, így mindhárom változó nem kezelhető függetlenként. A leginkább elfogadott és alkalmazott megoldás az, hogy a dinamikus viszkozitás és a sűrűség hányadosaként képezzük az ún. kinematikus viszkozitást:

$$v = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.11)$$

Ez után az egyszerűsítés után három fizikai mennyiséget (változót u , l és v) kaptunk ($n=3$), amelyek két fizikai alapmennyiséggel, dimenzióval (az l hosszal [L] és a t idővel [T]) bírnak. Egyszerűbb esetekben, mint amilyen ez is, a következő lépés lehet közvetlenül a dimenziótlan csoportok formálása:

$$\pi_1 = f(u, l, v) \quad (1.12)$$

Tehát a fentiek szerint minden változónak (u [LT⁻¹], l [L], ν [L²T⁻¹]) keresünk egy kitevőt és minden dimenzióra külön egyenletet írunk fel, vagyis

$$\pi_1 = u^{k_1} \cdot l^{k_2} \cdot v^{k_3} \quad (1.13)$$

és azt akarjuk, hogy az egyes dimenziók kinullázódjanak, ami most az esetünkben két egyenletet jelent:

$$T \text{ (az idő esetében)} \quad 0 = -k_1 - k_3$$

$$L \text{ (a hossz esetében)} \quad 0 = k_1 + k_2 + 2k_3$$

A t -re vonatkozó egyenletből kapjuk, hogy $k_1 = -k_3$, és a hosszra vonatkozó egyenletből pedig kapjuk, hogy $k_2 = -k_3$, mivel a rendszer alulhatározott, szabadon vehetjük fel k_3 értékét. A legegyszerűbb feltételezés, ha $k_3 = -1$ -et választunk, ekkor a $k_1 = k_2 = 1$. Ezek alapján a π_1 -re a következőt kapjuk:

$$\pi_1 = \frac{v}{u \cdot l} \quad (1.14)$$

A kapott dimenzió nélküli kombináció éppen az inverze a jól ismert Reynolds-számnak (Re), így az előbbieket alapján a dimenzióanalízis segítségével sikerült meghatározni a folyadék turbulens vagy lamináris állapotának jellemzőjeként a Reynolds számot, ami a klasszikus hidraulika egyik leggyakrabban használt jellemzője:

$$Re = \frac{u \cdot l}{\nu} \quad (1.15)$$

Alkalmazás az elkeveredés jellemzésének példáján

A környezetben lejátszódó transzportfolyamatok esetében, gyakran akarjuk azt megtudni, hogy milyen sokáig tart amíg egy kémiai anyag megtesz egy bizonyos távolságot, illetve milyen sokáig tart egy adott koncentrációra (általában előírt határértékre) történő hígulása. Ezen probléma esetében három fizikai mennyiséggel (változóval) dolgozunk: l , az a távolság, amely fölött a kémiai anyag már kellőképpen felhígul, szétterjed; D , a környezetbeni szóródás mértéke, az ún. diffúziós ráta vagy tényező; és a t idő. Bár eddig még definíciószerűen nem vezettük be a D -t, mint a diffúzió jellemzésére szolgáló mennyiséget, annyit szükséges tudnunk, hogy a dimenziója [L²T⁻¹], valamint azt, hogy a nagy D értékek gyors elkeveredést, a kis D értékek pedig lassú környezetbeni szóródást jeleznek. Az előbbieket alapján három változónk van (l , D , t), amelyek két dimenzióval a hosszal [L] és az idővel [T] jellemezhetőek. Alkalmazva a Buckingham-féle π elméletet, a következő dimenziótlan számot kapjuk:

$$\pi_1 = \frac{D \cdot t}{l^2} \quad (1.16)$$

A későbbiekben látni fogjuk, hogy az így kapott jellemzőnket Peclet-számnak hívják. Ha azt akarjuk tudni, hogy a diffúzió hatására egy adott kémiai anyag milyen l távolságra jut t idő alatt, akkor átrendezve és l -re megoldva az előbbi dimenzió nélküli számra létrehozott egyenletünket, azt kapjuk, hogy: $l \propto \sqrt{D \cdot t}$.

Az előbbi egyenlet a környezeti áramlásban klasszikus skálázási törvénye, és ez az a képlet, amit szinte a leggyakrabban fogunk használni jelen tananyagban. Az arányossági tényező a különböző geometria szerint ugyan változni fog, de a skálázási törvény érvényessége mindig megmarad. Az előbbiekből eredően a $\sqrt{D \cdot t}$ tényezőt nevezzük a diffúzió hossz léptékének. Ezen bevezető rész alapozó információnak ismeretében most már készek vagyunk arra, hogy elkezdjük a diffúziós folyamatok mélyebb tárgyalását kellő matematikai alapossággal.

1.2. A diffúzió

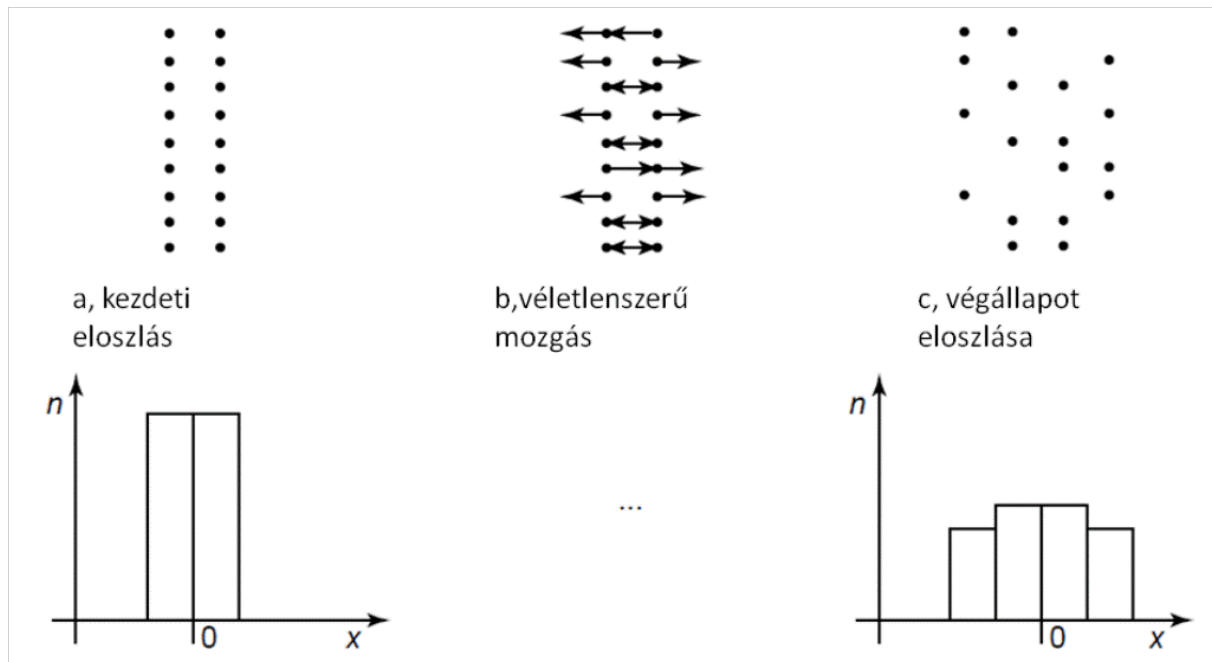
Amint láttuk a környezetbeni áramlások esetében az egyik alapvető transzportfolyamat a diffúzió. A diffúzió, annak véletlenszerű természetében különbözik az advekciónál, de ez a véletlen jelleg nem feltétlenül követ egy adott folyadék részecskét. A diffúzió egyik jól ismert példája a parfümillat szétterjedése egy üres szobában. Ha egy parfümös üveget kinyitnak és az illatosítószernek lehetősége van a levegőbe történi párolgásra, akkor hamarosan az egész szobában érezni lehet majd a parfüm illatát. Tapasztalatból tudjuk, hogy az illat erősebb lesz a kibocsátási forráshoz közel és gyengébb a távolabbi pontokban, de a parfüm molekuláinak ez a megoszlása valójában a véletlen bolyongás és a turbulens mozgás következménye. Ezek alapján a diffúzió két alapvető tulajdonsága van: az egyik, hogy véletlenszerű a természete, a másik pedig, hogy addig indukál transzportfolyamatot a magasabb koncentrációjú helyről az alacsonyabb koncentrációjú hely felé, amíg el nem érjük az egyensúlyi állapotnak megfelelő koncentráció-megoszlást.

1.2.1. A Fick-féle törvény

Vizsgáljuk meg alaposabban az előbbi parfüm szétterjedésével kapcsolatos példánkat, hogy a diffúzió következtében hogyan terjed a parfüm illata a magasabb koncentrációjú helyről az alacsonyabb koncentrációjú hely felé. Most már a célunk egy matematikai összefüggést levezetése, amely képes leírni ezt a szétterjedési folyamatot. A következőkben a Fischer 1979-es munkájában szereplő megközelítést fogjuk alapvetően követni.

Hogy a diffúziós fluxusra vonatkozó összefüggésünket levezessük, vegyünk példaként két sor molekulát párhuzamosan egymás mellett, ahol a két sor közötti középvonal az $x=0$, amint az a **6. ábra a** részében látszik. Ezen molekulák közül minden egyes véletlenszerűen mozog a hőmérsékletnek (Brown-féle hőmozgásnak) megfelelően. Didaktikai célokból, most csak az egyik irányú komponenst vegyük figyelembe a három dimenziós mozgásból: mozgás jobbra vagy balra az x -tengely mentén. A továbbiakban definiáljuk a részecskék tömegének balra történő mozgását M_l -el, a jobbra történő tömegátadódást M_r -el, és annak a valószínűségét (transzfer ráta per idő), hogy a részecskék az $x=0$ vonalon áthaladnak, jelöljük k -val, dimenzió szerint [T].

Egy adott δt idő múlva a részecskéknek átlagosan az egyik fele jobbra, a másik fele balra lép amint a **6. ábra** látható. Megtekintve a **6. ábra** alján található hisztogramokat, azt látjuk, hogy ezen véletlen mozgás következtében a maximum koncentráció csökken, míg a részecskéket befoglaló teljes térfogat növekszik (a részecskefelhő szétterjed).



6. ábra: A Fick-féle diffúziós modell illusztrálása a részecskék egy csoportjának egy dimenziós, ún. Brown-féle molekuláris mozgásának sematikus ábrázolásával. Az ábra felső része magukat a részecskéket mutatja, az alsó rész pedig a részecskék elhelyezkedésének megfelelő hisztogram, amely analóg a koncentrációval

Matematikai formában leírva, a részecskék átlagos fluxusa a bal oldali oszlopból a jobb oldaliba $k M_l$, míg a jobb oldali oszlopból a bal oldaliba $-k M_r$, ahol a mínusz előjel a kitüntetett irány meghatározására szolgál. Az előbbieket szerint a részecskék nettó fluxusa q_x a következőképpen számítható:

$$q_x = k \cdot (M_r - M_l) \quad (1.17)$$

Az előbbi egy dimenziós esetre az M_l és az M_r helyett használjunk koncentrációkat:

$$C_l = \frac{M_l}{\delta x \delta y \delta z} \quad (1.18)$$

$$C_r = \frac{M_r}{\delta x \delta y \delta z} \quad (1.19)$$

ahol, δx az x tengely menti hossz, δy a mélység és a δz a magassága minden egyes oszlopnak. Fizikailag δx az az átlagos lépéshossz az x tengely mentén, amit a molekulák δt idő alatt tesznek meg. Egy dimenziós esetben azt akarjuk, hogy q_x az x tengelyre merőleges irányban az egységnyi felületen keresztül áramló fluxust jelképezze, így a $\delta y \delta z$ szorzatot egységnyinek vesszük.

Következő lépésként nézzük, meg dC/dx véges differencia formában történő leírását.

$$\frac{dC}{dx} = \frac{C_r - C_l}{x_r - x_l} = \frac{M_r - M_l}{\delta x \delta y \delta z \cdot (x_r - x_l)} = \frac{M_r - M_l}{\delta x (x_r - x_l)} \quad (1.20)$$

Az előbbi 1.20 egyenlet a következő kifejezést adja ($M_l - M_r$)-re.

$$M_l - M_r = -\delta x \cdot (x_r - x_l) \frac{dC}{dx} \quad (1.21)$$

Figyelembe véve, hogy $\delta x = (x_r - x_l)$ és 1.21-et behelyettesítve 1.17-be a következő adódik.

$$q_x = -k \cdot (\delta x)^2 \cdot \frac{dc}{dx} \quad (1.22)$$

Az előbbi egyenlet (1.22) két ismeretlent tartalmaz k -t és δx -et. Fischer et al. (1979) szerint, mivel q nem függ egy önkényesen felvett δx -től, ezért feltételezhetjük, hogy a $k \cdot (\delta x)^2$ egy konstans. Ezt a adott helyzetre jellemző konstans a jövőben diffúziós tényezőnek hívjuk (D). D -t behelyettesítve az 1.22 egyenletbe az egy dimenziós diffúziós fluxus egyenletét kapjuk.

$$q_x = -D \cdot \frac{dc}{dx} \quad (1.23)$$

Fontos megjegyezni, hogy a diffúziós fluxus egy vektormennyiség, valamint azt, hogy mivel a koncentráció dimenziója $[ML^{-3}]$ ezért a diffúziós fluxus dimenziójára $[ML^{-2}T^{-1}]$. Hogy az összes anyagáramot (tömeg fluxust) \dot{m} számítsuk, $[MT^{-1}]$ mértékegységben, a diffúziós fluxust integrálnom kell egy felületen (általában egy mozgásirányra merőleges felületen). Egy dimenziós esetben az \dot{m} számítása a következő.

$$\dot{m} = A \cdot q_x \quad (1.24)$$

ahol, $A = \delta y \delta z$.

Az előbbi egy dimenziós esetet három dimenziósra kiterjesztve, felírhatjuk a diffúziós fluxus vektort egy pontra, különböző jelölésekkel is.

$$\bar{q} = -D \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial c}{\partial y}, \frac{\partial c}{\partial z} \right) = -D \cdot \nabla C = -D \cdot \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad (1.25)$$

Azokat a diffúziós folyamatok, amelyek az előbbi összefüggés szerint leírhatók Fick-féle diffúziós folyamatoknak hívjuk, és az 1.27-es egyenletet pedig Fick-törvénynek. Hogy megkapjunk egy adott felületen keresztülhaladó összes anyagáramot (\dot{m} , teljes tömeg fluxust), a \bar{q} -vektor normál komponensét integrálnunk kell a felületen.

$$\dot{m} = \iint_A \bar{q} \cdot \bar{n} dA \quad (1.26)$$

ahol, \bar{n} az A felülethez tartozó normál vektor.

A víz levegő határrétegen keresztüli diffúziós fluxus példája

Az időben átlagolt oxigén profil $C(z)$ egy tó felszínének lamináris alrétegében a következő egyenlettel határozható meg.

$$C(z) = C_{sat} - (C_{sat} - C_l) \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\delta \cdot \sqrt{2}}\right) \quad (1.27)$$

ahol, C_{sat} a vízben az aktuális körülmények közötti telítettségi oxigén koncentráció, és C_l az oxigén koncentrációja a tófenéken, δ a koncentrációra vonatkozó határréteg vastagsága, és z a vertikális irányú változást jelölő változó lefelé pozitívnak értelmezve.

A tóban jelenlévő turbulencia a felelős a δ , határréteg vastagság állandó szinten tartásáért. Keressük meg azt a kifejezést, amelynek alapján a tóba jutó összes tömeg fluxust (anyagáramot) meghatározhatjuk.

A Fick-féle törvény azt mondja nekünk, hogy az oxigén profilban jelentkező gradiens fogja nekünk indukálni az oxigén tóba irányuló diffúzióját. Mivel a koncentráció x és y irányban, csak a z irányban találunk diffúziós fluxust, amely a következő egyenlettel írható le.

$$q_z = -D \cdot \frac{dC}{dz} \quad (1.28)$$

A koncentráció gradiens deriváltja tehát szükséges a megoldáshoz, amely jelen esetben a következő.

$$\frac{dC}{dz} = -(C_{sat} - C_l) \cdot \frac{d}{dz} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{z}{\delta \cdot \sqrt{2}} \right) \right) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(C_{sat} - C_l)}{\delta \cdot \sqrt{2}} \cdot \exp - \left(\frac{z}{\delta \cdot \sqrt{2}} \right) \quad (1.29)$$

A tó felszínén a z értéke zérus, így a diffúziós fluxus a következőképpen számítható.

$$q_z = (C_{sat} - C_l) \cdot \frac{D \cdot \sqrt{2}}{\delta \cdot \sqrt{\pi}} \quad (1.30)$$

Az q_z dimenziója $[M/(L^2T)]$. Azért, hogy a teljes felszínen keresztüli anyagáramot megkapjuk, a diffúziós fluxust szoroznom kell a tó felületével, A_l -el. Ezek alapján a teljes tófelszínen keresztüli oxigénre vonatkozó diffúziós anyagáram megadható.

$$\dot{m} = (C_{sat} - C_l) \cdot \frac{D \cdot \sqrt{2}}{\delta \cdot \sqrt{\pi}} \quad (1.31)$$

A $C_l < C_{sat}$ esetére, ami általában jellemző, az anyagáram pozitív, tehát a tóba irányuló fluxust jelöl.

1.2.2. Diffúziós tényező

A diffúziós tényező előbbi definíciójából ($D = k \cdot (\delta x)^2$) látható, hogy a D dimenziója $[L^2T^{-1}]$. Mivel a Fick-féle törvényt a molekulák Brown-féle hőmozgására írtuk fel, D egy molekuláris diffúziós tényező, amit néha D_m -nek hívunk, hogy erre a speciális tulajdonságára utaljunk. A D tényező értéke, ebben az esetben a molekulák Brown féle hőmozgásának intenzitását (energiáját és mozgásra való szabadságát) hivatott kifejezni. Előbbiek miatt a D függ a fázis milyenségétől (cseppfolyós vagy légnemű), a hőmérséklettől és a molekula mérettől. Híg vizes oldatokra a D általános nagyságrendje $2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$; míg a levegőben diszpergált gázokra $2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Látható, hogy 4 nagyságrendi különbség a két fázis között (10^4).

Az **1. táblázat** néhány anyag alacsony sótartalmú (0,5 ppt (parts per trillion) megadja a rendszer billió (10^{12}) egységében az illető komponens mennyiségét ugyanazon egységben) vizes oldatának D -tényezőit ismerteti. A táblázatból látható, hogy egy adott hőmérsékleten a diffúziós tényező a molekula méretnek megfelelően (nagy molekula kisebb D) $\pm 10^1$ -szeres tartományban változik. A táblázat alapján az is nyilvánvaló, hogy a D értéke a hőmérsékletnek megfelelően is változik. Egy $10 \text{ }^\circ\text{C}$ -os hőmérsékletváltozás D esetében egy ± 2 -szeres változást indukál. Ezeket az előbbi megállapításokat úgy összegezhetjük gyakorlatias nézőpontból, hogy a gyorsabb és kevésbé akadályozott mozgás magasabb diffúziós tényezőt eredményez.

1. táblázat: Néhány jellemző vízben oldott anyag molekuláris diffúziós tényezői standard nyomáson, két hőmérsékleti érték mellett (b, 20 °C-on; c, 10 °C-on) forrás: <http://www.talknet.de/~alke.spreckelsen/roger/thermo/difcoef.html>

Oldott anyag	Kémiai szimbólum	Diffúziós tényező (b) (10 ⁻⁴ cm ² /s)	Diffúziós tényező (c) (10 ⁻⁴ cm ² /s)
hidrogén_ion	H ⁺	0.85	0.70
hidroxide_ion	OH ⁻	0.48	0.37
oxigén	O ₂	0.20	0.15
szén_dioxid	CO ₂	0.17	0.12
hidrogén_karbonát	HCO ₃ ⁻	0.11	0.08
karbonát	CO ₃ ²⁻	0.08	0.06
metán	CH ₄	0.16	0.12
ammónium	NH ₄ ⁺	0.18	0.14
ammónia	NH ₃	0.20	0.15
nitrát	NO ₃ ⁻	0.17	0.13
foszforsav	H ₃ PO ₄	0.08	0.06
dihidrogén_foszfát	H ₂ PO ₄ ⁻	0.08	0.06
hidrogén_foszfát	HPO ₄ ²⁻	0.07	0.05
foszfát	PO ₄ ³⁻	0.05	0.04
kén_hidrogén	H ₂ S	0.17	0.13
hidrogén_szulfid	HS ⁻	0.16	0.13
szulfát	SO ₄ ²⁻	0.10	0.07
szilika	H ₄ SiO ₄	0.10	0.07
kalcium_ion	Ca ²⁺	0.07	0.05
magnézium_ion	Mg ²⁺	0.06	0.05
vas_ion	Fe ²⁺	0.06	0.05
mangán_ion	Mn ²⁺	0.06	0.05

1.2.3. A diffúziós egyenlet általános alakja

Bár a Fick-féle törvény a diffúziós folyamatokra tekintettel ad ugyan egy kifejezést az anyagáramokra vonatkozóan, azonban még mindig szükségünk lenne egy olyan egyenletre, ami a szétdiffundáló tömeg idő szerinti koncentrációváltozásait adja meg a tér egy pontjában. Ebben a fejezetben azt fogjuk meglátni, hogy egy ilyen egyenlet hogyan vezethető le az anyagmegmaradás törvényéből.

A diffúziós egyenlet levezetéséhez vegyünk egy kontrol térfogatot (CV), a **7. ábra** szerint. Egy adott nyomjelző anyag tömegének (M) időbeli megváltozása ebben a kontrol térfogatban (CV) az anyagmegmaradás törvénye szerint a következőképpen írható le.

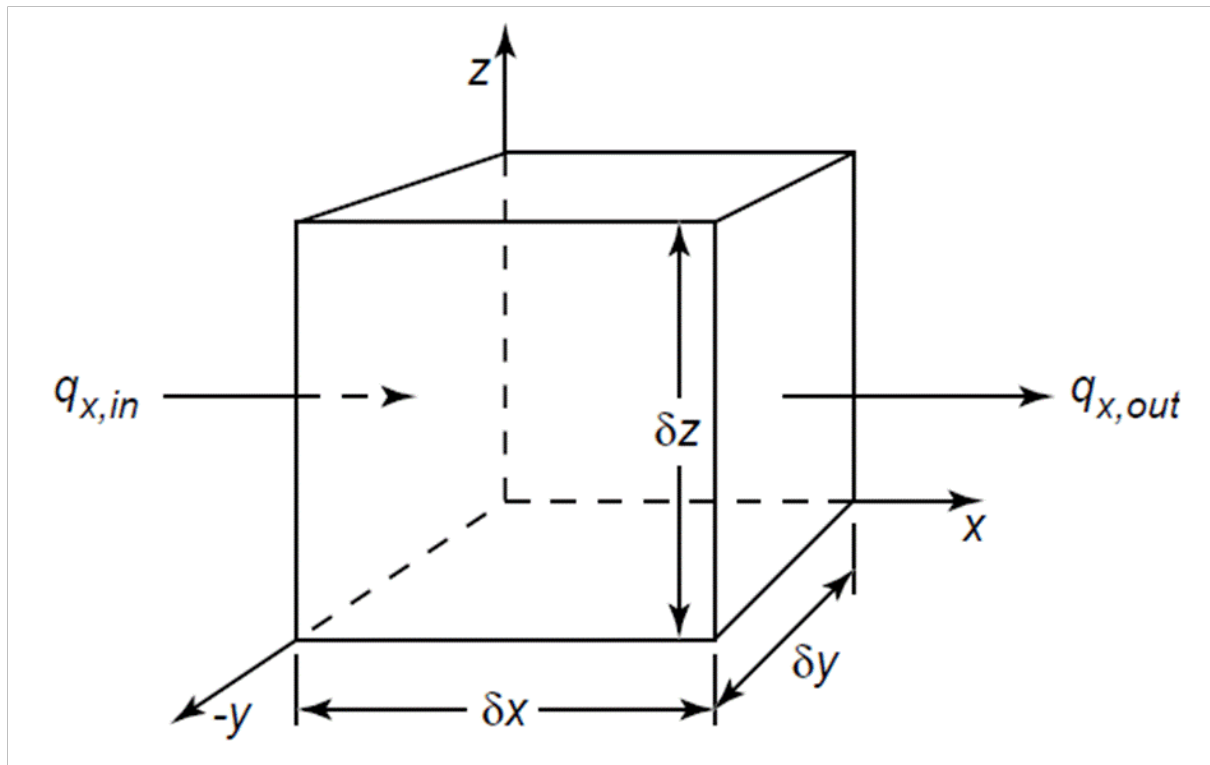
$$\frac{\partial M}{\partial t} = \sum \dot{m}_{in} - \sum \dot{m}_{out} \quad (1.32)$$

Abból a célból, hogy diffúziós fluxust számoljunk a kontrol térfogatba be (in) és onnan ki (out) használjuk a Fick-féle törvényt, amely az x -irányban felírva a következőt adja.

$$q_{x,in} = -D \cdot \frac{\partial c}{\partial x} in \quad (1.33)$$

$$q_{x,out} = -D \cdot \frac{\partial c}{\partial x} out \quad (1.34)$$

Ahol az in és out a kontrol térfogatba belépő és kilépő felszíneken vannak.



7. ábra: A diffúziós egyenlet levezetésénél használt differenciális kontrol térfogat (forrás Sokolofsky-Jirka 2005)

Hogy az összes anyagáramot (\dot{m}) megkapjuk a diffúziós fluxust (q_x) meg kell szoroznunk a kontrol térfogat (CV) megfelelő felületével ($A = \delta y \delta z$). Az előbbiek szerint, hogy a következő egyenlet szerint kaphatjuk meg a nettó anyagáramot (anyagáram változást) az x -irányban, amely tulajdonképpen az 1.32 egyenlet jobb oldalát jelenti.

$$\delta \dot{m}_x = -D \cdot \delta y \delta z \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial x} \text{in} - \frac{\partial C}{\partial x} \text{out} \right) \quad (1.35)$$

Hogy folytathassuk, egy módszert kell találnunk aminek a segítségével kifejezhetjük a $\partial C / \partial x$ tagot a kilépő, *out* felületen. Ehhez a feladathoz használjuk a lineáris Taylor sorba fejtést, mint egy fontos lineáris approximációs függvényt. A Taylor sorba fejtés általános formája a következő:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x_{x_0}} \cdot \delta x + \text{HOTs} \quad (1.36)$$

ahol a *HOTs* feloldása *higher order terms*, magyarul magasabb-rendű tagok. A $\partial C / \partial x$ -et helyettesítve az $f(x)$ helyére a Taylor sorban adódik,

$$\frac{\partial C}{\partial x} \text{out} = \frac{\partial C}{\partial x} \text{in} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial x} \text{in} \right) \cdot \delta x + \text{HOTs} \quad (1.37)$$

A Taylor sorba fejtés lineáris változatánál elhanyagoljuk a *HOTs*-t. Az előbbi 1.37 egyenletet behelyettesítve a nettó anyagáramra vonatkozó 1.35-as egyenletbe és a helyettesítés után is megmaradó *in* kifejezést elhagyva a következőt kapjuk:

$$\delta \dot{m}_x = D \cdot \delta y \delta z \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \cdot \delta x \quad (1.38)$$

Az y és z irányokban a kontrol térfogaton keresztüláramló nettó fluxusokat hasonlóképpen számítjuk:

$$\delta \dot{m}_y = D \cdot \delta x \delta z \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \cdot \delta y \quad (1.39)$$

$$\delta \dot{m}_z = D \cdot \delta x \delta y \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \cdot \delta z \quad (1.40)$$

Mielőtt a kapott eredményeket a fejezet elején lévő **1.32**-es egyenletbe behelyettesítjük, szintén át kell konvertálnunk az M tömeget koncentrációba, felhasználva, hogy $M=C \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$. A koncentrációt (C) és a nettó anyagáramokat (\dot{m}) behelyettesítve **1.32**-be a három dimenziós diffúziós egyenletet kapjuk (amely különböző jelölésrendszereket is felhasználva) a következőképpen néz ki.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \cdot \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) = D \cdot \nabla^2 C = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} \quad (1.41)$$

Az egyenlet a környezetben lejátszódó transzportfolyamatok egyik alapegyenlete.

1.2.4. Az egy dimenziós diffúziós egyenlet

Egy dimenziós esetben az y és z irányú koncentráció gradiens zérus és megkapjuk az egy-dimenziós diffúziós egyenletet:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1.42)$$

Aljunk meg egy pillanatra az **1.42**-es egyenletnél, hogy rámutassunk néhány kulcsfontosságú dologra.

- Először is az **1.42** egyenlet az idő szerint elsőrendű differenciál egyenlet, tehát a megoldáshoz el kell látnunk egy kiindulási feltétellel. A megoldása nempermanens, másképpen instacioner, amely szavak azt jelentik, hogy időben változó. Azért, hogy a permanens vagy más néven stacioner megoldást kapjunk az **1.42**-es egyenlet bal oldalán a $\partial C/\partial x$ tagot egyenlővé kell tenni zérussal, és ebben az esetben a megoldás nem is igényel kiindulási feltételt. A stacioner megoldása az **1.42**-nek maga a jól ismert *Laplace-egyenlet*.
- Másodszor az **1.42** térben másodrendű, így két határfeltételt igényel, és a kapott megoldás a térben változó.
- Harmadrészt az **1.42**-es egyenlet formája teljesen megegyezik a hővezetési egyenlettel, ahol a D diffúziós tényezőt a κ hővezetési tényező helyettesíti. Ez az észrevétel jól egyezik avval az általános benyomással, hogy a hő a meleg helyekről a hideg helyek felé vezetődik tovább (diffundál), éppúgy, mint ahogy a koncentráció diffúziósan szétterjed a magasabb koncentrációjú hely felől az alacsonyabb koncentrációjú helyek felé. Ez az analógia azért is fontos, mert a hővezetés egyenletének számos megoldása már ismert (Sokolofsky-Jirka 2005). Az előbbi analógia egyébként a felszín alatti szivárgási folyamatokkal is fennáll, ahol a D helyére a k , szivárgási tényező kerül, a C koncentrációt pedig a h hidraulikus nyomás helyettesíti. A felszín alatti közegben lejátszódó transzportfolyamatok esetére, azok környezetbeni szennyeződések tekintetében betöltött fontossága miatt térjünk ki egy kicsit részletesebben.

Telített közegben a permanens vízmozgást az alábbi egyenlet írja le:

$$0 = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad (1.43)$$

Ez tehát a matematikában jól ismert Laplace-egyenlet, melynek megoldása mutatja meg a h piezometrikus szint (hidraulikus nyomásszint) nagyságát bárhol egy felszínalatti közeg háromdimenziós áramlási terében.

Amennyiben a felszín alatti közeg anizotróp (fizikai jellemzői a tér kitüntetett irányában eltérőek), akkor a szivárgási tényező vektor k_x , k_y és k_z komponensei nem egyenlőek és ekkor a szivárgás alapegyenlete anizotróp, porózus, telített közeg esetére permanens állapotot feltételezve:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) \quad (1.44)$$

ahol k_x , k_y és k_z a szivárgási-tényező tenzor főátlójának elemei.

A nem-permanens szivárgás telített földtani közegre érvényes alapegyenlete:

$$S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) \quad (1.45)$$

ahol, S_s a fajlagos tárolási tényező [L^{-1}]. A fajlagos tárolási tényező az egységnyi nyomásszint-változás hatására a közet kompressziója (α) miatt, illetve a pórustérben (n) tárolt víz tágulása (kombresszibilitási tényezője β) miatt felszabaduló vízmennyiség összege ($S_s = \rho \cdot g \cdot (\alpha + n \cdot \beta)$), ahol g a gravitációs gyorsulás). Példaképpen a tárolási tényező egy zárttükrű vízáradóban megmutatja, hogy mekkora vízmennyiség szabadul fel egy egységnyi felületű részén a vízáradónak, miközben a nyomásszint egységnyit csökken. A tárolási tényező dimenzió nélküli szám, nagysága a 0,005-0,00005 intervallumban szokott változni.

Amennyiben a közeg izotróp és homogén, akkor a matematikában *diffúzió-egyenletként* ismert formulát kapjuk vissza:

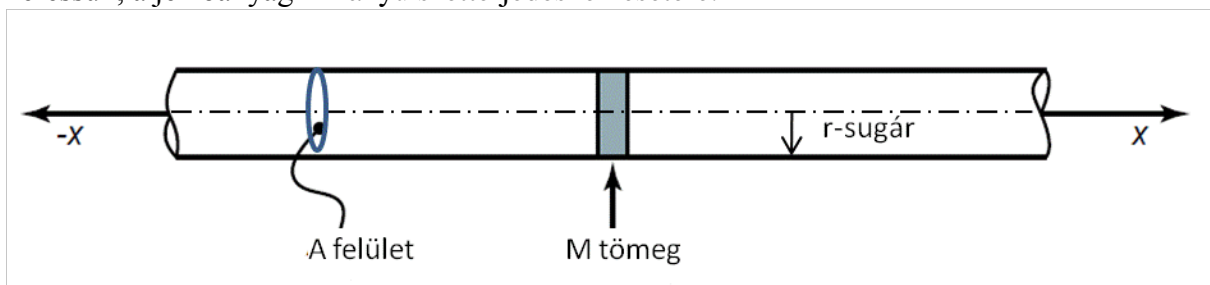
$$\frac{S_s}{k} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad (1.46)$$

A felszín alatti földtani közeg áramlási terében tehát a h hidraulikus nyomásszintek változása a térben és az időben a k szivárgási tényező, α közeg összenyomhatóság és n hézagterefogattól, mint közegjellemzőtől, és a folyadék β összenyomhatóságától és ρ sűrűségétől függ (Kovács 2004).

1.3. Az egy dimenziós diffúziós egyenlet hasonlósági alapon történő megoldása

Mivel az 1.41 egyenletnek, mint láttuk kiemelt fontossága van a környezetben lejátszódó transzportfolyamatok terén, a továbbiakban részletesen taglaljuk az összefüggés egy dimenziós esetének egyik megoldási módját. Az 1.41 egyenlet sokféle megoldási lehetősége közül a Fischer et al. (1979) által leírt módszert fogjuk követni. A megoldás az ún. hasonlósági analógiát követjük, abból a célból, hogy demonstrálhassuk az anyagban korábban megismert dimenzió analízist (1.1.3).

Vegyünk egy az egy dimenziós probléma érzékeltetése céljából egy keskeny, végtelen csövet (r sugárral) a 8. ábra szerint. M tömegű jelzőanyagot injektálunk a cső $A=r^2\pi$ keresztmetszetébe egyenletes eloszlásban az $x=0$ pontban a $t=0$ időpillanatban. A jelzőanyag kiindulási időpillanatban vett szélessége infinitezimálisan (végtelenül) kicsi. A megoldást az időbeli változásokra tekintettel, a molekuláris diffúzió folyamatát egyedül figyelembe véve keressük, a jelzőanyag x -irányú szétterjedésnek esetére.



8. ábra: Az egy dimenziós tiszta diffúzió esetének ábrázolása egy végtelen csőben (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán).

Mivel egy egy dimenziós ($\partial C/\partial y=0$ és $\partial C/\partial z=0$) instacionárius (nempermanens) diffúziós problémánk van, a vezérlő egyenletünk az 1.42, aminek a megoldásához szükségünk van két határ és egy kiindulási feltételre.

Határfeltételként tegyük fel, hogy a koncentráció értéke a $\pm\infty$ -ben zérus értéken maradnak.

$$\text{határfeltételek: } C(\pm\infty, t) = 0 \quad (1.47)$$

Igaz ez a feltétel, hiszen nem lehetséges, hogy bármelyik nyomjelző molekula elérje majd a végtelent (definíció szerint ugyanis a végtelen nem elérhető).

A kiindulási feltétel az, hogy a nyomjelző anyagot a keresztmetszvényben egységesen elosztatva juttatják be egy végtelen kicsiny x -irányban értelmezett szélességben. Azért, hogy le tudjunk írni egy ilyen kiindulási feltételt, segítségésképpen kell hívnunk az ún. Dirac-delta függvényt ($\delta(x)$). A kiindulási feltételünk így a következő lesz.

$$\text{kiindulási feltétel: } C(x, 0) = (M/A) \cdot \delta(x) \quad (1.48)$$

ahol, a $\delta(x)$ mindenhol zérus értékű, kivéve az $x=0$ pontban, ahol végtelen nagyságú, de úgy hogy az integrálja ebben a pontban $-\infty$ -től $+\infty$ -ig 1-et ad. Előbbiek alapján az összes bejuttatott anyagmennyiség a következő egyenlettel adható meg:

$$M = \int_V C(x, t) dV \quad (1.49)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^r \left(\frac{M}{A}\right) \cdot \delta(x) \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot dx \quad (1.50)$$

$$= M \cdot QED \quad (1.51)$$

A továbbiakban, hogy használhassuk a dimenzió analízist meg kell vizsgálnunk minden megoldást befolyásoló paramétert. A **2. táblázat** összegzi azokat a függő és független változókat dimenzióikkal, melyek a megoldásra váró egy dimenziós, diffúziós problémánknál megjelennek.

2. táblázat: Az egy dimenziós csőben lejátszódó diffúziót befolyásoló változók és azok dimenziói

	Változó	Dimenzió
Függő változó	C	ML^{-3}
Független változók	M/A	ML^{-2}
	D	L^2T^{-1}
	x	L
	t	T

A **2. táblázat** szerint 5 fizikai mennyiségünk ($n=5$ változónk) van és 3 dimenziónk ($r=3$ fizikai alapegységünk), ezek alapján a következő két dimenziótlan csoportot képezhetjük.

$$\pi_1 = \frac{C}{M/(A \cdot \sqrt{D \cdot t})} \quad (1.52)$$

$$\pi_2 = \frac{x}{\sqrt{D \cdot t}} \quad (1.53)$$

A dimenzió analízis segítségével a $\pi_1=f(\pi_2)$ függvényt kell meghatároznunk, amely alapján a C -t kifejezhetjük.

$$C = \frac{M}{A \cdot \sqrt{D \cdot t}} \cdot f\left(\frac{x}{\sqrt{D \cdot t}}\right) \quad (1.54)$$

ahol, az f egy még ismeretlen függvény π_2 argumentummal. Az **1.54** egyenletet hasonlósági megoldásnak hívják, mert C -nek hasonló alakja van x -ben minden t időre (ld. később „A koncentráció profil alakja és az önhasonlóság” alfejezetet). A következő feladatunk, hogy meghatározzuk az f függvény alakját. Mielőtt megtalálnánk formálisan a megoldást, szaladjunk előre egy kicsit és hasonlítsuk össze az **1.54**-es egyenletet az **1.71**-es egyenlet aktuális megoldásával. Az összehasonlítást megtéve láthatjuk, hogy a dimenzióanalízis segítségével milyen messzire juthatunk el egy fizikai probléma megoldásának esetében.

Az f függvényt alapvetően kétféle úton találhatjuk meg.

- Az első esetben kísérleteket kell végrehajtanunk és a kapott π_1 és π_2 adatokat koordináta párként használva a leginkább simuló görbe illesztésével juthatunk el az f függvényhez.
- A második lehetőség, hogy az **1.54**-es egyenletet egy differenciálegyenlet megoldásaként használjuk fel és az f függvényt analitikus megoldás alapján határozzuk meg.

Ezt az utóbbi utat fogjuk követni. A hasonlósági megoldás erőssége abban rejlik, hogy a parciális differenciál egyenletet (PDE) egy ordináris differenciál egyenletté (ODE) alakítja át, ami tulajdonképpen mindegyik parciális differenciálegyenlet megoldási módszer célja.

A hasonlósági megoldás (1.54) valójában csak egy koordináta transzformáció. Meg kell hívnunk egy új hasonlósági változót az $\eta = x/\sqrt{D \cdot t}$ -t. Ahhoz, hogy az **1.54**-et be tudjuk helyettesíteni a diffúziós egyenletbe, szükségünk van még az η (éta) két deriváltjára.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\eta}{2t} \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{D \cdot t}} \quad (1.56)$$

Elsőként használjuk a lánc szabályt, a $\partial C/\partial t$ számításához.

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{M}{A\sqrt{D\cdot t}} \cdot f(\eta) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{M}{A\sqrt{D\cdot t}} \right] \cdot f(\eta) + \frac{M}{A\sqrt{D\cdot t}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= \frac{M}{A\sqrt{D\cdot t}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{t} \cdot f(\eta) + \frac{M}{A\sqrt{D\cdot t}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \left(-\frac{\eta}{2t} \right) \\ &= -\frac{M}{2\cdot A\cdot t\cdot \sqrt{D\cdot t}} \cdot \left(f + \eta \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \quad (1.57)\end{aligned}$$

Ugyancsak a lánc szabályt használjuk, a $\partial^2 C/\partial x^2$ számításához.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M}{A\sqrt{D\cdot t}} \cdot f(\eta) \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{M}{A\sqrt{D\cdot t}} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} \right] \\ &= \frac{M}{A\cdot D\cdot t\cdot \sqrt{D\cdot t}} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \quad (1.58)\end{aligned}$$

Az utóbbi két megoldást, vagyis az **1.57** és **1.58** egyenleteket a diffúziós egyenletbe behelyettesítve, egy ordináris differenciálegyenletet kapunk η -ra.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} \cdot \left(f + \eta \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (1.59)$$

Hogy meg tudjuk oldani az **1.59** egyenletet, a határfeltételeket és a kiindulási feltételt át kell alakítanunk az f függvénynek megfelelően.

Az η -t behelyettesítve a határfeltételekbe a következő adódik.

új határfeltételek: $C(\pm\infty, t) = 0$

$$\begin{aligned}\frac{M}{A\sqrt{D\cdot t}} \cdot f\left(\frac{x}{\sqrt{D\cdot t}}\right)_{(x=\pm\infty)} &= 0 \\ f(\pm\infty) &= 0 \quad (1.60)\end{aligned}$$

A kiindulási feltételekkel hasonlóképpen eljárva, η behelyettesítésével a következőhöz jutunk.

új kiindulási feltétel: $C(x, 0) = \frac{M}{A} \cdot \delta(x)$

$$\frac{M}{A\sqrt{D\cdot t}} \cdot f\left(\frac{x}{\sqrt{D\cdot t}}\right)_{(t=0)} = \frac{M}{A} \cdot \delta(x) \quad (1.61)$$

átrendezve a fenti egyenletet

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{D\cdot t}}\right)_{(t=0)} = \sqrt{D\cdot t} \cdot \delta(x)_{(t=0)} \quad (1.62)$$

Az egyenlet bal oldala $+\infty$ -t ad ha $x>0$ és $-\infty$ -t ha $x<0$. A jobb oldal mindig zérus, hiszen a $\sqrt{D\cdot t}$ tag mindig zérust ad $t=0$ -ra. Az előbbieken szerint a kiindulási feltétel a következőre redukálódik.

$$f(\pm\infty) = 0 \quad (1.63)$$

Ezek szerint az eredeti parciális differenciál egyenletünk három feltétele (két határ és egy kiindulási feltétel) az f -re felírt ordináris differenciál egyenlet esetében két határfeltételre redukálódik **1.60** és **1.63** szerint.

Egy másik kényszerként lépbe az M tömeg fix értéken tartása, a tömegmegmaradási egyenlet szerint, amelyet az **1.49** egyenlet ír le. A $dx = d\eta \cdot \sqrt{D \cdot t}$ tagot behelyettesítve az **1.49** egyenletbe egyszerűsítések után kapjuk.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) d\eta = 1 \quad (1.64)$$

Az **1.59** egyenlet megoldása igényel egy kapcsolt integrálást. Először át kell rendeznünk az egyenletet a következő azonosságot felhasználva.

$$\frac{d(f \cdot \eta)}{d\eta} = f + \eta \cdot \frac{df}{d\eta} \quad (1.65)$$

Az előbbi **1.59**-re felhasználva adódik.

$$\frac{d}{d\eta} \left[\frac{df}{d\eta} + \frac{1}{2} \cdot f \cdot \eta \right] = 0 \quad (1.66)$$

Az előbbi kifejezést (**1.66**) egyszer integrálva kapjuk:

$$\frac{df}{d\eta} + \frac{1}{2} \cdot f \cdot \eta = C_0 \quad (1.67)$$

Látható, hogy $C_0=0$ -át szükséges választani a határfeltételek kielégítéséhez. Válasszunk tehát $C_0=0$ -át és értékelve a megoldást, azt kapjuk, hogy az egyenletünk így megfelel a határfeltételeknek (ld. a részletesebb levelezetés Sokolofsky-Jirka 2005 Appendix A) vagyis

$$f(\pm\infty) = 0.$$

$C_0=0$ esetre homogén ordináris differenciálegyenlethez jutunk, amelynek a megoldása könnyen megtalálható. Az **1.67** egyenlet bal oldalának második tagját átrendezve kapjuk.

$$\frac{df}{d\eta} = -\frac{1}{2} \cdot f \cdot \eta \quad (1.68)$$

Mivel szeparálható differenciálegyenletről van szó, az összetartozó f és η tagokat azonos oldalra rendezve adódik.

$$\frac{df}{f} = -\frac{1}{2} \cdot \eta \cdot d\eta \quad (1.69)$$

Mindkét oldalt integrálva kapjuk.

$$\ln(f) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\eta^2}{2} + \ln(C_1) \quad (1.70)$$

Átrendezve és mindkét oldalt exponenciális hatványra emelve adódik.

$$f = C_1 \cdot \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) \quad (1.71)$$

Ahhoz, hogy C_1 -et megtaláljuk, használnunk kell az **1.64**-ben megadott feltételünket. Ez azért szükséges, mivel bevezetünk egy M paramétert és azt szeretnénk, ha a koncentráció görbe alatti integrál visszaadná nekünk az összes bejuttatott tömegünket. Ezt a segédfeltételt (**1.64**-et, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) d\eta = 1$) felhasználva f -re a következő adódik.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C_1 \cdot \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) d\eta = 1 \quad (1.72)$$

Az integrál megoldásához, integrál táblázatban található azonosságot kellene felhasználnunk, ezért még egy transzformációt kell eszközölnünk a változóknál, hogy az $\frac{1}{4}$ -et eltávolítsuk az exponenciális függvény kitevőjéből. Így bevezetjük a ζ (zéta) változót, amely η -val a következőképpen függ össze.

$$\zeta^2 = \frac{1}{2^2} \cdot \eta^2 \quad (1.73)$$

$$2 \cdot d\zeta = d\eta \quad (1.74)$$

Az **1.72** egyenletbe behelyettesítve az előző koordináta-transzformációt és C_1 -re megoldva az egyenletet kapjuk.

$$C_1 = \frac{1}{2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\zeta^2) d\zeta} \quad (1.75)$$

Az integrál táblázatban a megfelelő azonosságot megkeresve, $C_1 = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi}}$. Ezt az azonosságot **1.71**-ba visszahelyettesítve kapjuk.

$$f(\eta) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) \quad (1.76)$$

Az f függvényt a korábban kapott hasonlósági megoldásba (**1.54**) helyettesítve és az $\eta = x/\sqrt{D \cdot t}$ transzformációt alkalmazva a C -koncentrációra adódik.

$$C(x, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \quad (1.77)$$

Az előbbi összefüggés a környezetben lejátszódó transzportfolyamatok egyik klasszikus egyenlete, amelyet ezen tananyagban számos helyen fogunk használni. Az egyenlet általánosítása három dimenzióra Fischer et al. (1979) szerint a következő.

$$C(x, t) = \frac{M}{4 \cdot \pi \cdot t \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D_x \cdot D_y \cdot D_z \cdot t}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4 \cdot D_x \cdot t} - \frac{y^2}{4 \cdot D_y \cdot t} - \frac{z^2}{4 \cdot D_z \cdot t}\right) \quad (1.78)$$

A megoldáshoz a változók szeparálásának módszerével jutottak.

1.3.1. A maximum koncentráció meghatározása

Az **1.78**-as egyenlettel megadott pillanatszerű és pontszerű szennyezés esetét vizsgálva keressük meg a maximális koncentráció helyét.

A klasszikus megközelítés egy függvény maximumának megkereséséhez, hogy a derivált függvény zérushelyeit keressük. Sok koncentráció eloszlás esetében egyszerűbb azonban, ha alaposan szemrevételezzük az egyenlet funkcionális formáját. A pillanatszerű-pontszerű szennyezés formája a következő.

$$C(x, t) = C_1(t) \cdot \exp(-|f(x, t)|) \quad (1.79)$$

A C_1 ún. amplifikációs (erősítő) faktor független a helytől. Az exponenciális tagnak negatív kitevője van, ami azt jelenti, hogy a maximum akkor jelentkezik, ha az exponenciális kitevőben zérus van. Innen a maximum koncentráció helye adódik.

$$C_{max}(t) = C_1(t) \quad (1.80)$$

Az **1.78**-as egyenletre alkalmazva a kapott eredményt.

$$C_{max}(t) = \frac{M}{4 \cdot \pi \cdot t \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D_x \cdot D_y \cdot D_z \cdot t}} \quad (1.81)$$

A maximális koncentráció, abban a pontban jelentkezik ahol az exponenciális tag zérus, ez pedig az előbbi esetben (**1.81**) a következő: $x(C_{max}) = (0, 0, 0)$.

Hasonló analízist alkalmazhatunk más koncentráció megoszlások esetére is. Például vegyük figyelembe, kicsit előrevetítve a hiba függvény (error function) koncentráció megoszlást.

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \cdot \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4 \cdot D \cdot t}} \right) \right) \quad (1.82)$$

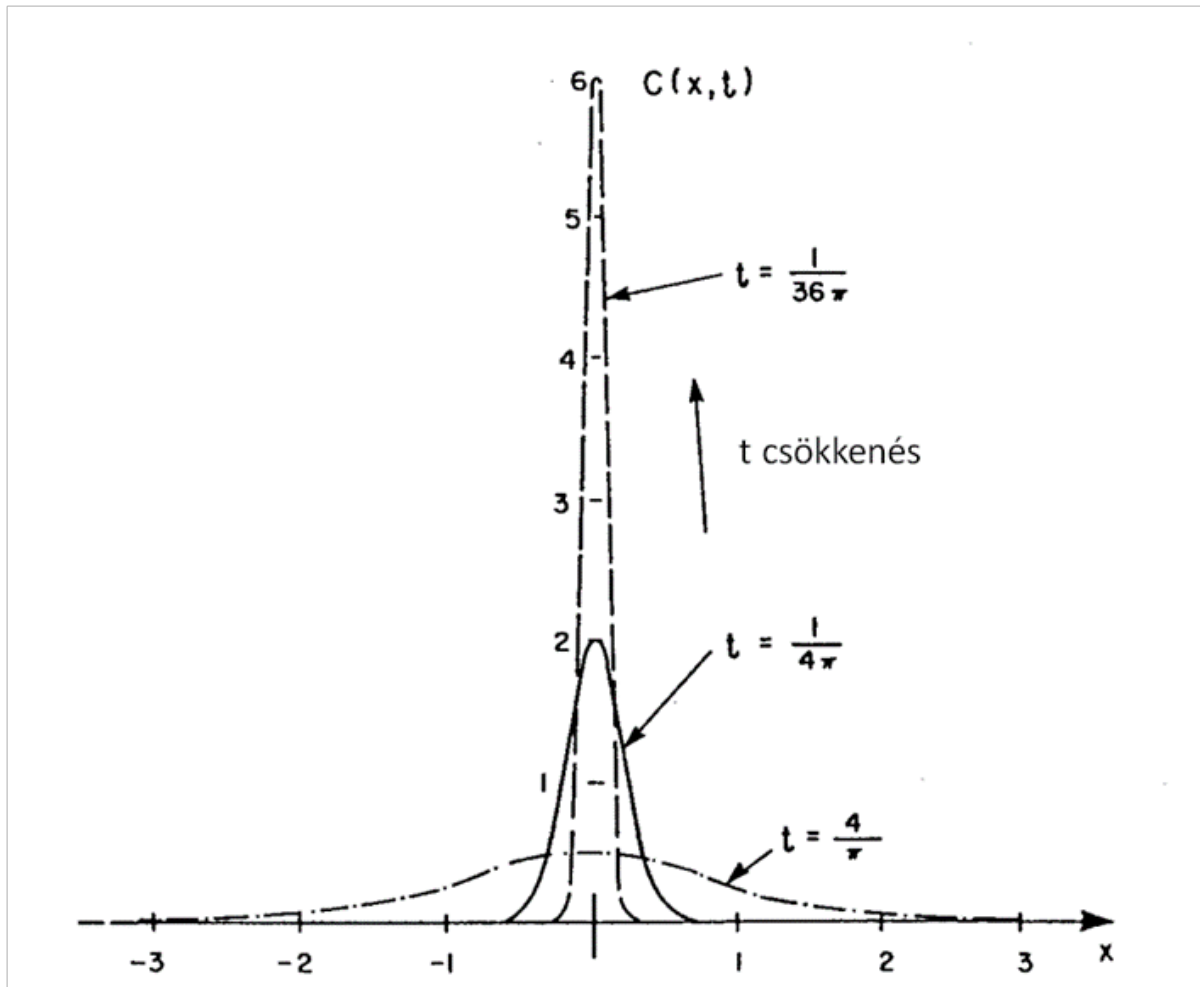
A hiba függvény a $[-1, 1]$ tartományban változtatja értékét és az argumentuma (erf zárójeles tag) $[-\infty, \infty]$ tartományban értelmezett. A maximális koncentráció akkor jelentkezik, mikor az error function értéke -1 ($\operatorname{erfc}(\cdot) = -1$), a maximális koncentráció ebben a helyzetben a következő:

$$C_{max}(t) = C_0 \quad (1.83)$$

Az előbbieket alapján tehát a C_{max} akkor jelentkezik, ha a hibafüggvény argumentuma $-\infty$. $t=0$ időpontban a maximális koncentráció minden $x>0$ pontban jelentkezik, de $t>0$ esetében a maximális koncentráció már csak az $x=-\infty$ pontban jelenik meg.

1.3.2. A hasonlósági megoldás interpretációja

Az **1.77** egyenlet ábrázolását egy $M=1$ és $D=1/4$ esetére a **9. ábra** mutatja, amelyen jól látható, hogy a kezdeti elméletileg egy pontban tömörülő anyag hogyan oszlik el a térben az idő függvényében, ill. hogy megfordítva a folyamatokat a Gauss-féle eloszlás milyen gyorsan redukálódik a Dirac-delta függvényre.



9. ábra: A Gauss-féle normális eloszlás redukálódása a kezdetben egy pontban tömörülő jelzőanyag tömeg „spike” irányába ($M=1$ és $D=1/4$ értékek mellett). (Fischer et al. 1979 nyomán)

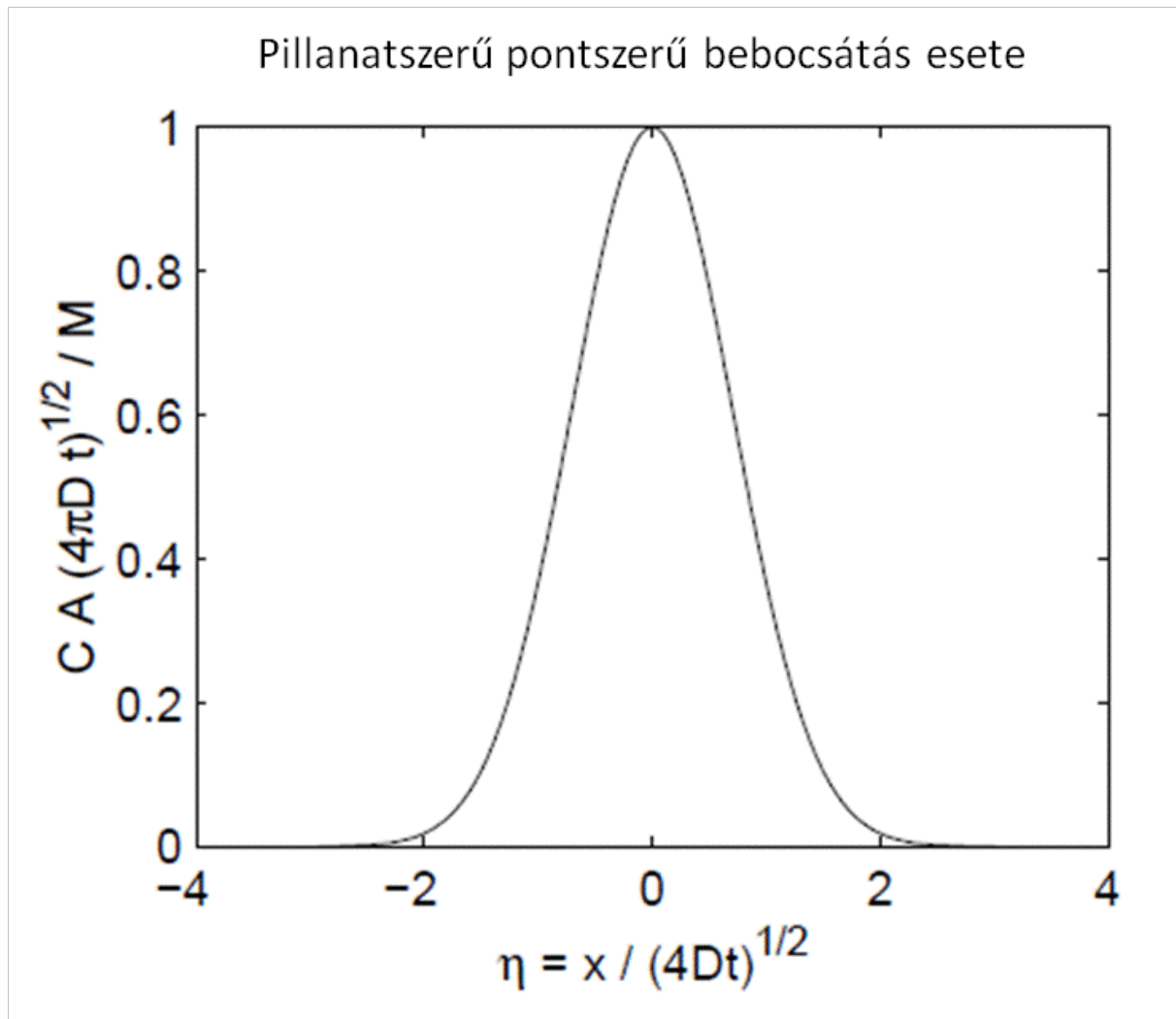
A

10. ábra az egy dimenziós megoldást mutatja (az 1.78-es egyenlet) dimenziómentés térben ábrázolva. Összehasonlítva az 1.77-egyenletet a Gauss-féle normális eloszlás sűrűségfüggvényével kijelenthetjük, hogy az egyenlet ábrázolásával a Gauss féle haraggörbét kapjuk σ -szórással, ahol a szórásnégyzet a következő.

$$\sigma^2 = 2 \cdot D \cdot t \quad (1.84)$$

Az ön hasonlóság koncepciója az előbbieken alapján most szintén evidensé válik: a koncentráció profil alakja mindig Gauss-i. Dimenziómentes térben ábrázolva az összes profil egy egyszerű alap profilra alakul vissza, így a profilok minden $t > 0$ időre a

10. ábra szerinti alakot követik.



10. ábra: A pillanatszerű, pontszerű forrás egy dimenziós diffúziójának önazonos megoldása végtelen végtelen domainban dimenziómentes formában ábrázolva. (Socolofky-Jirka 2005 nyomán)

A Gauss-féle normális eloszlást arra is tudjuk használni, hogy előrejelezzük a jelzőanyag (vagy szennyezőanyag) mennyiségét egy bizonyos régióban. A

10. ábra tanulmányozva szembetűnik, hogy a jelzőanyag zöme a horizontális tengelyen -2 és $+2$ értékek között jelenik meg. A Gaussi normál eloszlásra vonatkozó táblázatok (bármely statisztika könyvben rendelkezésre áll) alapján az előbbi megállapításunkat számszerűvé is tehetjük. Pl. $\pm \sigma$ tartományban a jelzőanyag 64,2%-a található meg, míg a $\pm 2\sigma$ tartományban már az adott anyag 95,4%-át lelhetjük fel. Egy mérnöki ököl szabály tehát a következő, egy diffúziós folyamatokkal szétterjedő vizsgált jelzőanyag (szennyezőanyag) jellemzően egy 4 szélességű régióban oszlik meg, amely régió széle a koncentráció maximumtól $\pm 2\sigma$ távolságra található.

1.3.3. A koncentráció eloszlás alakja és az önazonosága

Az egy dimenziós pillanatszerű pontszerű forrás megoldása alapján látható, hogy a C/C_{max} arány egy egyszerű α (definiálva $x = \alpha \cdot \sigma$) paraméter függvényében megadható. Nézzük meg, hogy az előbbi észrevétel segítségével hogyan számíthatjuk ki a diffúziós tényezőt a koncentráció profil adatokból.

A korábbiakból (1.77 és 1.80 egyenletek) tudjuk, hogy a maximum koncentráció egy dimenziós pillanatszerű, pontszerű forrás esetére megadható $C(x, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}}$. Az 1.77 egyenlet átrendezve ezek alapján a következő adódik.

$$\frac{C(x, t)}{C_{max, t}} = \exp\left(-\frac{x^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \quad (1.85)$$

Az előbbi 1.85-es egyenletbe behelyettesítve $x = \sqrt{2 \cdot D \cdot t}$ és $x = \alpha \cdot \sigma$ összefüggéseket kapjuk.

$$\frac{C}{C_{max}} = \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) \quad (1.86)$$

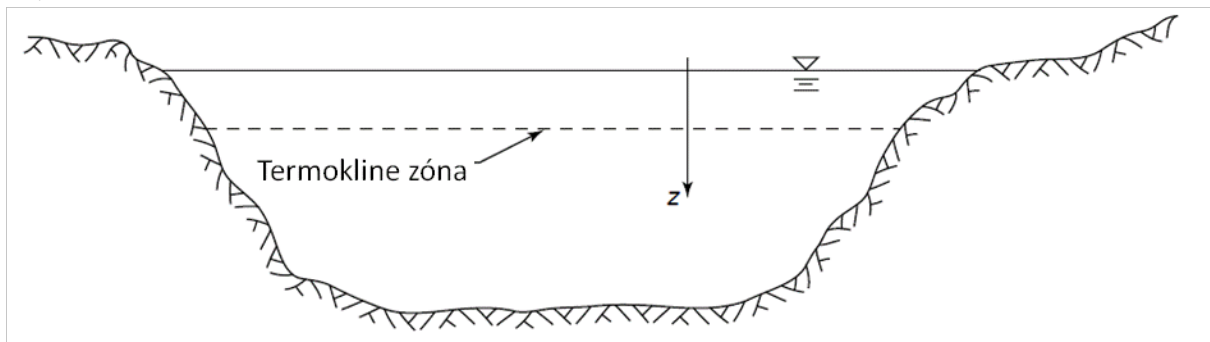
Ebben az egyenletben csak az α paraméter szükséges a C számításához, amely a szórás alapján történik a tömegközépponttól (legnagyobb koncentráció helye) való távolságot így jellemezve. Az előbbi kifejezés nagyon tisztán illusztrálja az ön hasonlóságot: a C/C_{max} arány mindig ugyanazt az értéket veszi fel egy adott $\alpha \cdot \sigma$ -val jellemzett helyen, függetlenül az időtől (t), a beadagolt mennyiségtől (M), vagy a diffúziós tényező (D) értékétől.

Az előbbi összefüggés nagyon hasznos a diffúziós tényező számításához. Nagyon gyakori, hogy nem tudjuk pontosan a beadagolt M értéket (vagy pont ezt akarjuk visszszámítani), azonban mindig van lehetőségünk normalizálni az egy adott időben mért koncentrációprofil (a 9. ábra látható különböző időpillantokban) értékét a $C_{max}(t)$ felhasználásával. A normalizálást követően válasszunk egy α értéket, mondjuk 1,0-át. Az 1.85 egyenlet alapján kiszámítható, hogy a $C/C_{max}=0,61$ az $x=\sigma$ helyen. A következő lépés, hogy a kimért koncentrációprofil alapján meghatározzuk azt a helyet, ahol $C/C_{max}=0,61$ és ezzel az x koordinátával meghatározzuk σ -t. Végül felhasználjuk az $x = \sqrt{2 \cdot D \cdot t}$ összefüggést, valamint a t ismert értékét, és ezek alapján becsüljük a D diszperziós tényezőt.

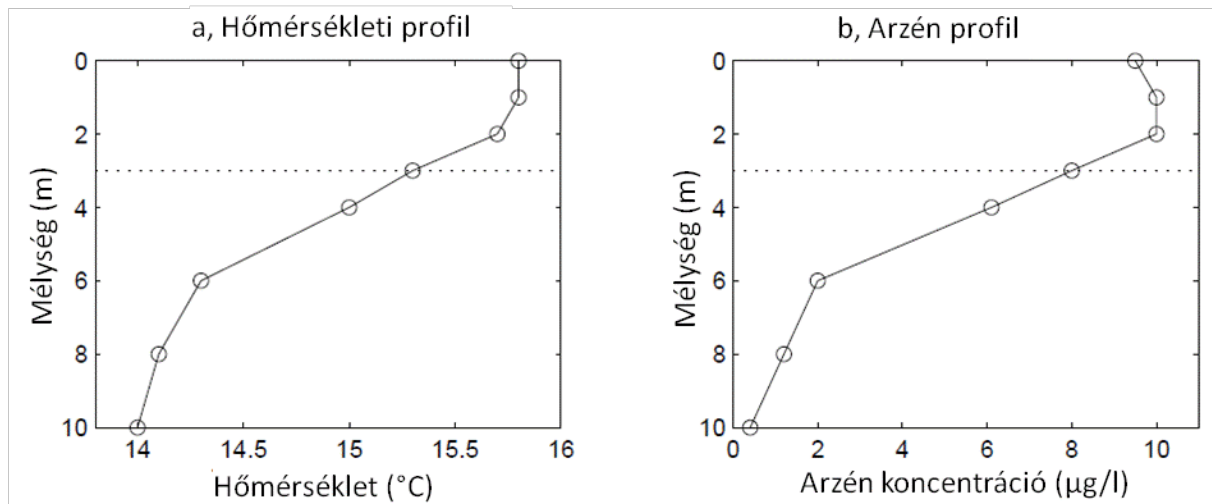
1.4. Mintapélda: Diffúzió értelmezése egy tóban.

Az előbbi fejezetben a diffúzióval kapcsolatosan szerzett ismereteinkre alapozva, oldjuk meg a következő példát, amelyet Nepf (1995) szerint adaptáltunk.

A 11. ábra (átlagos keresztmetszvény) és 12. ábra (hőmérsékleti és koncentráció profilok) ábrák illusztrálják a mintapéldát egy közepesen rétegzett, alpesi, kistavat. A tóban a termokline zóna (a legmeredekebb sűrűség gradienshez tartozó régió, más néven váltóréteg) 3 m-es mélységben található. A tó arzénrel szennyezett. A feladat az arzén termokline zónán keresztüli diffúziós fluxusának és a diffúzió irányának a meghatározása. A termokline zónához tartozó horizontális értelmű keresztmetszeti terület, $A = 2 \cdot 10^4 \text{ m}^2$. A tóra értelmezett molekuláris diffúziós tényező, $D_m = 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$.



11. ábra: A rétegzett alpesi tó sematikus keresztmetszvénye. (Nepf 1995 nyomán)



12. ábra: Hőmérsékleti (a) és arzén koncentráció (b) profilok egy alpesi tóban. A 3 m-es mélységben lévő pontozott vonal a termokline zóna (a legnagyobb sűrűség gradienssel jellemzett régió) elhelyezkedését hivatott jelezni. (Nepf 1995 nyomán)

1.4.1. Molekuláris diffúzió esete

A termokline régió keresztüli molekuláris diffúziós fluxus számításához, használjuk a Fick-féle törvény egy dimenziós változatát, az 1.23 egyenlet szerint most z , vertikális irányban felírva.

$$q_z = -D_m \cdot \frac{dc}{dz} \quad (1.87)$$

Számítsuk ki a koncentráció gradiens értékét a $z = 3\text{m}$ -es mélységben, a koncentráció profil értékeit felhasználva, véges differencia formában.

$$q_z = -D_m \cdot \frac{dc}{dz} = -(1 \cdot 10^{-10}) \cdot \frac{(10-6,1)}{(2-4)} \cdot \frac{1000\text{l}}{1\text{m}^3} = +1,95 \cdot 10^{-7} \mu\text{g}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}) \quad (1.88)$$

Az 1.87-as egyenlet számításának végeredménye előtti a + jel a lefelé mutató fluxust jelzi. Az arzénre vonatkozó anyagáram a termokline zóna keresztmetszeti területével való szorzás után adódik:

$$\dot{m} = A \cdot q_z = 0,0039 \mu\text{g}/\text{s} \quad (1.89)$$

1.4.2. Turbulens diffúzió esete

Amint már korábban utaltunk rá a tananyag során, gyorsabb véletlen mozgás nagyobb diffúziós tényezőhöz vezet. Később látni fogjuk, hogy a turbulencia szintén egy bizonyos fajta véletlen mozgást eredményez, ami a Fick-féle diffúziós folyamatokhoz hasonló viselkedéssel jellemezhető. Mivel azonban a turbulens mozgások általában lényegesen nagyobb léptékűek, mint a molekuláris mozgások, a turbulens diffúziós tényezők sokkal nagyobbak, mint a molekuláris diffúziós koeficiensek.

A turbulencia forrásai egy kis tó termokline zónájának esetében származhatnak felszíni vízfolyás betorkolásából, szál által indukált cirkuláló vízmozgásból, határreteg elkeveredésből, konvekciós (sűrűség különbség hatására kialakuló) elkeveredésből, vagy egyéb dologból. Az példánkban szereplő kis tó esetében végzett vizsgálatok alapján a turbulens diffúziós tényező értéke, $D_t = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Mivel a turbulens diffúzió ugyancsak a Fick-féle törvénnyel írható le, a turbulens diffúziós fluxus ($q_{z,t}$) a molekuláris diffúziós fluxussal ($q_{z,m}$) egy diffúziós tényezők arányával kifejezett hányados segítségével kapcsolatba hozható.

$$q_{z,t} = q_{z,m} \cdot \frac{D_t}{D_m} = +2,93 \cdot 10^{-3} \mu\text{g}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}) \quad (1.90)$$

A turbulens anyagáram pedig a turbulens diffúziós fluxust figyelembe véve a következőnek adódik.

$$\dot{m}_{z,t} = A \cdot q_{z,t} = 58,5 \mu\text{g}/\text{s} \quad (1.91)$$

Az előbbiekből látható, hogy a turbulens diffúziós transzport sokkal jelentősebb, mint a molekuláris diffúziós. Érdemes felhívni a figyelmet azonban arra, hogy amennyiben a koncentráció gradiens nagyon magas és a turbulencia alacsony értékű a molekuláris diffúzió meglepően fontossá válhat.

Implikáció (következtetés)

Az előbbi példa alapján azt láttuk, hogy a koncentráció gradiens eredményeképpen az arzén nettó diffúziós fluxusa a hypolimnionba (termokline zóna alatti régió) irányul. Ha nem vesszük figyelembe másféle transzport folyamatokat, akkor azt a konklúziót vonhatjuk le, hogy az arzén forrása a felszínen van. Amennyiben tehát a diffúziós transzport folytatódik a hypolimnion koncentrációja növekedni fog. A következő fejezetekben meg fogjuk látni, hogyan változik meg ez a helyzet akkor, ha másféle transzport folyamatokat, pl. az advekciót is figyelembe veszünk.

A fejezetben tanultak rövid összefoglalása.

Az előző fejezetben a környezetben lejátszódó transzportfolyamatokkal általában ismerkedtünk meg és egy fontos transzport folyamatra a diffúzióra fókuszáltunk. A diffúziós anyag transzport leírására szolgáló Fick-féle törvényt levezettük. A későbbiekben felhasználtuk a Fick-féle törvényt, amely a diffúziós transzport következtében előálló koncentráció mező időbeli változásának leírására szolgál. A hasonlósági módszert használtuk fel a dimenzióanalízis technikájával kombinálva, hogy a pontszerű forrásból pillanatszerűen kiinduló, diffúziós egyenlettel leírható anyagtranszport egy dimenziós megoldását megtaláljuk. Végül egy példával illusztráltuk, a diffúziós transzport eredményét, abban az esetben, amikor a koncentráció gradiens fennáll és fontos szerepet játszik a szennyezések koncentrációjának előrejelzésében, azok környezetbeni mozgása során.

Irodalomjegyzék:

Fischer, Hugo. B., List, E. John., Koh, Robert. C. Y., Imberger, Jörg. és Brooks, Norman. H. (1979): *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press, New York, NY., ISBN 0-12-258150-4.

Lajos Tamás (2008): *Az áramlástan alapjai*, egyetemi tankönyv, 4. átdolgozott és bővített kiadás, Budapest.

Jolánkai Géza – Bíró István (1999): *A vízminőségvédelem alapjai különös tekintettel a rendszerszemléletű öko-hidrológiai módszerekre*, egyetemi jegyzet, ELTE.

Jolánkai Géza (1989): *Models of non-point source pollution*. (in hungarian). In: *Manual of water pollution control* (Editor: Katona E.), AQUA publisher, Budapest, pp 120-143.

Kovács Balázs (2004). *Hidrodinamika és transzportmodellezés (Processing Modflow környezetben)*, Miskolci Egyetem, Szegedi Tudományegyetem, Gáma-Geo Kft.

Nepf, H. M. (1995): *Course notes and problem sets, MIT Course 1.77: Water Quality Control*
Scott A. Socolofsky – Gerhard H. Jirka (2005): *Special Topics in Mixing and Transport Processes in the Environment*, Egyetemi Jegyzet, Texas A&M University.

<http://www.talknet.de/alke.spreckelsen/roger/thermo/difcoef.html>

2. Advektív diffúziós egyenlet

Bevezetés: a fejezetben megtanulandóak elővezetése

A természetben a transzportfolyamatok az advekciós és diffúziós folyamatok kombinációján keresztül valósulnak meg. Az előző fejezetben megismertük a diffúzió folyamatát és levezettünk egy egyfajta stagnáló környezeti feltételek mellett fennálló diffúziós transzport előrejelzésére alkalmas megoldást. Jelen fejezetben a korábban megismert diffúziós egyenletünket kiegészítjük az advekciós taggal (levezetve így az ún. advektív diffúziós egyenletet) és különböző módszerek segítségével oldjuk meg a kapott parciális differenciál egyenletünket különböző geometria és a szennyezőanyagra vonatkozó eltérő feltételek mellett.

2.1. Az advektív diffúziós egyenlet levezetése

Mielőtt levezetnénk az advektív diffúziós egyenletet nézzük meg az advekció hatásának a folyamat megértését szolgáló leírását. Az advekció koncepcionális jellemzése céljából vegyük a korábbi csőbeni folyadékkal (víz) kapcsolatos példánkat. A csőben az áramlás hatása nélkül, a beinjektált nyomjelző mindkét irányban egyenlő mértékben terjed, Gauss-féle eloszlást leírva az időben. Ha megnyitunk egy szelepet és engedjük, hogy a víz a csőben áramoljon, azt várjuk, hogy a nyomjelző anyagfelhő tömegközéppontja az átlagsebességgel mozogjon a csőben. Ha a koordináta-rendszerünket az átlagsebességgel mozgatjuk és viszkozitás-mentes állapotokat feltételünk, akkor a jelenség kinézete teljesen hasonló lesz az előző fejezetben tapasztaltnak. Az új mozgó koordináta-rendszer térbeli koordinátája (η) a következőképpen jellemezhető:

$$\eta = x - (x_0 + u \cdot t) \quad (2.1)$$

ahol, x_0 , a nyomjelző befecskendezési helye, u , az áramlás átlagsebessége, és $u \cdot t$ az a felhő középpontja által megtett távolság a t idő alatt.

Ha az η -t behelyettesítjük az x helyébe a diffúziós egyenlet korábbi stagnáló környezeti feltételek melletti megoldásába, akkor a következőt kapjuk.

$$C(x, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - (x_0 + u \cdot t))^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \quad (2.2)$$

A megoldásunk tesztelése céljából szükségünk van az advektív diffúziós egyenletünk megoldására és azt a megoldást hasonlíthatjuk majd a most kapotthoz.

2.1.1. Az alapegyenlet általános alakja

Az advektív diffúziós egyenlet levezetése a szuperpozíció elvén alapszik: az advekció és diffúzió összeadhatóak mivel lineárisan függetlenek egymástól. Azt honnan tudhatjuk, hogy az advekció és diffúzió lineárisan független folyamatok? Az egyetlen út, ahogyan függhetnek egymástól, ha az egyik folyamat visszacsatol a másikhoz. Az előző fejezet alapján látható, hogy a diffúzió egy molekuláris mozgásnak megfelelő véletlen folyamat. A diffúziós mozgással, minden egyes molekula δt idő alatt vagy egy lépést jobbra vagy egy lépést balra tesz meg ($\pm \delta t$). Az advekció által minden egyes molekula $u \cdot \delta t$ távolságra elmozdul folyásirányban. Ezek a folyamatok tisztán additívak és függetlenek. Az átfolyás nem okoz zavart annak a valószínűségében, hogy a molekula a diffúziós lépést jobbra vagy balra fogja megtenni, inkább

csak hozzáad valamit az adott lépéshez. A molekula nettó mozgása a következő azonossággal jellemezhető.

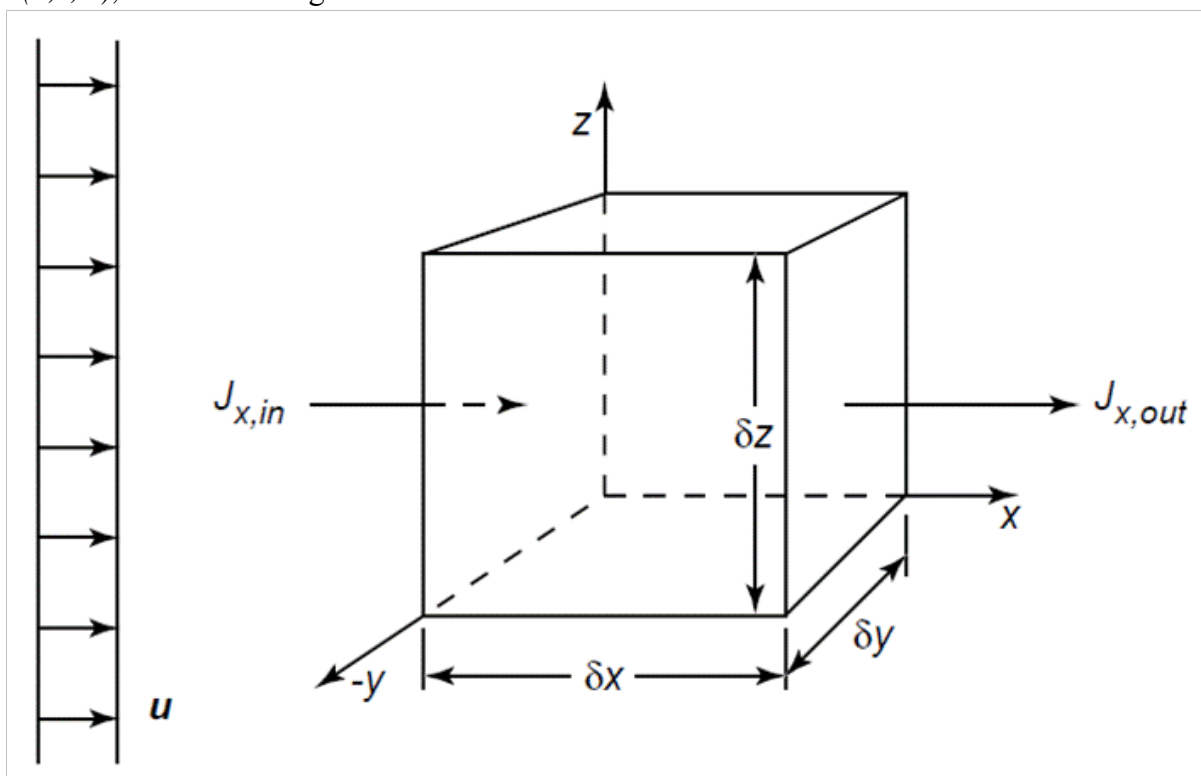
$$u \cdot \delta t \pm \delta x \quad (2.3)$$

Az x irányban értelmezett fluxus (J_x) beleértve az advektív transzportot és a Fick-féle diffúziót megadható.

$$J_x = u \cdot C + q_x = u \cdot C - D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \quad (2.4)$$

Feladatként hagyjuk az olvasóra, hogy ellenőrizze vajon az $u \cdot C$ a megfelelő forma –e az advektió leírására (hasonlítsuk össze az $u \cdot C$ és a q_x dimenzióját).

Amint az előző fejezetben is tettük kombináljuk egymással a fluxusra vonatkozó összefüggést és az anyagmegmaradás törvényét létrehozva így az advektív diffúziós egyenletet. Vegyünk egy kontrol térfogatot, ahogy korábban is, de most legyen egy keresztirányú sebességünk is, $\vec{u}(u, v, w)$, a **13. ábra** megfelelően.



13. ábra: Átfolyással rendelkező kontrol térfogat sematikus ábrája (forrás Sokolofsky-Jirka 2005).

Az egyenlet levezetése során ugyancsak Fisher et al. (1979)-es eljárását fogjuk alkalmazni. Az anyagmegmaradás törvényét alkalmazva a kontrol térfogaton keresztüláramló nettó (eredő) fluxus a következőképpen számítható.

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \sum \dot{m}_{in} - \sum \dot{m}_{out} \quad (2.5)$$

Az x irányban megadva ez (2.5 egyenlet) a következő.

$$\delta \dot{m}_x = \left(u \cdot C - D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right)_1 \cdot \delta y \delta z - \left(u \cdot C - D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right)_2 \cdot \delta y \delta z \quad (2.6)$$

Amint korábban is, használjuk a Taylor féle sorba-fejtést a lineáris tagig és kombináljuk a két fluxust. Először az advekción tagra.

$$u \cdot C_1 - u \cdot C_2 = u \cdot C_1 - \left(u \cdot C_1 + \left(\frac{\partial(uC)}{\partial x} \right)_1 \cdot \delta x \right) = - \frac{\partial(uC)}{\partial x} \cdot \delta x \quad (2.7)$$

Később a diffúziós tagra.

$$- \left(D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right)_1 + \left(D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right)_2 = - \left(D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right)_1 + \left(\left(D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right)_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right)_1 \cdot \delta x \right) = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \cdot \delta x \quad (2.8)$$

Az előbbi tagokat az x irányú anyagáram egyenletébe (2.6)beírva.

$$\delta \dot{m}_x = - \frac{\partial(uC)}{\partial x} \cdot \delta x \delta y \delta z + D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \cdot \delta x \delta y \delta z \quad (2.9)$$

Az y és z irányú anyagáramok hasonlóak, de v és w sebességkomponensek segítségével írhatók fel.

$$\delta \dot{m}_y = - \frac{\partial(uC)}{\partial y} \cdot \delta y \delta x \delta z + D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \cdot \delta y \delta x \delta z \quad (2.10)$$

$$\delta \dot{m}_z = - \frac{\partial(uC)}{\partial z} \cdot \delta z \delta x \delta y + D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \cdot \delta z \delta x \delta y \quad (2.11)$$

A 2.5 egyenletbe behelyettesítve az előbbieket és M helyébe a $C \cdot \delta x \delta y \delta z$ értéket beírva és az egyszerűsítéseket elvégezve adódik.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \cdot C) = D \cdot \nabla^2 \cdot C \quad (2.12)$$

Einstein-i jelöléseket alkalmazva.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(u_i C)}{\partial x_i} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} \quad (2.13)$$

Az előbbi egyenlet a kívánt advektív diffúziós egyenlet (AD). A tananyag későbbi részében gyakran hivatkozunk majd erre az összefüggésre.

Érdeemes megjegyezni, hogy az egyenlet implicit módon feltételezi a D konstans voltát, amennyiben azonban változó D-ről beszélünk az egyenlet jobb oldali része a következő alakot ölti.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{i,j} \cdot \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) \quad (2.14)$$

2.1.2. Pontszerű szennyezés esete, mint egy lehetséges megoldás

Hogy ellenőrizzük vajon az eredeti feltételezésünk (2.2) helyes volt-e az AD egyenlet (2.13) megoldásának alakjára vonatkozóan, helyettesítsük a mozgó koordináta-rendszerre vonatkozó koordináta-transzformációt a 2.12, AD egyenlet egy dimenziós, alább megadott alakjába. Egy dimenziós esetben az $\bar{\mathbf{u}}=(u,0,0)$ és nincs koncentráció gradiens y és z irányokban.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(uC)}{\partial x} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2.15)$$

A mozgó rendszerre vonatkozó koordináta-transzformációnk a következő.

$$\eta = x - (x_0 + u \cdot t) \quad (2.16)$$

$$\tau = t \quad (2.17)$$

Az előbbi két egyenletet kell behelyettesíteni a **2.15**-be, majd alkalmazni kell a láncszabályt a következőképpen.

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) = D \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) \quad (2.18)$$

A szükséges egyszerűsítéseket $\left(\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, \frac{\partial \tau}{\partial t} = 1, \frac{u}{\partial x} = \frac{1}{\partial t} \right)$ elvégezve az egyenlet a következő formára redukálódik.

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} \quad (2.19)$$

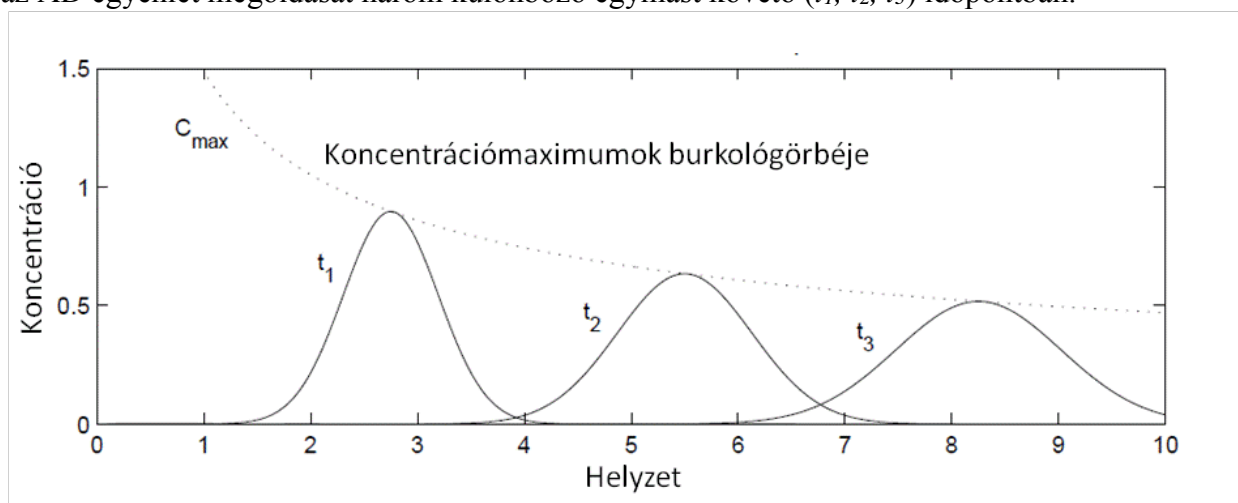
Az előbbi, **2.19** egyenlet pedig azonos az egy dimenziós diffúziós egyenlettel (**1.37**), amelynek megoldása az η és τ koordináták mellett pillanatszerű pontszerű forrást figyelembe véve.

$$C(x, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot \tau}} \cdot \exp\left(-\frac{\eta^2}{4 \cdot D \cdot \tau}\right) \quad (2.20)$$

Visszakonvertálva az x és t koordinátákat (**2.16** és **2.17** visszahelyettesítésével) a **2.2** egyenletet kapjuk.

$$C(x, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - (x_0 + u \cdot t))^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \quad (2.21)$$

Tehát az eredeti feltételezésünk a szuperpozíciós megoldásra helyes volt. A **14. ábra** szemlélteti az AD egyenlet megoldását három különböző egymást követő (t_1, t_2, t_3) időpontban.



14. ábra: Az AD egyenlet egy dimenziós megoldásának sematizált megoldása három időpontra. A pontozott vonal a maximum koncentrációk értékeit mutatja a szennyezőanyag, fő áramlás szerinti mozgásának irányában. (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán)

2.1.3. Összenyomhatatlan folyadékra való értelmezés

Összenyomhatatlan folyadék esetében a 2.13 egyenlet egyszerűsíthető a tömegmegmaradási egyenletnek a környezetben előforduló folyadékra való alkalmazásánál. Összenyomhatatlan folyadék esetében a sűrűség mindenhol állandó és a tömegmegmaradási egyenlet a kontinuitási egyenletre redukálódik (pl. Lajos 2008).

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.22)$$

Ha a szorzat deriválási szabálya szerint kifejtjük a 2.12 egyenlet advektív tagját, akkor a következőt írhatjuk.

$$\nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \cdot C) = (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \cdot C + \bar{\mathbf{u}} \cdot (\nabla \cdot C) = (2.23)$$

A kontinuitási egyenlet ismeretében, a 2.22 egyenletet alkalmazva a jobb oldali első tagra, $(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \cdot C = 0$ adódik. Ezek szerint az összenyomhatatlan folyadékra az advektív diffúziós egyenlet a következő formát ölti.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot (\nabla \cdot C) = D \cdot \nabla^2 \cdot C \quad (2.24)$$

Vagy Einstein-i jelöléseket alkalmazva.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial C}{\partial x_i} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} \quad (2.25)$$

Az advektív diffúziós egyenletnek ez az előbbi formája az, amit a leggyakrabban fogunk használni a továbbiakban.

Néhány ökölszabály az alkalmazással kapcsolatban

Álljunk meg egy kicsit az anyag tárgyalásában, hogy néhány észrevételt tegyünk az AD egyenlettel és megoldásaival kapcsolatban.

Elsőként a **14. ábr**alátható megoldás egy olyan példát mutat, ahol a diffúziós és advektív transzport körülbelül egyaránt fontos. Ha az áramlás erősebb lett volna (nagyobb $\bar{\mathbf{u}}$), a jelzőanyag-felhőnek kevesebb ideje lett volna, hogy széterjedjen és minden egyes t_i -re vonatkozóan az ábrán láthatónál keskenyebb alakot vett volna fel. Fordítva, ha a diffúziós lett volna gyorsabb (nagyobb D), a jelzőanyag-felhő jobban széterjedt volna két különböző t_i időpont között és a koncentrációprofilok jobban átfednének. Az előbbieket alapján látjuk, hogy a diffúzió versus advekció dominancia a t , D és az $\bar{\mathbf{u}}$ függvénye. Fejezzük ki ezt a tulajdonságot a dimenzió nélküli Peclet-számmal.

$$Pe = \frac{D}{u^2 \cdot t} \quad (2.26)$$

Egy adott folyásirány szerinti helyre (pl. keresztmetszvényre egy vízfolyásnál) a következő adódik $l = u \cdot t$ -t felhasználva.

$$Pe = \frac{D}{u \cdot l} \quad (2.27)$$

Ha a $Pe \gg 1$ akkor a diffúzió a domináns és a felhő gyorsabban terjed szét, mint ahogy folyásirányban lefelé mozog. Ellenben ha a $Pe \ll 1$, akkor a folyamat az advekció által vezérelt

és a felhő gyorsabban mozog lefelé, mint ahogy szétterjed. Fontos megjegyezni, hogy a Peclet-szám függ attól, hogy milyen a vizsgált térbeli skála kiterjedése. „Nagy” távolságokra és időkre a Peclet-szám kicsi lesz és advekciónak a folyamat lesz domináns.

Második szabályként elmondható, hogy a maximum koncentráció csökken áramlási irányban a diffúziós folyamatnak megfelelően. A **14. ábra** a jelzőanyag felhők maximum koncentrációit is mutatja, ahogy a felhő mozog áramlási irányban lefelé. Ez a maximumokra vonatkozó burkológörbe akkor kapható meg, ha a **2.2** egyenlet exponenciális tagja éppen 1,0 (vagyis az exp függvény hatványkitevőjében 0 van). Egy dimenziós esetben a maximum koncentráció csökkenése a következő arányosság szerint jelenik meg.

$$C_{max}(t) \propto \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (2.28)$$

Két és háromdimenziós esetben az összefüggés alakja szintén megadható. Két dimenziós formula,

$$C_{max}(t) \propto \frac{1}{t} \quad (2.29)$$

és három dimenziós eset

$$C_{max}(t) \propto \frac{1}{t \cdot \sqrt{t}} \quad (2.30)$$

A harmadik figyelemre érdemes dolog, hogy a diffúziós és advekciónak a skálákat gyakran használhatjuk arra, hogy egyszerűsítsük az egyenleteket és közelítéseket alkalmazzunk. Az egyik legfontosabb kérdés mérnöki szempontból, hogy: Egy adott egyenlet illetve közelítés mikor alkalmazható? szennyezőanyag transzport esetében a kérdés általában megválaszolható összehasonlítva a jellemző advekciónak és diffúziós hossz és időbeli skálákat az adott probléma hossz és időbeli skáláihoz. Advekciónak esetében (a alsó indexel), diffúzió esetében (d alsó indexel) jelölve a jellemző skálákat a következők írhatóak.

$$l_a = \bar{u} \cdot t \quad t_a = \frac{l}{\bar{u}} \quad (2.31)$$

$$l_d = \sqrt{D \cdot t} \quad t_d = \frac{l^2}{D} \quad (2.32)$$

Ezek az előbbi skálák használhatók ökölszabályszerű első becslésként ha ismerjük az illető szennyezőanyag bejutásának helyét és idejét egy alsóbb szelvényben annak eldöntésére, hogy melyik összefüggés lesz érvényben, ill. melyik folyamat az erősebb.

Példaként egy pontforrásból származó anyagkibocsátás egy l hosszúságú régió értelmezett és a kibocsátástól $\pm l/2$ távolságra át nem eresztő határok (víz esetében vízzáró határ) találhatóak. Ebben az esetben az az idő, amíg az adott anyagfelhő egyenletesen el nem oszlik a régióban diffúzióval $t_d = \frac{l^2}{8 \cdot D}$. A 8-as szorzó az előbbi kifejezésben abból ered, hogy az egyenletes eloszlás feltételeként azt szabtuk meg, hogy $\pm l/2$ távolságra a koncentráció maximumnak (C_{max}) legalább 97%-a jelenjen meg. Ezeket a karakterisztikus skálákat (amelyek könnyen levezethetők dimenziós analízis segítségével) memorizálni kellene és extenzív módon kellene használni őket a transzport problémák első durva, megközelítésekor.

2.2. Az advektív diffúziós egyenlet megoldásai

Az előző fejezetben egy pillanatszerű, pontszerű forrás esetében vizsgáltuk a részletes megoldást lépésről lépésre stagnáló környezetben. A természetben a kezdeti és a határfeltételek sokban különbözhetnek ettől az előbb említett idealizált esettől. Ebben a részfejezetben néhány technikát ismerünk meg azért, hogy más, sokkal általánosabb esetekben is tudjuk kezelni a helyzetet. Amint az advektió és diffúzió folyamata additív, meg fogjuk mutatni, hogy a szuperpozíció elvét használhatjuk, néhány általános megoldási alapesetből kiindulva és azokból építkezve, komplex geometria és kezdeti feltételek esetében is arra, hogy megoldásokat találjunk.

A fejezetben található megoldások hasonló formában fellelhetők Fischer et al. (1979) könyvében is. A fejezet végén megtalálhatók egyes analitikus megoldások eredményei. Ezek az eredmények elsősorban a fejezetben bemutatott módszerek segítségével jöttek létre. Az alapeseteket összerakva, a megadott egyenletek a problémák széles tartományában alkalmasak megoldások keresésére.

2.2.1. Kezdeti ismert egyenletes koncentráció megoszlás esete

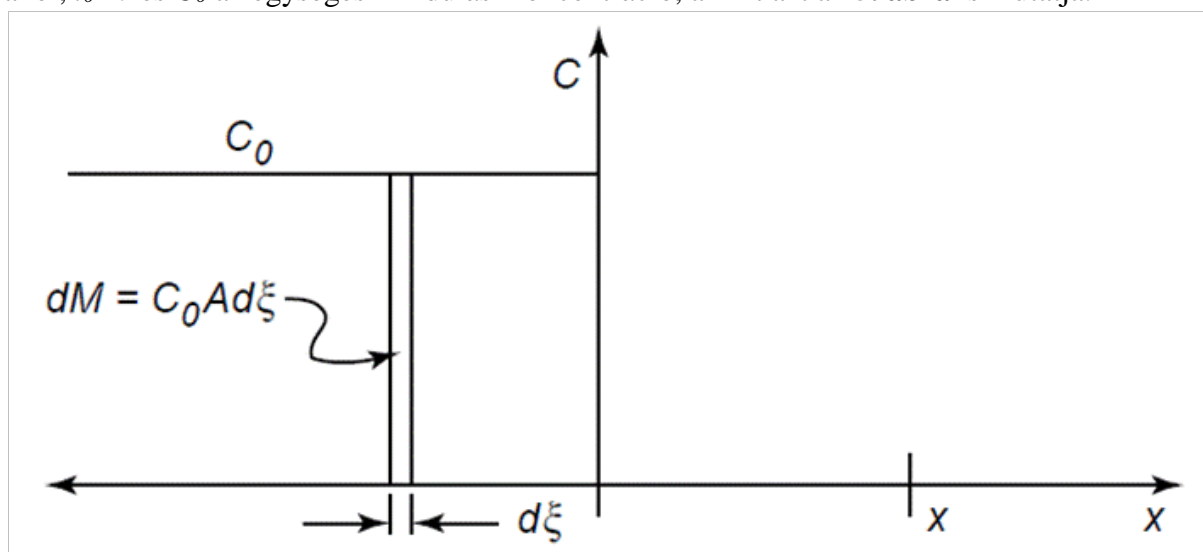
Egy jó példája a szuperpozíciós módszer erősségének bemutatására a kezdeti egyenletes térbeli koncentráció-megoszlás esete. Mivel az advektió mindig bevihető az egyenletbe a mozgó koordináta-rendszer alkalmazásával, ezért az egy dimenziós stagnáló közeg esetét vizsgáljuk. A vezérlő alapegyenletünk tehát a következő (az egy dimenziós diffúziós egyenlet).

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2.33)$$

Homogén kezdeti koncentráció-megoszlást feltételezünk az alábbiak szerint definiálva azt.

$$C(x, t_0) = \begin{cases} C_0 & \text{ha } x \leq 0 \\ 0 & \text{ha } x > 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

ahol, $t_0=0$ és C_0 az egységes kiindulási koncentráció, amint azt a **15. ábra** is mutatja.



15. ábra: A kezdeti egyenletes pillanatszerű koncentráció-megoszlás sematikus reprezentációja, a $-\xi$ -ben fekvő dM differenciális elemet ábrázolva. (Sokolofsky-Jirka 2005 nyomán)

Az $x = \xi < 0$ pontban, az infinitezimális tömeg $dM = C_0 \cdot A \cdot d\xi$, ahol A a keresztmetszeti terület $\delta y \cdot \delta z$. $t > 0$ -ra, a koncentráció bármely x pontban a tömeg diffúziós folyamatainak következtében

áll elő minden dM differenciális elemet alapul véve. A dC meghatározása, minden dM elemi tömegből kiindulva a 2.33 egyenlet pillanatszerű, pontszerű forrás esetére adott megoldásból áll elő a következőképpen.

$$dC(x, t) = \frac{dM}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \quad (2.35)$$

A szuperpozíció elvét alkalmazva, minden dM tömegelem hatását összegezve kapjuk.

$$C(x, t) = \int_{-\infty}^0 \frac{C_0 \cdot d\xi}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \quad (2.36)$$

Az előbbi egyenlet az előbbi problémánk szuperpozíciós megoldása. Azért hogy az integrált kiszámítsuk, a változókat, ahogy korábban is tettük, meg kell változtatnunk a következőképpen.

$$\zeta = \frac{x-\xi}{\sqrt{4 \cdot D \cdot t}} \quad (2.37)$$

$$d\xi = \frac{d\zeta}{\sqrt{4 \cdot D \cdot t}} \quad (2.38)$$

Az új változót ζ -t a 2.36 szuperpozíciós integrál egyenlet megoldásába helyettesítve.

$$C(x, t) = \frac{C_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}}^{\infty} \exp(-\zeta^2) d\zeta \quad (2.39)$$

Vegyük figyelembe, hogy az előbbi integrál felső hataraként a $\zeta=0$ -a értéket vettük figyelembe a 2.37 szerint definiálva. Átrendezve az integrált a következő adódik.

$$C(x, t) = \frac{C_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}}^{\infty} \exp(-\zeta^2) d\zeta = \frac{C_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[\int_0^{\infty} \exp(-\zeta^2) d\zeta - \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} \exp(-\zeta^2) d\zeta \right] \quad (2.40)$$

A kapott két integrál közül az első megoldható analitikusan, integrál táblázat segítségével, a megoldása $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. A második integrál megoldása az úgynevezett hiba függvény (error function), amely a következőképpen definiálható.

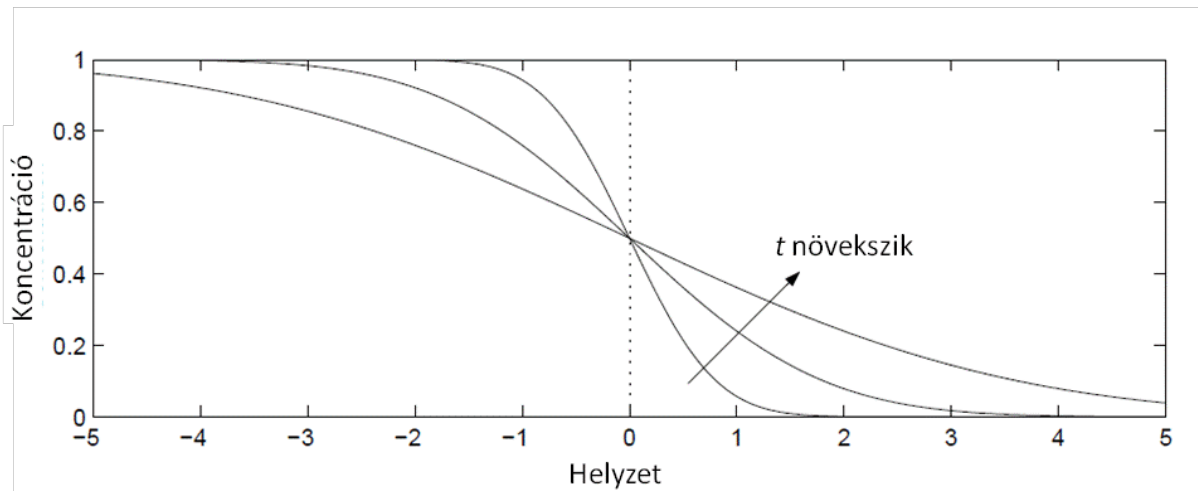
$$\operatorname{erf}(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varphi} \exp(-\zeta^2) d\zeta \quad (2.41)$$

ahol, $\varphi = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$ -vel egyenlő.

A hiba függvény (error function) megoldása általában megtalálható az integrál táblázatokban, vagy a nagyobb matematikai programokban beépített függvényként. Az előbbieket alapján a 2.40 egyenlet megoldása a következő.

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \cdot \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \quad (2.42)$$

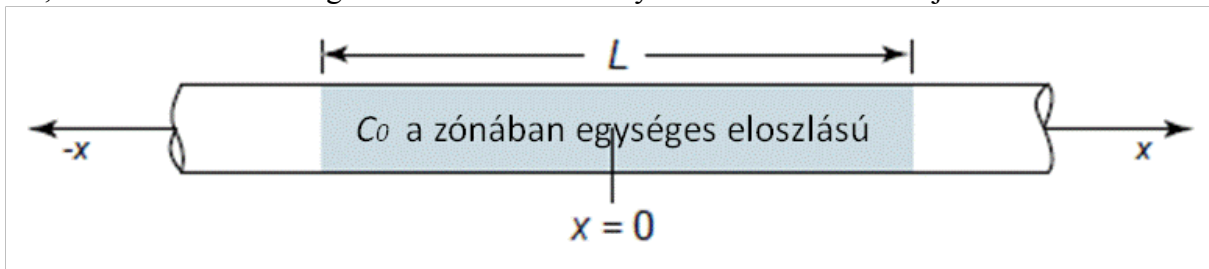
A 16. ábra a $C_0=1$ esetére növekvő t -re mutatja a kapott függvényalakokat, mint megoldásokat.



16. ábra: A féltérben egyenletes ($x < 0$) kezdeti koncentráció-megoszlás (lépcsőfüggvény) pillanatszerű problémájának megoldása $C_0=1$, kiindulási koncentráció esetében. (Sokolofsky-Jirka 2005 nyomán)

Az intravénás injekció, mint a diffúziós folyamatok egy példája

Vegyük a következő esetet. egy orvos egy allergiától szenvedő beteg vénájába fecskendez egy allergia elleni gyógyszert. A szer bejuttatása T idő alatt történik meg. A vénákban a vér átlagos sebessége u . Így leegyszerűsítve a kiindulási helyzetet a vér az alapállapotban egy $L = u \cdot T$ távolságú régióban tartalmazza a beinjektált kemikáliát. A kemikália kiindulási koncentrációja C_0 , a vérben az előbbi régióban. A kiindulási helyzetet a 17. ábra mutatja be.



17. ábra: Az intravénás injekció befecskendezési utáni időpillanat leegyszerűsített, sematikus ábrázolása.

Kérdés, hogy milyen a kemikália eloszlása a vénákban, amikor az 75 s múlva eléri a szívet? A példára alkalmazható az előző fejezetben megismert kezdeti ismert egyenletes koncentráció megoszlás esete. Vegyük fel az $x=0$ pontot a kezdeti feltételezeten egyenletes koncentráció megoszlás közepén és engedjük, hogy a koordinátarendszer az vér átlagos u sebességével mozogjon. Az előbbieket miatt a diffúziós egyenletet kell megoldanunk a következő kiindulási feltételek mellett.

$$C(x, t_0) = \begin{cases} C_0 & \text{ha } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{minden más helyen} \end{cases} \quad (2.43)$$

ahol $t_0=0$ a $T/2$ időpillanatban.

Kövessük az előző fejezetben alkalmazott szuperpozíciós megoldást, amely szerint a következő egyenlet adódik.

$$C(x, t) = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{C_0 \cdot d\xi}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \quad (2.44)$$

Az előbbi egyenlet a következőképpen bővíthető.

$$C(x, t) = \frac{C_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \left[\int_{-\infty}^{L/2} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\cdot D\cdot t}\right) d\xi - \int_{-\infty}^{-L/2} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\cdot D\cdot t}\right) d\xi \right] \quad (2.45)$$

A **2.37** és **2.38** egyenletek szerinti koordináta-transzformációt behelyettesítve és az átalakításokat, egyszerűsítéseket elvégezve a következő megoldást kapjuk.

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \cdot \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+L/2}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-L/2}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \quad (2.46)$$

Behelyettesítve a $t=75$ s-ot az egyenlet megadja a koncentráció eloszlását abban az időpillanatban, amikor az anyagfelhő eléri a szívet.

2.2.2. Ismert állandó koncentráció a peremen

Egy másik tipikus példa, amikor egy fix koncentráció érték adott egy x_1 pontban. Ez lehet például egy oxigén koncentráció érték a levegővíz határfelületen. A folyamatot vezérlő paraméterek, amelyek a megoldáshoz szükségesek, a fix koncentráció C_0 , a diffúziós tényező D , a koordináták $(x-x_0)$ és a t idő. Ismét hanyagoljuk el az advekciónak hatását, mert ez a változó transzformálásán keresztül bevezethető az egyenletbe, az x_0 értékét pedig vegyük fel zérusnak ($x_0=0$) az egyszerűsítés céljából. Amint a pontszerű forrás esetében tettük használjuk a hasonlóságon alapuló megoldást, egy vezérlő új változó létrehozása céljából, hogy a megoldás formáját megkaphassuk a következőképpen.

$$C(x, t) = C_0 \cdot f\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) \quad (2.47)$$

Ha definiáljuk a hasonlósági változót $\eta = \frac{x}{\sqrt{Dt}}$ és ezt behelyettesítjük a **2.33**-as egy dimenziós diffúziós egyenletbe, akkor amint vártuk egy ordináris differenciál egyenletet kapunk f és η szerint.

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{df}{d\eta} = 0 \quad (2.48)$$

A határfeltételek az egyenlet esetében a következők $f(0)=1$ és $f(\infty)=0$. Sajnos azonban a mi kapott ordináris differenciál egyenletünk nem lineáris. Egy gyors pillantás azonban a **16. ábra** lehet, hogy segít nekünk a megoldás megtalálásában. Az ábra szerint az $x=0$ pontban a fix koncentráció értéke $C_0/2$. Ha a 2.42 egyenletbe C_0 -át helyettesítünk, mint vezérlő tényezőt (a $C_0/2$ helyett) akkor talán egy lehetséges megoldást kapunk. Behelyettesítve a **2.48**-as differenciál egyenletbe és a határfeltételek meg fogják mutatni, hogy a kapott megoldás korrekt. Vagyis a következő egyenlettel adható meg a megoldás, amelyet keresünk.

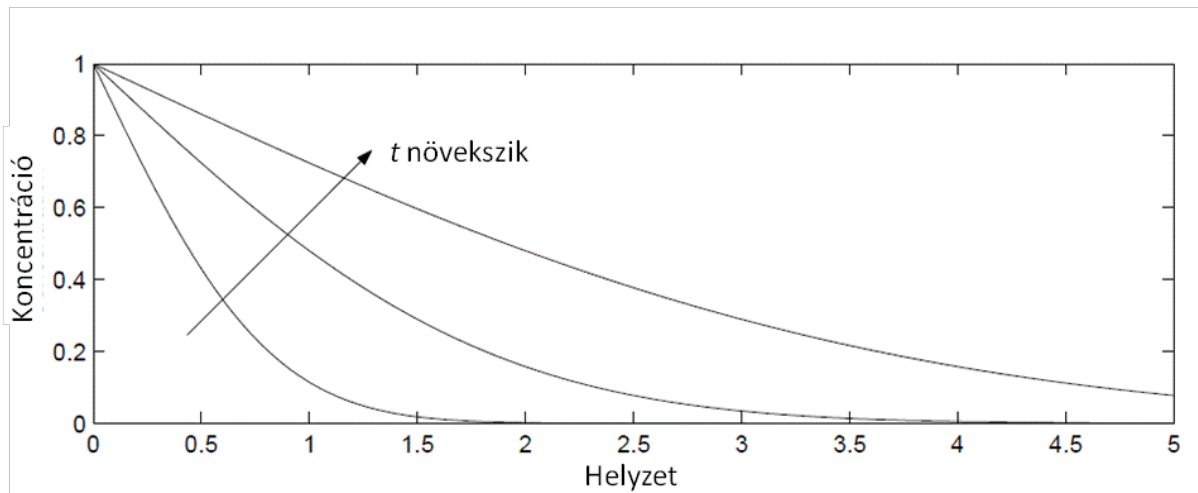
$$C(x, t) = C_0 \cdot \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \quad (2.49)$$

A határfeltételekkel történő ellenőrzés eredménye a következő,

$$C(x, t_0) = \begin{cases} C_0 & \text{ha } x=0 \\ 0 & \text{ha } x=\infty \end{cases} \quad (2.50)$$

amely eredmény megfelel az előzetes várakozásoknak.

A **18. ábra** mutatja be a $C_0=1$ -re vonatkozó megoldást. Fontos megjegyezni, hogy ez a megoldás csak az $x>x_0$ tartományban érvényes.



18. ábra: A 2.49-es egyenlet $x=0$ pontban $C_0=1$ fix koncentrációjú peremmel megadott megoldása (Socolofsky és Jirka 2005 nyomán).

2.2.3. Ismert fix, lezárt (no flow) perem

Az utolsó eset, amit részletesen vizsgálunk ebben a fejezetben a lezárt (un. no flow) perem. No-flux határfeltétel megjelenésére számíthatunk minden olyan felületen, amely az adott, vizsgált (szennyező)anyag számára nem átjárható. Hidrológiai vizsgálatoknál ilyen perem például a vízgyűjtő határa, egy folyóban a szennyezőanyag szétterjedésének vizsgálatánál ilyen perem a folyó partja (y irányban) és medre (z irányban). A kérdéskör tárgyalásánál ebben a fejezetben feltételezzük, hogy a vizsgált határfelületen nem játszódnak le az adott anyagra vonatkozó kémiai reakciók és a felület teljesen átjárhatatlan az adott anyag szempontjából.

Amint előrelátható az első feladatunk annak a módnak a megtalálása, hogyan specifikálhatunk egy no-flux peremet, mint határfeltételt a vezérlő differenciál egyenletünkben. Az előző probléma a Fick-féle törvény alkalmazásával viszonylag egyszerűen megoldható. Mivel a no-flux perem jelentése, hogy a peremen keresztüli fluxus zérus, $\bar{q}=0$ (D értékét konstansnak véve), a határfeltételek a következőképpen írhatók.

$$\bar{q}|_{S_b} \cdot \bar{n} = 0$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y}, \frac{\partial C}{\partial z}\right)|_{S_b} \cdot \bar{n} = 0 \quad (2.51)$$

ahol, S_b a határfelület leíró függvény (i.e. $S_b=f(x,y)$) és az \bar{n} a no-flux határ normál egységvektora.

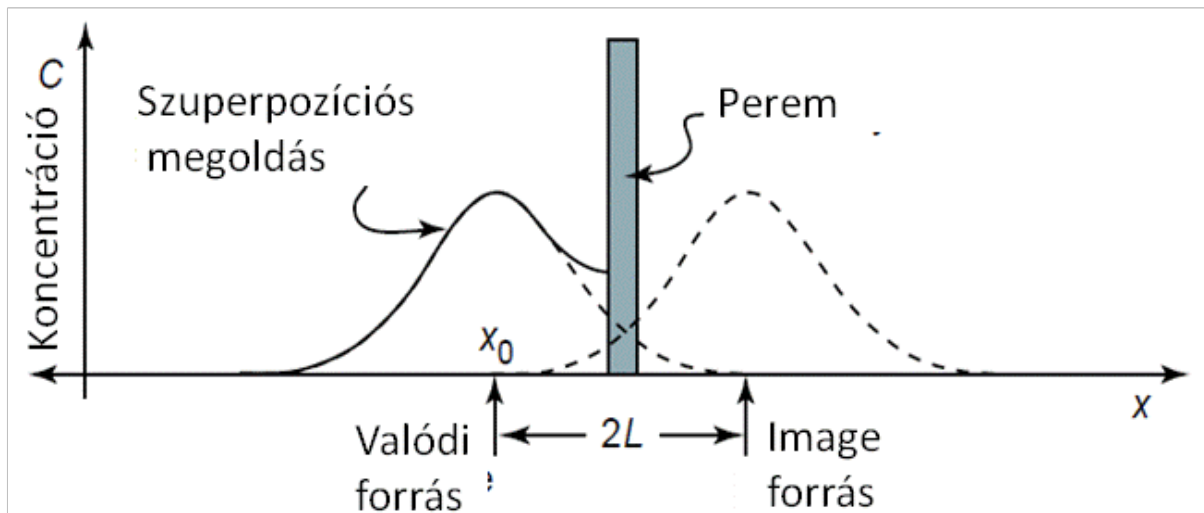
Egy dimenziós esetben a no-flux határfeltétel a következőre redukálódik.

$$\frac{\partial C}{\partial x}|_{x_b} \cdot \bar{n} = 0 \quad (2.52)$$

ahol, x_b , a határ elhelyezkedését adja meg.

Az előbbi egyenletekkel kifejezett tulajdonság nagyon hasznos a koncentráció mérések interpretálásánál, hogy eldöntsük egy adott határ esetében, ami lehet pl. egy tó aljzata, hogy az a határ áteresztő vagy nem.

Hogy a határral kapcsolatos problematikát tovább fejtsük, és megoldást találhassunk, vegyünk egy pillanatszerű pontszerű forrást az x_0 -ban elhelyezve, egy no-flux peremmel L távolságra jobbra, amint az a **19. ábra** látható.



19. ábra: A no-flux perem hatásának ábrázolása egy pillanatszerű pontszerű szennyezőforrás esetében, ahol a bal oldalon az eredeti határ nélküli megoldás látható, míg jobbra a határ reprezentálására egy image forrás van elhelyezve. A szaggatott vonal jelöli az egyes forrásokból érkező koncentrációmegoszlást, míg a folytonos vonal a szuperpozíciós megoldást (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán).

Az eredeti (perem nélküli) standard megoldásunk megengedi az adott anyagtömegnek, hogy a no-flux peremen túlra diffundáljon (amint azt a **19. ábra** szaggatott vonallal mutatja is). Azért hogy az elvesztett anyagmennyiséget visszahelyezzük, egy image forrást helyezünk el a határtól jobbra (szintén L távolságra). Ennek az image forrásnak a hatására ugyanaz az anyagmennyiség fog visszajutni a határ bal oldalára, mint amit az eredeti forrásunk a jobb oldalra juttatott. A szuperpozíció elvét alkalmazva a két koncentráció-megoszlásra (összeadva azokat) a határtól balra, megkapjuk a határoló fal leírni kívánt hatását. Amennyiben az előbbieket szerint az image forrást a no-flux határtól jobbra L távolságra helyeztük el, a megoldást a következő egyenlet adja.

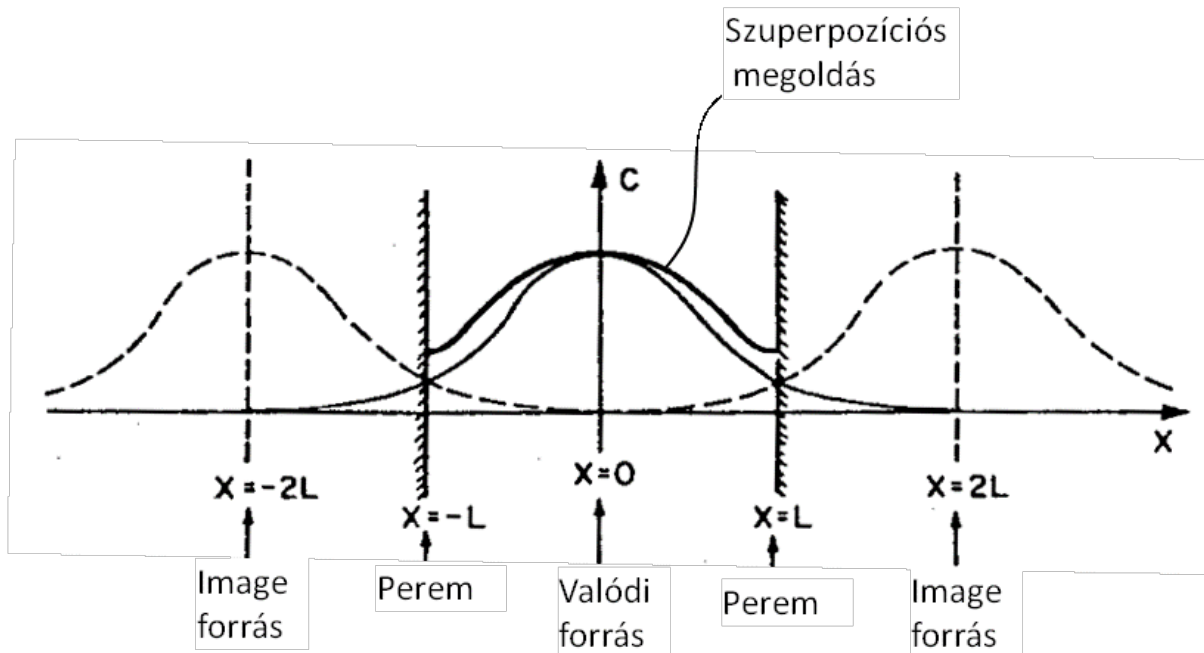
$$C(x, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \left(\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) + \exp\left(-\frac{(x-x_i)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \right) \quad (2.53)$$

ahol, $x_i = x_0 + 2 \cdot L$. Természetesen az előbbieken megadott egyenlet csak a határtól balra érvényes. A határtól jobbra, a koncentráció mindenhol zérus. Képezzük (házi feladatként) a koncentráció gradiens értékét, a $\partial C / \partial x$ -et az $x=0$ pontban, hogy bebizonyítsuk magunknak, hogy a no-flux határfeltételt kielégítettük.

Az image forrás alkalmazásának módszere meg komplikáltabbá válik, amikor több határt veszünk figyelembe. A nehézség abban áll, hogy az jobb oldali image forrásból diffundáló anyagmennyiség végül eléri a bal oldali határt és ott egy újabb image forrás elhelyezését indukálja. Általában amikor két határunk van, végtelen számú image forrás elhelyezése szükséges. A két oldalon elhelyezett határ esetét a **20. ábra** mutatja. A gyakorlatban a megoldás rendszerint már néhány image forrás elhelyezése után konvergál (Fischer et al. 1979). Pillanatszerű, pontszerű forrás esetében, amely az origóban van elhelyezve és $\pm L$ -ben van határokkal ellátva, Fischer et al. (1979) szerint az image forrásokkal történő megoldás egyenlete a következő.

$$C(x, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x+2nL)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \right) \quad (2.54)$$

Nyilvánvalóan a konvergáló megoldáshoz szükséges image források száma függ az idő skálától, amelyen a megoldást érvényesnek tekintjük. Ezt a technikát a következő példakkal és a következő fejezetekben igyekszünk majd sokkal világosabbá tenni.



20. ábra: A két oldalon elhelyezett no flux határ esete, amikor a szuperpozíciós megoldás elvileg végtelen számú image forrást igényel. A szaggatott vonal jelöli az egyes image forrásokból érkező koncentráció-megoszlást, a vékony folytonos vonal a valódi forrásból származó koncentráció-megoszlást határolás nélkül, míg a folytonos vonal a szuperpozíciós megoldást (Fischer et al. 1979 nyomán)

Egy csésze teában feloldódó cukor példája

Egy hideg téli napon kitöltünk egy csésze teát és 2 g cukrot hozzáadunk a teához, úgy hogy az egyenletes eloszlásban terüljön el a csésze fenekén. A csésze átmérője 5 cm, a magassága pedig 7 cm (a tea felszíne a csésze peremével azonos szintben van). Ha nem keverjük fel a teát, mi lesz az az időpont, amikor a koncentrációmegoszlás széle eléri majd a tea felszínét, és mikorra fog a cukor teljesen feloldódni? Hogyan válaszolhatjuk meg ezeket a kérdéseket abban az esetben, ha megkeverjük a teát?

A cukor koncentrációja fix értékkel a telítettségi koncentráción található a csésze fenekén és a kezdeti időpontban minden más pontban zérus. Ezek a feltételek azonosak az állandó koncentrációjú peremre vonatkozó megoldással, így a cukor eloszlása a z magasságú teaoszlopban a következő egyenlettel adható meg.

$$C(z, t) = C_{sat} \cdot \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \quad (2.55)$$

ahol, C_{sat} a cukor telítettségi koncentrációja a csésze fenekén.

A koncentráció megoszlás karakterisztikus magassága (ebben az esetben) arányos a $\sigma = \sqrt{2Dt}$ -vel. Tételezzük fel, hogy a koncentráció megoszlás széle akkor éri el a csésze tetejét, amikor $2 \cdot \sigma = h = 7 \text{ cm}$. Az időre megoldva az előbbi egyenletet, adódik.

$$t_{mix,bl} = \frac{h^2}{8D} \quad (2.56)$$

Nagyságrendi becslés céljából vegyük fel a diffúziós tényezőre, $D \sim 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ értéket, ekkor az előbbi egyenlettel megadott időre a következőt kapjuk.

$$t_{mix,bl} \approx 6 \cdot 10^5 s \quad (2.57)$$

Ahhoz, hogy meghatározzuk milyen sokáig tart a cukor feloldódása, ki kell számolnunk a cukorra vonatkozó tömegfluxust (anyagáramot) a $z=0$ pontban. Már korábban kiszámítottuk az anyagáram megadására érvényes hibafüggvény deriváltját az első fejezetben („A víz levegő határretegén keresztüli diffúziós fluxus példája” című részben). A cukorra vonatkozó anyagáram a $z=0$ pontban tehát a következő egyenlettel határozható meg:

$$\dot{m}(0, t) = \frac{A \cdot D \cdot C_{sat}}{\sqrt{\pi \cdot D \cdot t}} \quad (2.58)$$

ahol, az A a csésze keresztmetszeti területe, a C_{sat} pedig a telítettségi koncentráció a fenéken. A feloldódott cukor teljes mennyisége a tömeg fluxus (anyagáram, M_d) időben vett integrálja.

$$M_d = \int_0^t \frac{A \cdot D \cdot C_{sat}}{\sqrt{\pi \cdot D \cdot \tau}} d\tau \quad (2.59)$$

Az előbbi egyenletet integrálva és t -re megoldva a következő adódik.

$$t_d = \frac{M_d^2 \cdot \pi}{4 \cdot A^2 \cdot D \cdot C_{sat}^2} \quad (2.60)$$

ahol, t_d az M_d anyagmennyiség feloldódásához szükséges idő.

A kifejezés csak $t < t_{mix,bl}$ esetében érvényes, a $t_{mix,bl}$ időponton túl ugyanis számításba kell vennünk a tea felszínének határként való funkcionálását. Feltételezve, hogy $C_{sat} = 0,58 \text{ g/cm}^3$, a cukor feloldásához szükséges idő $t_d = 5 \cdot 10^4 \text{ s}$.

A tea megkeverésével jelentősen megnöveljük D értékét. Mivel a D a t -re vonatkozó egyenletben a nevezőben van, a D növelésével csökkenteni fogjuk a cukor feloldódásához és csészében való eloszlásához szükséges időt.

A határok figyelembe vétele

Az előzőekben nem tértünk ki arra az időszakra, amikor a tea felszíne már fellép egy határként és egy image forrást szükséges elhelyeznünk, hogy a jelenséget a továbbiakban helyesen tudjuk leírni. A határokat figyelembe véve a következő helyzet adódik.

A csésze oldalainak a hatását elhanyagolhatjuk, mivel feltételezzük, hogy a cukor egyenletesen oszlik meg a csésze fenekén, így ez az egyenletes koncentráció-megoszlás zérus koncentráció-gradienst eredményez x és y irányban, úgy mint

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \quad (2.61)$$

Ezek alapján nincsen diffúziós fluxus a csésze falainak irányában.

Hogy a szabad felszín hatását figyelembe vehessük, egy image forrást kell figyelembe vennünk egy állandó C_{sat} fix koncentrációval valahol a csésze fölött. A csésze fenekét $z=0$ helyként definiálva, az image forrást $z=2 \cdot h$ magasságban kell elhelyeznünk (h -val definiáltuk korábban a csésze magasságát). Figyelembe véve azt a szabályt, hogy

$$C(z, \infty) \rightarrow C_{sat} \quad (2.62)$$

A cukor koncentráció megoszlásának szuperpozíciós megoldása a következő lehet:

$$C(z, t) = C_{sat} \cdot \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{2h}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{2h-z}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \quad (2.63)$$

2.3. Mintapéldák

2.3.1. Folytatás a diffúzió értelmezése egy tó példáján.

Térjünk vissza az előző fejezetben vett arzén szennyezéses példához a kis tó esetében (adaptálva Nepf (1995)). További vizsgálatokat végezve úgy találtuk, hogy egy édesvízi forrás fakad a tó fenekén, amelynek a vízhozama 10 l/s. A jelenség egy advekciós folyamatot hoz be a példába, vizsgálódjunk tehát a továbbiakban az advekció figyelembevételével.

Az advekció figyelembevétele: Az advekciós folyamat itt a forrás által a vízoszlopon keresztül történő anyagáram. Feltételezzük, hogy a belépő forrásvíznek nincs jelentős sűrűség különbsége (így a felhajtóerő nem játszik szerepet). A forrásvíz pedig miután szétterjed a fenéken egységes sebességgel emelkedik (vegyük figyelembe, hogy a z tengely irányultsága lefelé volt pozitív, így a felfelé irányuló áramlás mínusz z irányba történik).

$$v_a = -\frac{Q}{A} = -5 \cdot 10^{-7} \text{ m/s} \quad (2.64)$$

Az arzén koncentráció a termokline zónában 8 $\mu\text{g/l}$, amely alapján a következő advektív fluxus számítható.

$$q_a = C \cdot v_a = -4 \cdot 10^{-3} \mu\text{g}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}) \quad (2.65)$$

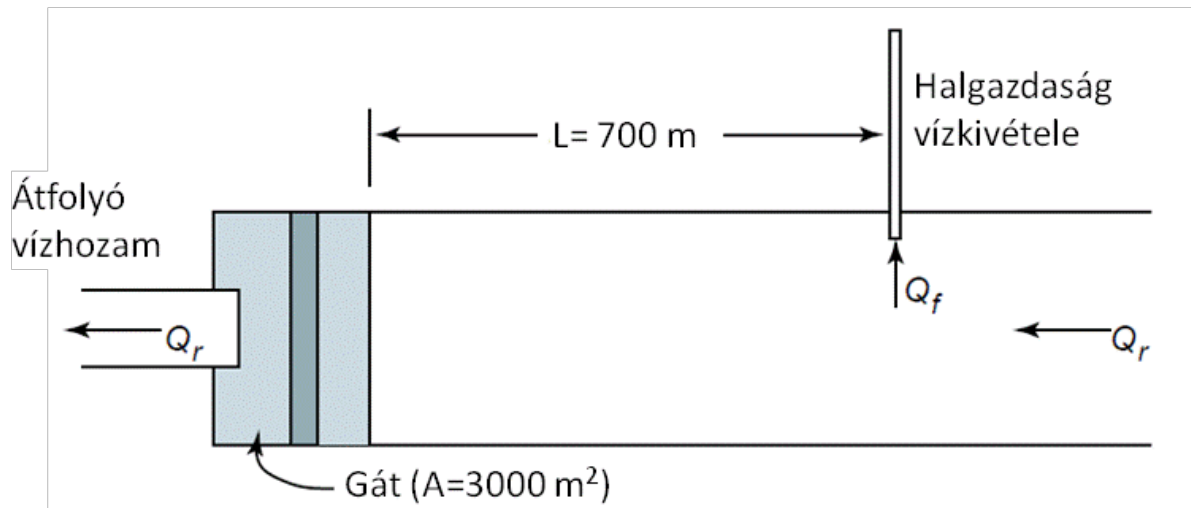
Az advekciós fluxust az előző fejezetben számított turbulens diffúziós fluxussal együtt figyelembe véve a következő nettó fluxus számítható a termokline zónán keresztül.

$$J_z = -4 \cdot 10^{-3} + 2,93 \cdot 10^{-3} = -1,07 \cdot 10^{-3} \mu\text{g}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}) \quad (2.66)$$

Az előbbi egyenletben a mínusz előjel a nettó felfelé irányuló fluxust jelzi. Ezek alapján bár a nettó diffúziós fluxus lefelé mutat, a fenéken megjelenő forrás által indukált advekciós fluxus a nettó szennyezőanyag terjedés irányát módosítja, és így a termokline zónában jelentkező nettó fluxus felfelé mutat. A következtetésünk tehát az advekció figyelembevételével megváltozott, mivel most már az arzén forrását a fenéken valószínűsítjük. A termokline zóna fölötti víztest arzén koncentráció mindaddig fog emelkedni, amíg a termokline zónában létező diffúziós fluxus elegendően nagy nem lesz, hogy kompenzálni tudja a tóban felfelé irányuló advekciós fluxust. Amennyiben ez az egyensúly bekövetkezik, a rendszer elér egy állandósult (steady-state) állapotot.

2.3.2. Vízkivétel védelme

Vegyünk egy tározótavat. Egy megújítási projekt keretében egy tó gátjának felszínét réz szulfáttal kezelték, hogy kedvezőtlen alga megtelepedést meggátolják. Egy halgazdaság halnevelője vízkivétellel rendelkezik a gát fölött a tározóból és megbízást adtak, annak meghatározására, hogy vajon a réz szulfátos kezelés hatással lesz –e a vízkivétel vízminőségére. Tapasztalatok alapján a halnevelő vízkivételében a maximális még tolerálható réz koncentráció $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ mg/l}$. Az adott probléma sematikus helyszínrajzát a **21. ábra** mutatja.



21. ábra: A tározó helyszínrajza, a vízkivétel helyével a réz szennyezés mintapéldájához kapcsolódóan. (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán)

A réz-szulfátot egyenletes eloszlásban alkalmazzák a gát felületén, a kijuttatás időtartama körülbelül egy óra. Így mi modellezhetjük a réz szennyezést, mint egy pillanatszerű forrás egyenletes megoszlását gát felületén. A réz szulfát kijuttatását végző vállalkozóval történt tárgyalás után 1 kg-ban határozható meg a gát felszínére kerülő réz mennyisége. Mivel a projekt időszaka a tározó tavaszi felkeveredésének idejére tehető (bimiktikus rendszer, évente kétszeri felkeveredés a hőmérséklet változás miatt), ezért a szennyezőanyag esetében feltételezhetjük a vertikális értelemben vett egyenletes elkeveredést. A gát kereszt-szelvényében a szennyezés szempontjából figyelembe vett keresztmetszeti terület a példa során $A=3000 \text{ m}^2$. A korábbi nyomjelzős vizsgálat alapján meghatározott turbulens diffúziós tényező $D=2 \text{ m}^2/\text{s}$. Az átlagos advекciós sebesség a vízkivétel helyén a tározóban $u=0.01 \text{ m/s}$.

Az advекció vagy a diffúzió a domináns?

A tározóbeli réztranszport potenciális veszélyének megítélése céljából végezzünk először arra vonatkozóan vizsgálatot, hogy vajon a szennyezés terjedésében az advекció vagy a diffúzió a domináns folyamat. A kérdés eldöntéséhez számítsuk ki a Peclet- számot, amely jelen esetben a következő értéket veszi fel.

$$Pe = \frac{D}{u \cdot L} = 0.3 \quad (2.67)$$

A Peclet-szám nagysága szerint a diffúzió közepesen fontos, így a réz felvízi irányban történő migrációjának potenciális lehetősége fennáll.

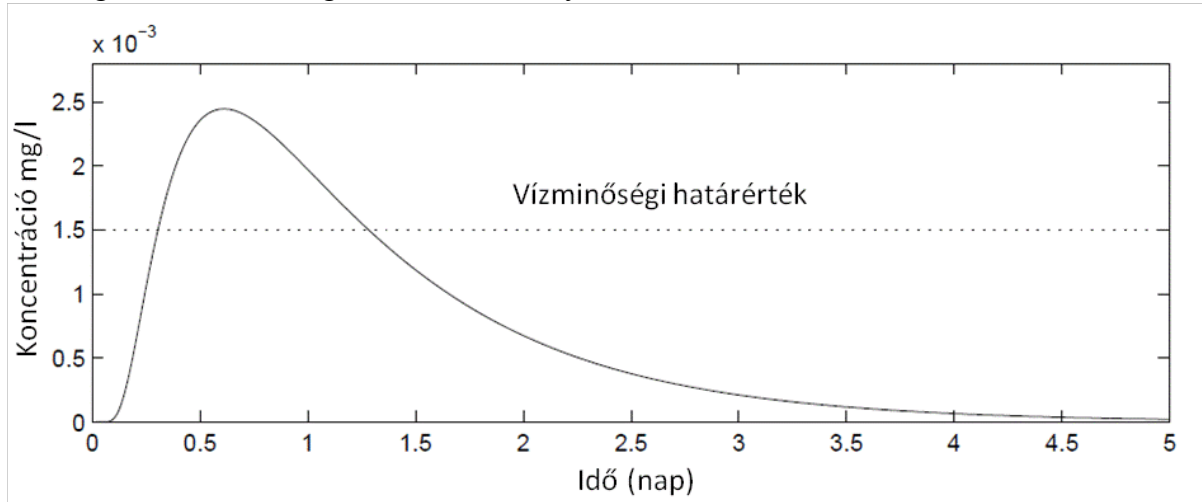
Maximális koncentráció meghatározása a vízkivételnél.

Mivel az előző, Peclet-számra vonatkozó vizsgálatainak alapján a réz felvíz felé történő migrációjának lehetősége nem zárható ki a diffúzió által, szükséges előrejeleznünk a réz koncentrációját a vízkivétel helyén. Vegyük fel a gát helyén az $x=0$ kiindulópontját a koordináta-rendszerünknek és az x alvízi irányban, lefelé növekedjen. A koncentráció pillanatszerű szennyezést és egyenletes koncentrációmegoszlást a gát felszínén figyelembe véve a következő egyenlettel számítható ki a gáttól vett adott távolságra az idő függvényében.

$$C(x_i, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(-\frac{(x_i - ut)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \quad (2.68)$$

ahol, x_i , a vízkivétel helye (-700 m). Az előbbi egyenlet (2.68) szerinti, réz koncentráció időbeli alakulására vonatkozó megoldást a 22. ábra mutatja. Az ábrából látható, hogy a maximális réz

koncentráció a vízkivételnél kb. 0.6 nap múlva várható, $2,4 \cdot 10^{-3}$ mg/l értékkel. A réz koncentráció értéke kb. 1 nap időtartamig, a 0,3 nap és az 1,3 nap közötti időszakban meg fogja haladni a megengedhető maximális koncentrációt a vízkivétel helyén. Így a halnevelőnek előzetesen intézkednie kell, hogy a szennyezést elkerülje (pl. vízkivétel szüneteltetése a kérdéses időszakban). Házi feladatként kérdés, hogy milyen egyéb tényezők befolyásolhatják a réz mérgezés valószínűségét a vízkivétel helyén?



22. ábra: A réz koncentráció megoszlása a halnevelő vízkivételének helyén az idő függvényében. A pontozott vonal a maximális megengedhető réz koncentrációt mutatja ($1,5 \cdot 10^{-3}$ mg/l). (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán)

A fejezetben tanultak rövid összefoglalása.

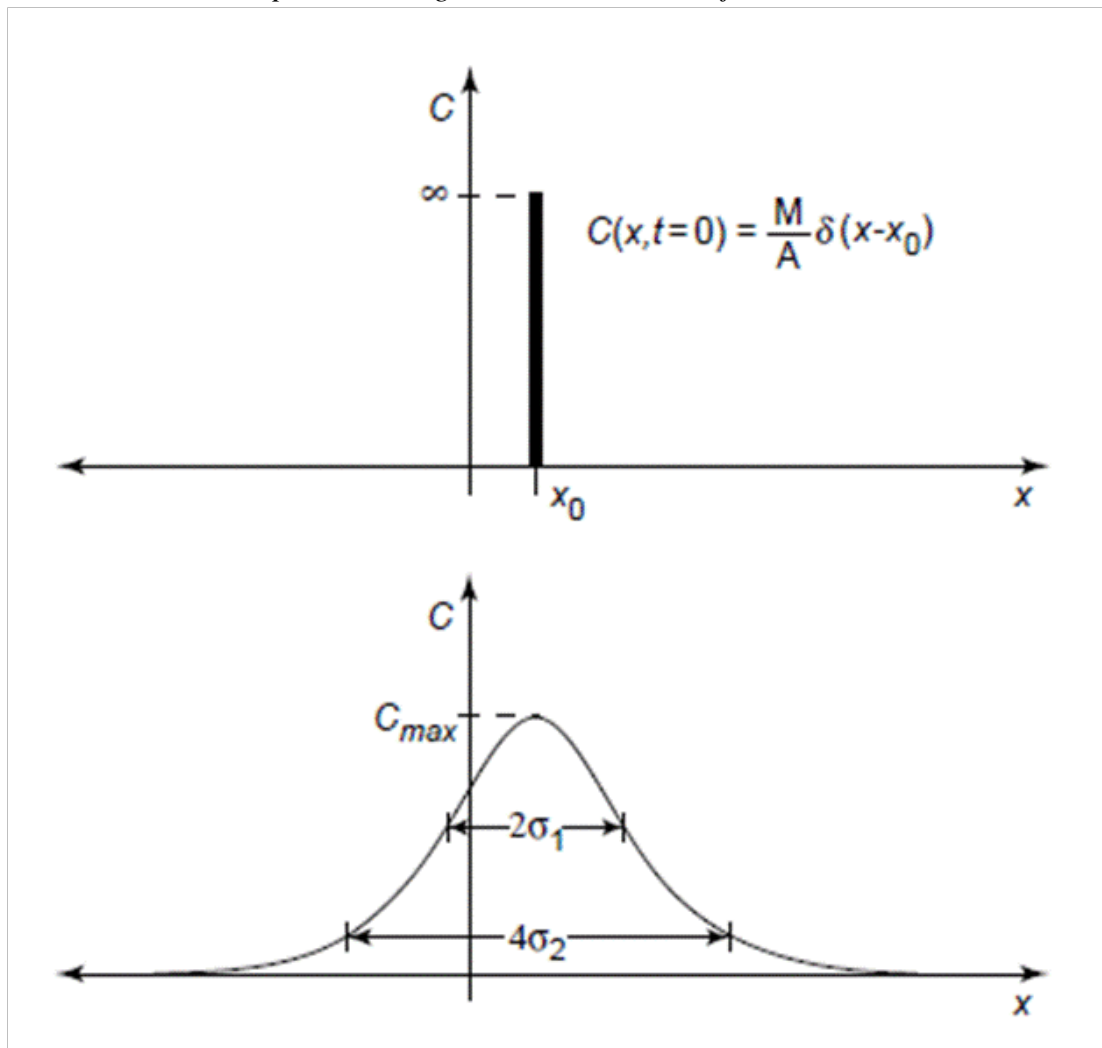
A fejezetben levezettük az advekciós-diffúziós egyenletet a szuperpozíció elvét felhasználva, ezen kívül egyéb módszerekkel is megismerkedhettünk, amelyek segítségével a fejezetben kapott parciális differenciál egyenleteket megoldhattuk. A stagnáló környezetre kapott megoldásokat láthattuk, hogy könnyedén módosíthatjuk az advekció figyelembe vételére egy mozgó koordináta-rendszert alkalmazva. Megoldásokat közöltünk változó és fix koncentrációjú eloszlások esetében és az image forrás módszert vezettük be a nem áteresztő (no-flux) határok figyelembevételére. Mérnöki becslésekben történő felhasználásra tettünk javaslatot a Peclet-szám, a karakterisztikus hossz és a jellemző advekciós és diffúziós időskálák értékelésével.

Melléklet. A diffúziós egyenlet megoldásai jellemző esetekben

A fejezet végén ábrákkal és egyenletekkel illusztráljuk a diffúziós egyenlet jellemző megoldásait, hogy szemléletesebbé tegyük és egyben összefoglaljuk egyenletekbe foglalva és vizuálisan is a fejezetben tanultakat.

Pillanatszerű, pontszerű forrás példája végtelen domain

A probléma kiinduló állapota és a megoldás sematikus ábrája



23. ábra: Pillanatszerű, pontszerű forrás egy dimenziós példája végtelen térben (forrás Socolofsky-Jirka 2005)

A megoldás egyenletekben:

$$C(x, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right)$$

$$C_{\max}(t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}}$$

$$q_x(x, t) = \frac{M \cdot (x - x_0)}{2 \cdot A \cdot t \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right)$$

A megoldás kiterjedése:

Legyen

$$\sigma = \sqrt{2 \cdot D \cdot t} \text{ és } (2 \cdot \sigma)^2 = 8 \cdot D \cdot t$$

ekkor, $x_0=0$ -ra

$$C(\pm\sigma, t) = 0,61 \cdot C_{\max}(t)$$

Legyen

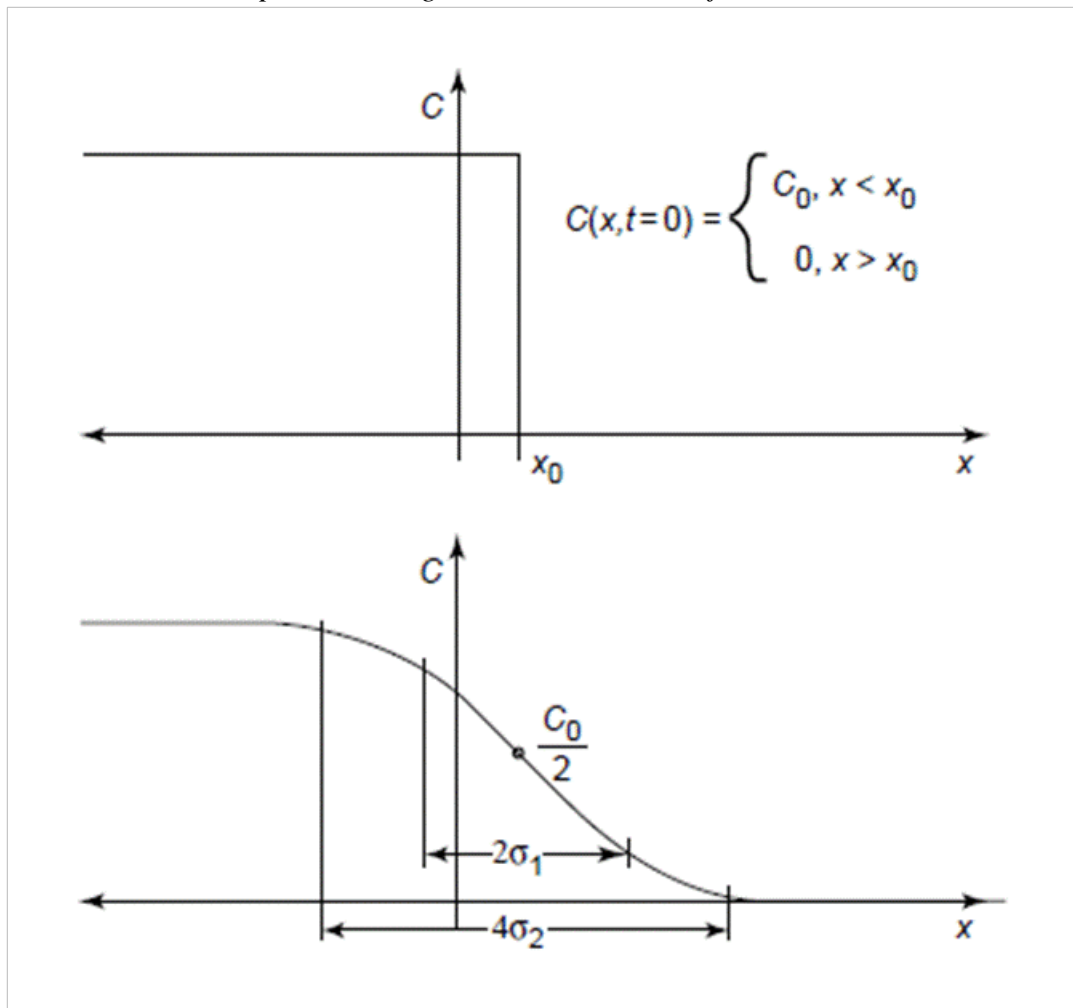
$$\sigma = \sqrt{2 \cdot D \cdot t} \text{ és } (4 \cdot \sigma)^2 = 32 \cdot D \cdot t$$

ekkor, $x_0=0$ -ra

$$C(\pm 2\sigma, t) = 0,14 \cdot C_{\max}(t)$$

Pillanatszerű, térben megoszló forrás példája, végtelen domain

A probléma kiinduló állapota és a megoldás sematikus ábrája



24. ábra: Pillanatszerű, térben megoszló forrás egy dimenziós példája végtelen térben (forrás Socolofsky-Jirka 2005)

A megoldás egyenletekben:

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \cdot \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x - x_0}{\sqrt{4Dt}} \right) \right]$$

$$C \max(t) = C_0$$

$$q_x(x, t) = \frac{C_0 \cdot \sqrt{D}}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot t}} \cdot \exp \left(-\frac{(x-x_0)^2}{4 \cdot D \cdot t} \right)$$

A megoldás kiterjedése:

Legyen

$$\sigma = \sqrt{2 \cdot D \cdot t} \text{ és } (2 \cdot \sigma)^2 = 8 \cdot D \cdot t$$

ekkor, $x_0=0$ -ra

$$C(+\sigma, t) = 0,16 \cdot C_0$$

$$C(-\sigma, t) = 0,84 \cdot C_0$$

Legyen

$$\sigma = \sqrt{2 \cdot D \cdot t} \text{ és } (4 \cdot \sigma)^2 = 32 \cdot D \cdot t$$

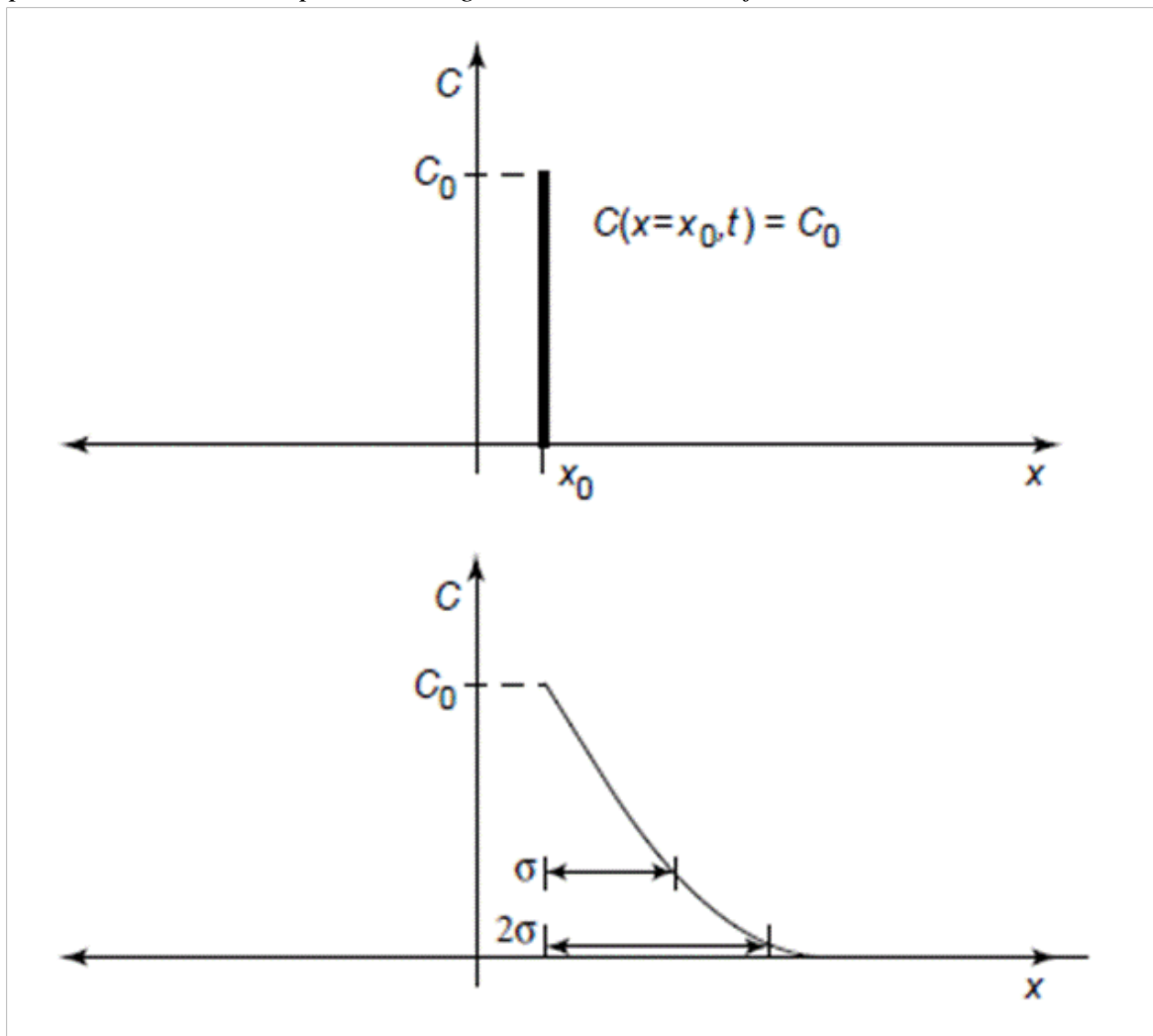
ekkor, $x_0=0$ -ra

$$C(+2\sigma, t) = 0,02 \cdot C_0$$

$$C(-2\sigma, t) = 0,98 \cdot C_0$$

Fix koncentrációjú küszöb végtelen féltérben

A probléma kiinduló állapota és a megoldás sematikus ábrája



25. ábra: Fix koncentrációjú küszöb egy dimenziós példája végtelen féltérben (forrás Socolofsky-Jirka 2005)

A megoldás egyenletekben:

$$C(x > x_0, t) = C_0 \cdot \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x - x_0}{\sqrt{4Dt}} \right) \right]$$

$$C \max(t) = C_0$$

$$q_x(x > x_0, t) = \frac{2 \cdot C_0 \cdot \sqrt{D}}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot t}} \cdot \exp \left(-\frac{(x - x_0)^2}{4 \cdot D \cdot t} \right)$$

A megoldás kiterjedése:

Legyen

$$\sigma = \sqrt{2 \cdot D \cdot t} \text{ és } \sigma^2 = 2 \cdot D \cdot t$$

ekkor, $x_0=0$ -ra

$$C(+\sigma, t) = 0,32 \cdot C_0$$

$C(-\sigma, t)$ = nem definiálható

Legyen

$$\sigma = \sqrt{2 \cdot D \cdot t} \text{ és } (2 \cdot \sigma)^2 = 8 \cdot D \cdot t$$

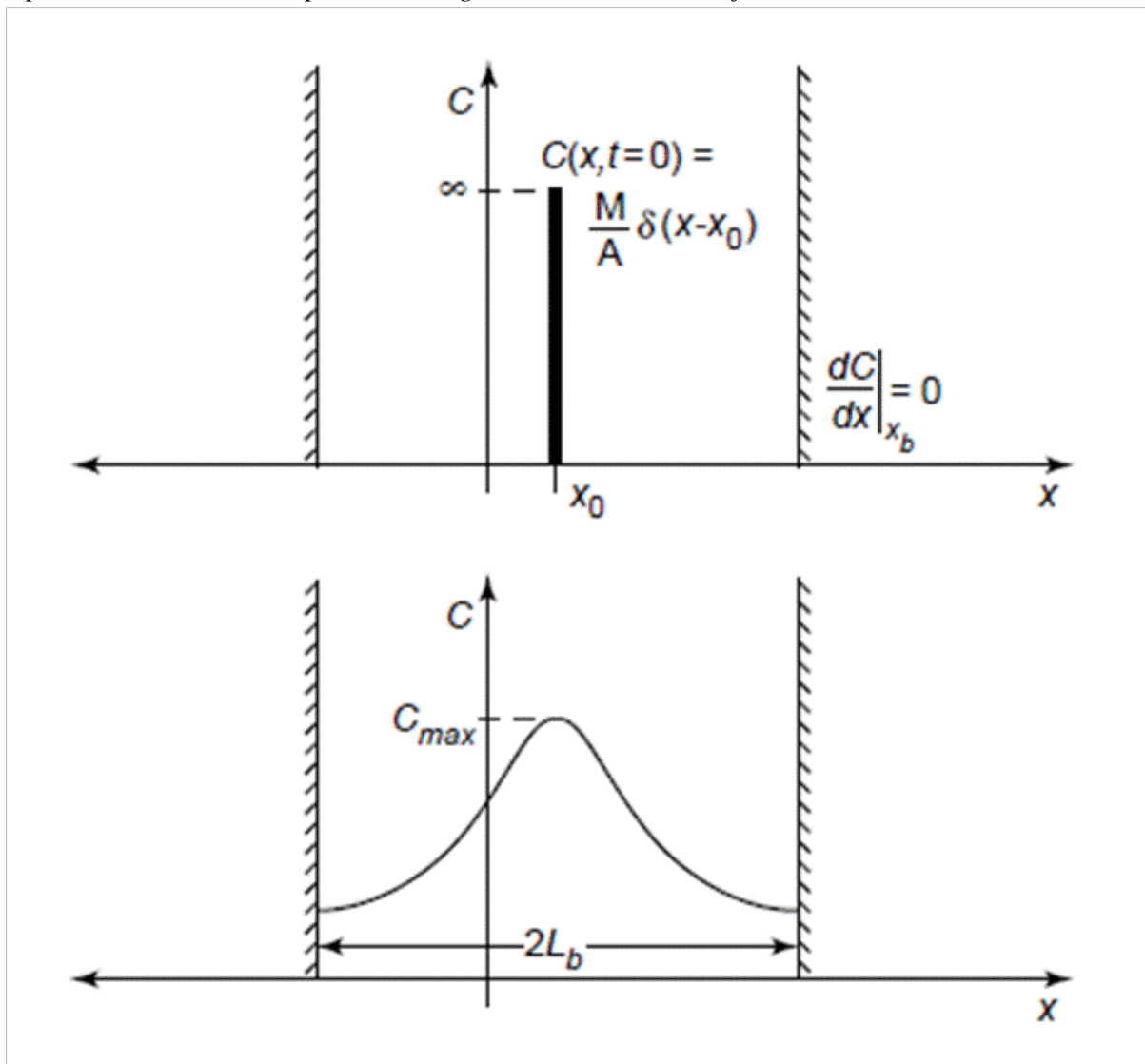
ekkor, $x_0=0$ -ra

$$C(+2\sigma, t) = 0,05 \cdot C_0$$

$C(-2\sigma, t)$ = nem definiálható

Pillanatszerű, pontszerű forrás példája két oldalról át nem eresztő határral

A probléma kiinduló állapotja és a megoldás sematikus ábrája



26. ábra: Pillanatszerű, pontszerű forrás egy dimenziós példája két oldalról át nem eresztő határral (forrás Socolofsky-Jirka 2005)

A megoldás egyenletekben:

$$C(x, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-x_0+2nL_b)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right)$$

$$C_{\max}(t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2nL_b)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right)$$

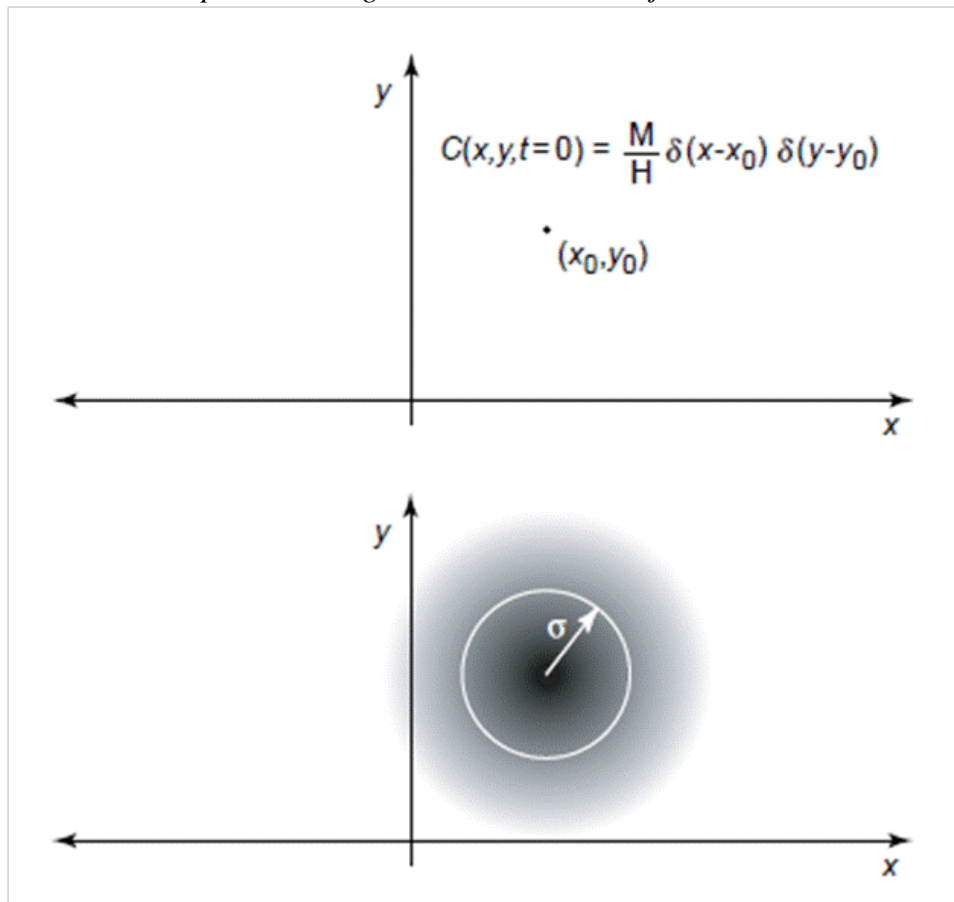
$$q_x(x, t) = \frac{M}{2 \cdot A \cdot t \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x - x_0 + 2nL_b) \cdot \exp\left(-\frac{(2nL_b)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right)$$

Kiegészítés:

Az image forrást használva az első image a határ külső oldalán az $x_0 = \pm 2 \cdot L_b$ -re helyezendő.

Pillanatszerű, pontszerű forrás 2D példája, végtelen domain

A probléma kiinduló állapota és a megoldás sematikus ábrája



27. ábra: Pillanatszerű, pontszerű forrás 2D példája végtelen térben (forrás Socolofsky-Jirka 2005)

A megoldás egyenletekben:

$$C(x, t) = \frac{M}{4 \cdot \pi \cdot H \cdot t \cdot \sqrt{D_x \cdot D_y}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4 \cdot D_x \cdot t} - \frac{(y-y_0)^2}{4 \cdot D_y \cdot t}\right)$$

$$C_{\max}(t) = \frac{M}{4 \cdot \pi \cdot H \cdot t \cdot \sqrt{D_x \cdot D_y}}$$

$$q_x(x, t) = \frac{M}{8 \cdot \pi \cdot H \cdot t^2 \cdot \sqrt{D_x \cdot D_y}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4 \cdot D_x \cdot t} - \frac{(y-y_0)^2}{4 \cdot D_y \cdot t}\right) \cdot ((x-x_0) \cdot \bar{i} + (y-y_0) \cdot \bar{j})$$

ahol, H a domain z irányú kiterjedése.

A megoldás kiterjedése:

Legyen

$$D_x = D_y, \sigma = \sqrt{2 \cdot D \cdot t}, (2 \cdot \sigma)^2 = 8 \cdot D \cdot t \text{ és } r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$$

ekkor, $r = \sigma$ -ra

$$C(\sigma, t) = 0,61 \cdot C_{\max}(t)$$

Legyen

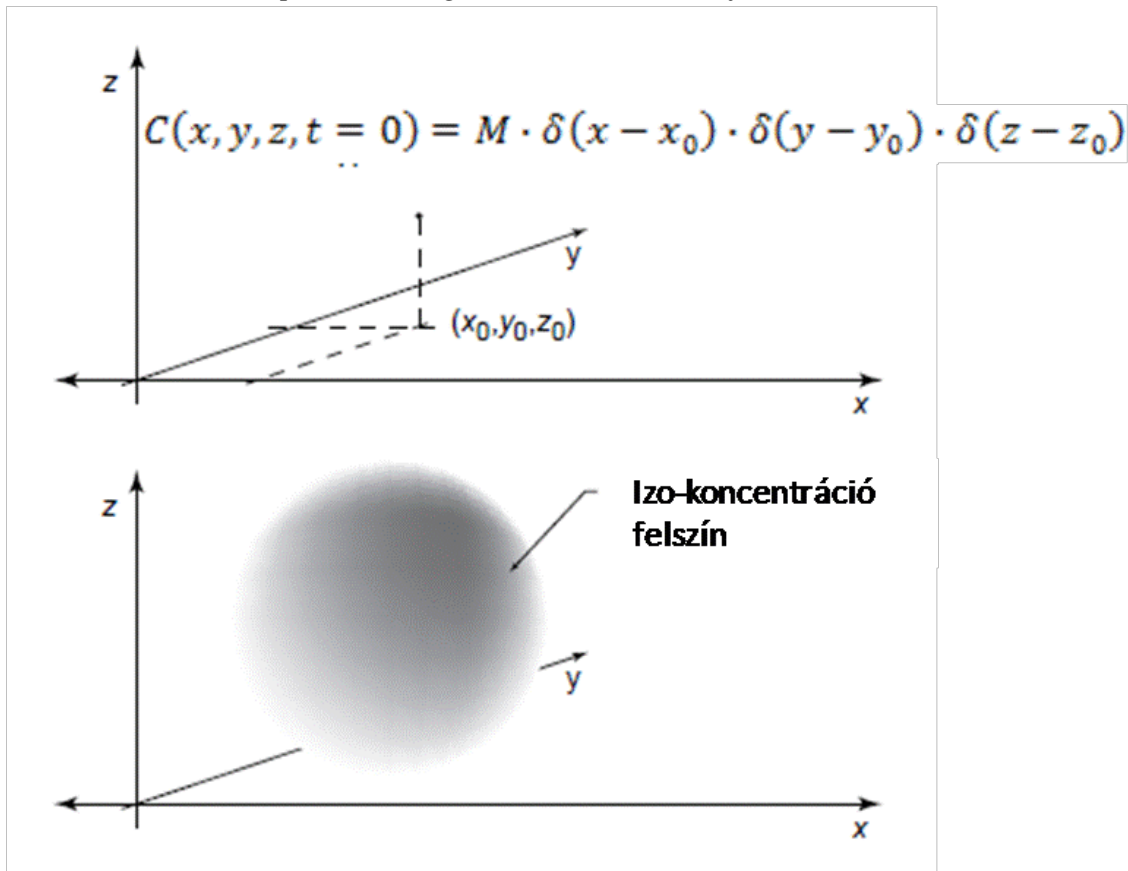
$$D_x = D_y, \sigma = \sqrt{2 \cdot D \cdot t}, (4 \cdot \sigma)^2 = 32 \cdot D \cdot t \text{ és } r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$$

ekkor, $r = 2 \cdot \sigma$ -ra

$$C(2\sigma, t) = 0,14 \cdot C_{\max}(t)$$

Pillanatszerű, pontszerű forrás 3D példája, végtelen domain

A probléma kiinduló állapota és a megoldás sematikus ábrája



28. ábra: Pillanatszerű, pontszerű forrás 3D példája végtelen térben (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán)

A megoldás egyenletekben:

$$C(x, t) = \frac{M}{4 \cdot \pi \cdot t \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot t \cdot D_x \cdot D_y \cdot D_z}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4 \cdot D_x \cdot t} - \frac{(y-y_0)^2}{4 \cdot D_y \cdot t} - \frac{(z-z_0)^2}{4 \cdot D_z \cdot t}\right)$$

$$C_{\max}(t) = \frac{M}{4 \cdot \pi \cdot t \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot t \cdot D_x \cdot D_y \cdot D_z}}$$

$$q_x(x, t) = \frac{M}{8 \cdot \pi \cdot t^2 \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot t \cdot D_x \cdot D_y \cdot D_z}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4 \cdot D_x \cdot t} - \frac{(y-y_0)^2}{4 \cdot D_y \cdot t} - \frac{(z-z_0)^2}{4 \cdot D_z \cdot t}\right) \cdot \left((x-x_0) \cdot \bar{i} + (y-y_0) \cdot \bar{j} + (z-z_0) \cdot \bar{k}\right)$$

A megoldás kiterjedése:

Legyen

$$D_x = D_y = D_z, \quad \sigma = \sqrt{2 \cdot D \cdot t}, \quad (2 \cdot \sigma)^2 = 8 \cdot D \cdot t \quad \text{és}$$

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

ekkor, $r = \sigma$ -ra

$$C(\sigma, t) = 0,61 \cdot C_{\max}(t)$$

Legyen

$$D_x = D_y = D_z, \quad \sigma = \sqrt{2 \cdot D \cdot t}, \quad (4 \cdot \sigma)^2 = 32 \cdot D \cdot t \quad \text{és}$$

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

ekkor, $r = 2 \cdot \sigma$ -ra

$$C(2\sigma, t) = 0,14 \cdot C_{\max}(t)$$

Irodalomjegyzék:

Fischer, Hugo. B., List, E. John., Koh, Robert. C. Y., Imberger, Jörg. és Brooks, Norman. H. (1979): *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press, New York, NY., ISBN 0-12-258150-4.

Lajos Tamás (2008): *Az áramlástan alapjai*, egyetemi tankönyv, 4. átdolgozott és bővített kiadás, Budapest.

Nepf, H. M. (1995): *Course notes and problem sets, MIT Course 1.77: Water Quality Control*

Scott A. Socolofsky – Gerhard H. Jirka (2005): *Special Topics in Mixing and Transport Processes in the Environment*, Egyetemi Jegyzet, Texas A&M University.

3. Elkeveredési folyamatok vízfolyásokban: Turbulens diffúzió és diszperzió

Bevezetés: a fejezetben megtanulandóak elővezetése

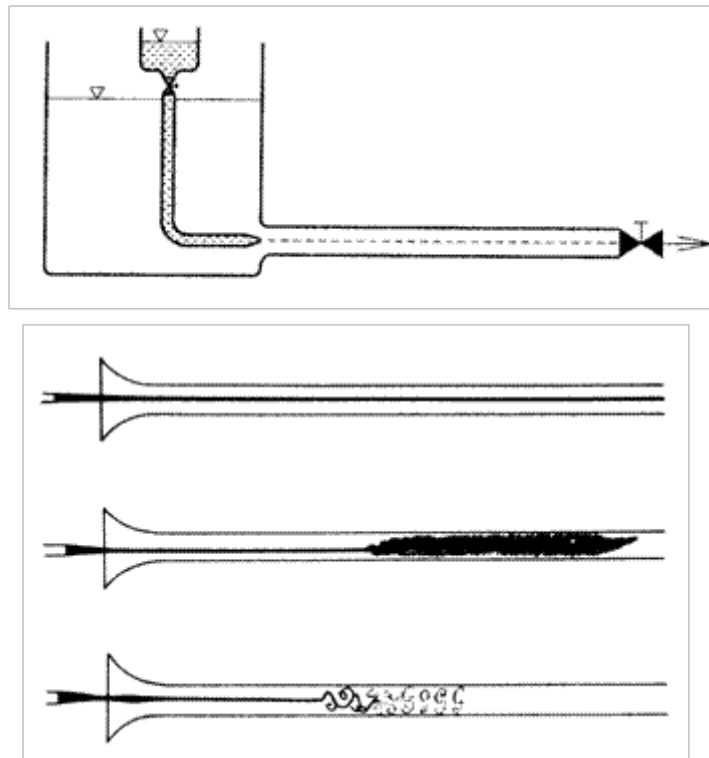
Az előző fejezetekben megismertük az advekción és molekuláris diffúzió folyamatait, és láttunk néhány példát, amelyben az ún. „turbulens diszperziós” tényezőt használtuk. Ezekben az esetekben a vezérlő egyenletünk alakja teljesen megegyezett a korábban tanulttal, viszont a molekuláris diffúziós tényezőnél nagyobb elkeveredést jellemző faktorról számoltunk. A természetes vízfolyásokban jelentkező áramlások nem egyenletes eloszlású sebességmezővel jellemezhetők, ezeknek a gyorsan változó sebességnek a következtében az elkeveredés sokkal gyorsabban megy végbe, mint az kizárólag a molekuláris diffúziós tényező által vezérelt folyamatokban előfordul. Ebben a fejezetben levezetjük erre a nem egyenletes sebességeloszlásra érvényes egyenletet, hogy bemutassuk ennek a hatásait az elkeveredésre. Először, a véletlenszerű, turbulens sebességmező hatásait taglaljuk. Másodikként megvizsgáljuk a diffúzió (molekuláris vagy turbulens) és a nyíró sebesség profil együttes hatását, hogy létrehozzuk a diszperzióra vonatkozó egyenletünket. Minden egyes esetben megtartjuk a vonatkozó egyenleteink előző fejezetekben levezetett formáját, de az elkeveredést jellemző tényezők nagyságrendekkel nagyobbak lesznek, mint a molekuláris diffúziós tényezők voltak.

A turbulencia folyamatának leírásával kezdjük a fejezetet és elemezzük annak hatását a szennyezőanyagok transzportjára. Ezek után létrehozzuk a turbulens áramlásra vonatkozó új advektív diffúziós egyenletünket és megmutatjuk, hogy miért írható le a turbulencia a szokásos advektív diffúziós egyenletünkkel, de nagyobb turbulens diffúziós tényezőt használva. Ezek után átnézzük a nyíró sebesség profil hatásait a szennyezőanyagok transzportjára és levezetjük a hosszirányú diszperzióra vonatkozó egy dimenziós egyenletünket. A fejezetet egy nyomjelzős vizsgálat bemutatásával zárjuk, amelyben a vízfolyásokra jellemző hatékony elkeveredést jellemző diszperziós tényezőket számítunk.

3.1. Turbulencia és elkeveredés értelmezése

Az 1800-as évek vége felé egy Osborne Reynolds nevű angol fizikus a csőben áramló víz jellemzőit vizsgálta nyomjelző anyagot használva. Ez volt az első, úttörő jellegű turbulenciával foglalkozó kísérlet és az elemzése során kidolgozott dimenzió nélküli számot róla a Reynolds szám (Re) elnevezéssel látták el. Érdekes észrevétel, hogy az első turbulenciával foglalkozó kutatás tulajdonképpen a szennyezőanyag terjedés példáján került előtérbe, ezért nem is véletlen, hogy a turbulenciát a szennyezőanyag transzportfolyamatok esetében egy fontos befolyásoló faktornak tételezzük fel.

Az eredeti kísérleti elrendezéshez hasonló látható a **29. ábra**, amely szerint az ábrázolt tartályból szabályozható mennyiségű sűrűségű (ρ) és viszkozitású (μ , dinamikai viszkozitás) víz áramlik ki. A d átmérőjű, üvegből készült kifolyócső tengelyébe egy másik, vékonyabb csőven keresztül megfestett folyadékot (nyomjelzőt) vezetünk be. Ha a folyadék sebessége kicsi, a festett folyadékszál végighúzódik a folyadék tengelyében, jól megkülönböztethetően az átlátszó víztől (**29. ábra** felső kép) és ahogy a sebességet növeljük az áramlásban a nyomjelző egy sebességhatár átlépése után gomolyogni kezd, majd a gomolyás erőteljesebb lesz (**29. ábra** lefelé haladva) és az elkeveredés rövid távon belül bekövetkezik.



29. ábra: A Reynolds-féle kísérlet szemléltetése (felső ábra kísérleti elrendezés, felső cső laminális áramlás, majd lefelé haladva a turbulencia hatása egyre erősödik). (Lajos 2008 és Reynolds 1883 nyomán)

Reynolds (1883)-as eredeti cikkében az alábbiakat írja:

A kísérletet három csövön végeztem. Mindegyik egyenként 4 láb és 6 inch (1,37 m) hosszú volt, és a bemeneti oldalukon egy trombita fúvókájához illesztettem őket, a zavarás kiküszöbölése céljából. A vizet egy nagy üvegtartályból adagoltam, amelybe a csövek belemerültek, az elrendezés olyan volt, hogy az erősen színezett vízből származó festékcsíkok vagy csíkok a csövekbe a vízzel együtt léptek be.

A kísérlet általános eredményei a következők voltak:

1. Amikor a sebességek megfelelően alacsonyak voltak, a színezett csík egy jól kivehető egyenes vonal formájában húzódott végig a csövön.
2. Ha a tartályban lévő víz nem lenne eléggé nyugodt, megfelelően alacsony sebességeknél, a festékcsíkok eltolódnak, de nem jelentkeznek kanyarulatok (gomolygóság).
3. Ahogyan a sebességeket kis lépésekben növelte, egy bizonyos pontján a csőnek, mindig egy jelentősebb távolságra a fúvókától, a festék sáv egyszer csak elkeveredett a környező vízzel és betöltötte az áramló keresztmetszet egészét a használt színnel. Bármilyen mértékű növelése a sebességnek az áttörési pont közeledését okozta a szívóka felé, de nem volt olyan alkalmazott sebesség, amivel sikerült volna elérni a fúvókát. A csöveget elektromos szikrával megvilágítva, a keskeny színcsíkok többé kevésbé pontosan leírható gomolygása vált láthatóvá, örvényességet mutatva.

Az első esetben leírták az alacsony sebességeknél kialakuló lamináris áramlásra vonatkozókat. A vízrészecskék ebben az esetben párhuzamos sávokban mozognak egymáshoz képest és a zavarásokat a viszkozitás megszünteti. Az egyetlen lehetőség, amellyel a színezőanyag laterálisan szét tud terjedni a lamináris áramlásban az a molekuláris diffúzió. Így sokkal hosszabb cső lenne szükséges ahhoz, hogy a molekuláris diffúzió egyenletesen szét tudja osztani a cső keresztmetszetében egyenletesen a nyomjelző anyagot.

A 2. és 3. pont szerinti nagyobb sebességeknél az áramlás turbulens, a folyadékresztek instabillá válnak, az örvények méretskálája kezd kifejlődni, és a zavarások az instabilitás szerint kezdenek

növekedni. A nyomjelző anyag, amelyik passzívan többé-kevésbé követi a folyadékrészek mozgását, az örvények növekedésének megfelelő gyorsasággal elkeveredik a keresztmetszvény mentén és turbulens áramlással tölti meg a csövet. Az elektromos szikrával végzett kísérletek megmutatták, hogy a nyomjelző az örvények alakját jól mutatja. Egy bizonyos idő múlva azonban az örvények növekednek és széttöredeznek, mivel a továbbiakban nem áll fenn már az az erős koncentráció gradiens, amely az örvényekben lévő és közvetlenül mellettük elhelyezkedő folyadékrészek között kezdetben jellemző. Ebben az időpillanatban a nyomjelző anyag már jól elkeveredett és az elkeveredés többé-kevésbé véletlenszerűvé vált (annak ellenére, hogy még mindig az egyes diszkrét örvények által vezérelt).

Reynolds összefoglalva az eredményeit, megállapította, hogy az áramlásnak az előbbieken bemutatott karakterisztikus változása egy dimenzió nélküli számmal jellemezhető: $Re = u \cdot l / \nu$, ahol az u a csőbeni áramlás sebessége, l a cső átmérője és ν a folyadékra jellemző kinematikus viszkozitás. A turbulencia pedig a magasabb Re értékeknél jellemző. A turbulencia fő következménye, hogy hatására növekszik az impulzus és az anyag transzportja.

3.1.1. A turbulencia matematikai leírása

Sok kutatást végeznek a turbulencia tématerületén, ezek összefoglalást és az itt következők részletesebb leírását megtalálhatjuk pl. Lajos 2008, Kundu-Cohen 2002, stb.

Ebben az alfejezetben a turbulencia egy speciális esetét a homogén turbulenciát tárgyaljuk. A homogén kifejezés jelentése, hogy az áramlás statisztikai jellemzői állandóak (stacionerek), persze az áramlás ettől még lehet nagymértékben szabálytalan. Ezek a homogén statisztikai jellemzők általában a mért sebességek segítségével leírhatók a turbulens áramlási tér egy pontjában (Ez az Euler-i szemléletmód). Hogy megérthessük a turbulencia Euler-i szemléletmóddal leírt tulajdonságait, hasznos ha először a Lagrange-i koordinátarendszerhez kötött szemléletmódot alkalmazva követünk egy folyadékrészecskét (Sokolofsky-Jirka 2005). Hogy jobban megértsük a két szemléletmód közötti különbséget nézzük röviden az egyes megközelítéseket:

A Lagrange-féle szubsztanciális módszer egy kiválasztott folyadékrészecske helyzetét adja meg a kezdőhelyzet és az idő függvényében:

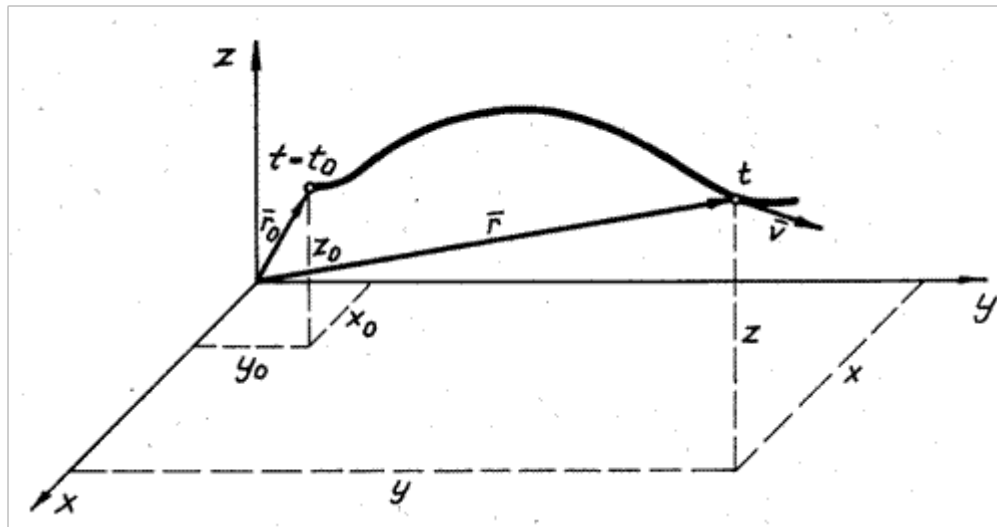
$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{r}}_0, t) \quad (3.1)$$

ahol, $\bar{\mathbf{r}}_0$ annak a pontnak a helyzetvektora, amelyen a folyadékrészecske valamely t_0 időpontban áthalad, $\bar{\mathbf{r}}$ pedig ugyanazon részecske helyzetvektora az általános t időpontban (**30. ábra**). Megjegyzendő, hogy az anyagi pont mechanikájában ez az általánosan alkalmazott módszer. A sebesség ($\bar{\mathbf{v}}$) és a gyorsulás ($\bar{\mathbf{a}}$) megadása ezen szemléletmód szerint a következő:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} \quad (3.2)$$

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{dt^2} \quad (3.3)$$

A Lagrange-féle tárgyalásmód azonban a folyadékok mozgásának tárgyalására többnyire nehézkes.



30. ábra: A Lagrange-féle szubsztanciális tárgyalásmód elve a folyadék mozgásának leírására (forrás Haszpra 1989)

Az Euler-féle módszer a hely és az idő függvényében a sebesség és a sűrűség eloszlását adja meg. Ezzel jobban kiszolgálja a mérnöki szemléletet és az igényeket, mert a kiválasztott folyadékrészecskék pillanatnyi holléte vagy pályája többnyire kevésbé érdekes, mint az áramlás egészét jellemző sebesség és sűrűség (továbbá más dinamikai mennyiségek), amelyek eloszlása tetszőleges időpontban igen fontos (Haszpra 1989). Az Euler-féle leírás alapvető egyenletei tehát:

$$\bar{v} = \bar{v}(\bar{r}, t) \quad (3.4)$$

$$\rho = \rho(\bar{r}, t) \quad (3.5)$$

Skalárisan a következőképpen néznek ki:

$$v_x = v_x(x, y, z, t) \quad (3.6)$$

$$v_y = v_y(x, y, z, t) \quad (3.7)$$

$$v_z = v_z(x, y, z, t) \quad (3.8)$$

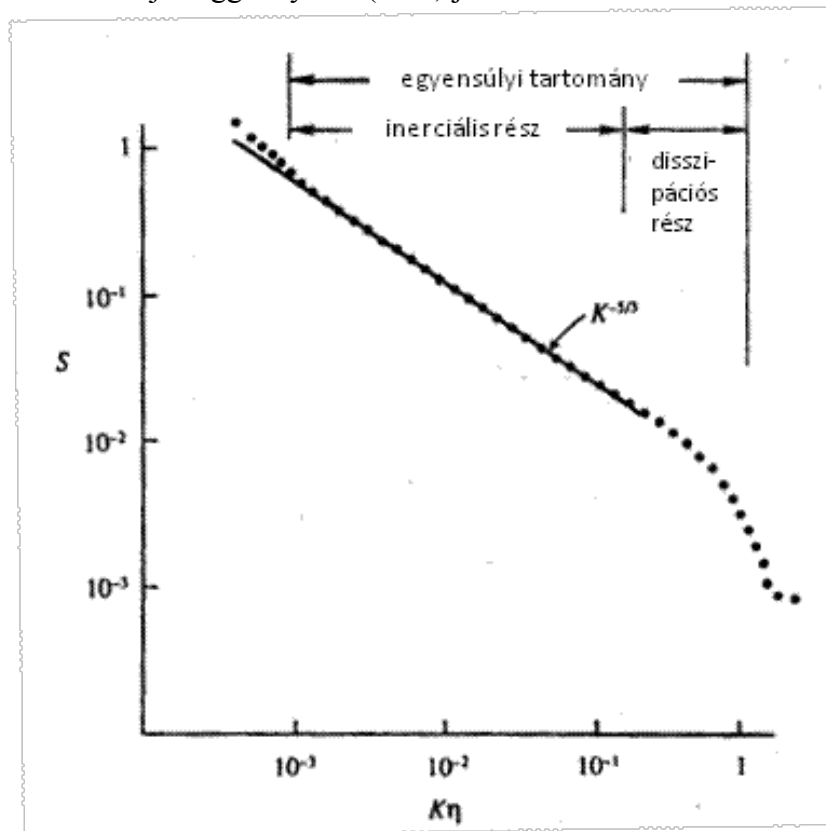
$$\rho = \rho(x, y, z, t) \quad (3.9)$$

Turbulens áramlásban nagyméretű örvények formálódnak folyamatosan majd szétesnek kisebb örvényekre, így mindig különböző méretű örvények spektruma van jelen az áramlásban. Amikor a nagyméretű örvények sok kisebb méretű örvénnyé esnek szét, nagyon kevés kinetikus energia veszik el, ezt úgy mondjuk, hogy az energia hatékonyan adódik át a különböző méretű örvények kaszkádján. Végül, amikor az örvények elég kicsivé válnak, a viszkozitás szerepet kap, a kinetikus energia szétoszlik és hővé alakul át. Ezt a konverzióját a kinetikus energiának hőenergiává a kis örvényméretű skáláján disszipációnak (ϵ) hívjuk és a következő egyenlettel jellemezhetjük.

$$\epsilon = \frac{E_{kin}}{t} \quad (3.10)$$

ahol, E_{kin} , a disszipált kinetikus energia, t az idő és az ϵ dimenziója [L^2T^{-3}]. Mivel a kinetikus energia hatékonyan átadódik lefelé a kisebb méretű örvények skálájára, a hővé disszipált kinetikus energia egyenlő kell, hogy legyen az áramlás összes turbulens kinetikus energiájával. Ez azt jelenti, hogy a keletkezése és a disszipációja a turbulens kinetikus energiának egy homogént turbulens áramlásban kiegyenlített. Az előbbieket szemlélteti a **31. ábra**, amely az

óceánban keletkező jellemző örvények energiaspektrumát mutatja be. Az ábrán jól látható az energia lefelé kaszkádolódása (átadódása) a kisebb méretű örvények felé, amelyet a hullámszám $5/3$ -os kitevőjű függvényével ($K^{-5/3}$) jellemezhetünk.



31. ábra: Az óceánban jellemző örvények energiaspektuma, ahol K , a hullámszám, S pedig a hullámszám spektruma (Kundu-Cohen (2002)).

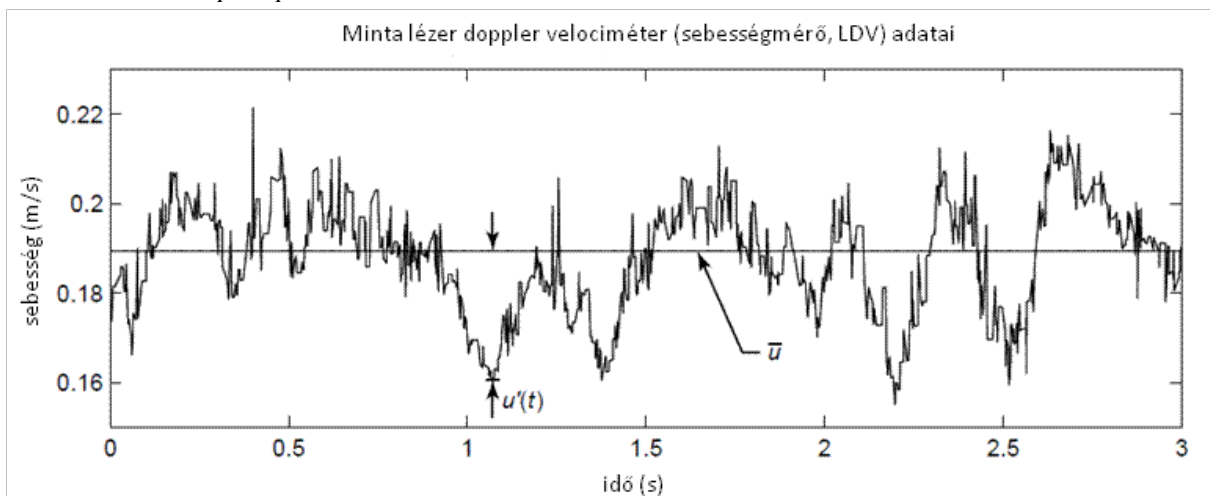
Az a hossz skálája (mérete) az örvényeknek, amelyen a turbulens kinetikai energia hővé konvertálódik a Kolomogorov-felé L_K méretskála. Milyen nagy ez az L_K ? Használjuk a dimenzió analízist, hogy megválaszoljuk ezt a kérdést. Vegyük észre, hogy az L_K függ az energia disszipációs rátától ϵ és a viszkozitástól ν (itt kinematikus viszkozitás), mivel a sűrűség alakítja át a kinetikus energiát hővé. Hozzuk létre egy hossz skálát ezekből a paraméterekből, és így megkapunk egy arányosságot L_K -ra, ami a turbulencia egy fontos méretskála.

$$L_K \propto \frac{\nu^{3/4}}{\epsilon^{1/4}} \quad (3.11)$$

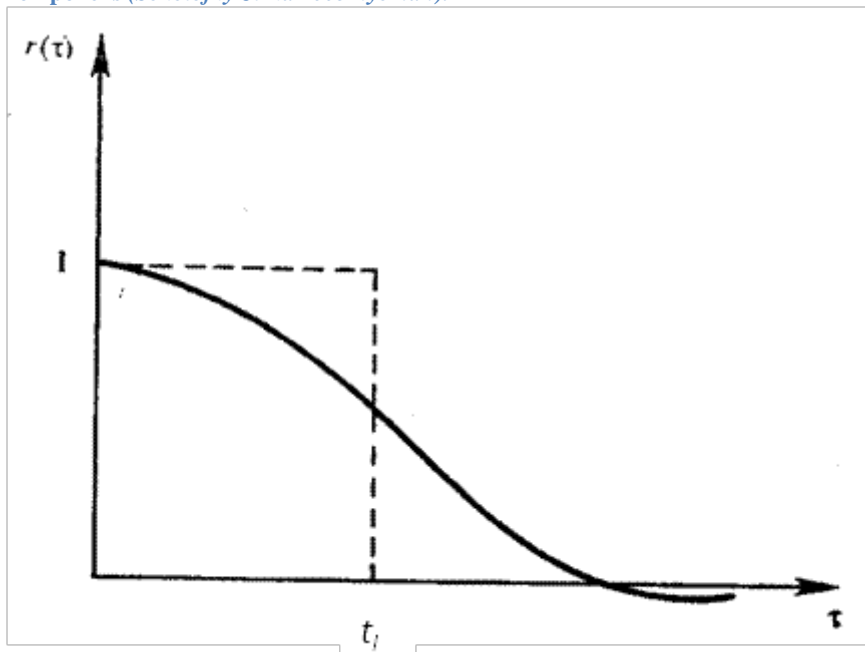
Összefoglalva a Lagrange-i szemléletmódot, ha követünk egy folyadék részecskét, amely kezdetben rákerül egy nagy örvényre és aztán vándorol örvényről örvényre, ahogy a nagy örvények kisebbekre esnek szét, de megőrzik kinetikus energiájukat a lefelé kaszkádolódás során. Végül a részecské egy olyan kisméretű örvénybe kerül be (az L_K mérettartományban), hogy a viszkozitás disszipálja a kinetikus energiáját hővé. Ez a kis örvény azonban szintén része egy nagy örvénynek, tehát az örvények mindegyik mérettartománya jelen van folyamatosan az áramlásban.

Mivel nehéz a folyadék részecskét követni egy sebességmérő műszerrel (ez az egyébként, amit a részecskekövető sebességmérés (Particle Tracking Velocimetry PTV) során próbálunk megtenni), a turbulens sebességre vonatkozó méréseket ezért egy ponton végezzük és a turbulenciát az Euler-i közelítéssel írjuk le. Örvények egész spektruma halad át a sebességmérés helyén, az áramlás átlagsebessége által szállítva. A nagy méretű örvények egy hosszú

periódusidejű fluktuációt, míg a kis méretű örvények egy rövid periódusidejű fluktuációt indukálnak a sebességmérésnél, és ezek a méretskálák folyamatosan megjelennek az áramlásban. A **32. ábra** egy példát mutat a turbulens sebességek egyik sebességkomponensének, egy adott ponton történt mérése alapján. Ha megvizsgáljuk a sebességmérési idősor egy rövidebb darabját, azt látjuk, hogy abban az időben egymást követő sebességek jól korrelálnak (összefüggenek) és determinisztikusnak (korábbi sebességek alapján számíthatónak) tűnnek. Ha viszont a sebesség-idősor távolabbi részeit hasonlítjuk össze, a sebességek teljesen korrelálatlannak és véletlenszerűnek tűnnek. Azt az időskálát, amelyen a sebességek az idősorban elkezdnek egymástól függetlenné és véletlenszerűvé válni integrál időskálának nevezzük, t_I . A Lagrange-i keretek között, ez az az idő, amikor a vizsgált folyadékcsomag már kezdi elfelejteni az ő kezdeti sebességét. Az időskála meghatározható a mérésekre illesztett autokorrelációs függvény alapján (**33. ábra**). Ez az időskála szintén leírható szintén leírható egy karakterisztikus hosszal és sebességgel, erre az ún. integrál skálára vonatkoztatva: u_I és l_I .



32. ábra: A turbulensen fluktuáló sebesség egy ponton történt mérése, ahol az \bar{u} , az átlagsebesség és az $u'(t)$ a fluktuáló komponens (Sokolofky-Jirka 2005 nyomán).



33. ábra: A mérésekre illesztett autokorrelációs függvény és az integrál időskála összefüggése (Kundu-Cohen 2002 nyomán)

Reynolds javaslatára a t_I -nél hosszabb időintervallumot véve, az x_i pontban mért sebesség felbontható egy átlagsebességre \bar{u}_i és az attól való eltérésre u_i' .

$$u_i(x_i, t) = \bar{u}_i(x_i) + u_i'(x_i, t) \quad (3.12)$$

A sebességnek ezt a felbontását nevezzük Reynolds féle dekompozíciónak. A t_I - ebben az esetben egy nem túl rövid, de nem is túl hosszú időszak, amelynek hossza közel azonos azzal az időtartammal, ami alatt az már közel állandóvá (konstanssá válik).

Egy másik fontos jelzőszáma a turbulenciának a sebesség fluktuációk négyzetének átlagából képzett négyzetgyök (rms: root mean square).

$$u_{rms} = \sqrt{\overline{u_i' \cdot u_i'}} \quad (3.13)$$

amely, mivel a kinetikus energia arányos a sebesség négyzetével, az áramlás turbulens kinetikai energiájának egy mérőjegye (megjegyzendő, hogy az áramlás átlagos kinetikai energiája ebben a tagban nem szerepel, mivel az u_i' -az átlagtól való eltérés).

3.1.2. A turbulens advektív diffúziós egyenlet

Az advektív diffúziós egyenlet turbulens körülmények között alkalmazható formájának leírásához, helyettesítsük be a Reynolds-féle dekompozíciót a normál advektív diffúziós egyenletbe és elemezzük az eredményt. Mielőtt azonban ezt megtesszük végezzük el a Reynolds-féle dekompozíciót a koncentráció esetében a sebességek analógiájára.

$$C(x_i, t) = \bar{C}(x_i) + C'(x_i, t) \quad (3.14)$$

Mivel csak a szennyezőanyag (vagy nyomjelző) felhő hosszú-távú (hosszú összehasonlítva a t_I -vel), átlagos viselkedésére vagyunk kíváncsiak, szintén egy időbeli átlagolást fogunk alkalmazni. Példaként vizsgáljuk meg az időben átlagolt tömeg fluxust x -irányban a sebességmérés helyén, $\overline{u \cdot C}$.

$$\begin{aligned} q_x &= \overline{u \cdot C} = \overline{(\bar{u}_i + u_i') \cdot (\bar{C} + C')} \\ &= \overline{\bar{u}_i \cdot \bar{C}} + \overline{\bar{u}_i \cdot C'} + \overline{u_i' \cdot \bar{C}} + \overline{u_i' \cdot C'} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ahol a felülvonás időbeli átlagot jelöl.

$$\overline{u \cdot C} = \frac{1}{t_I} \cdot \int_t^{t+t_I} u \cdot C \cdot d\tau \quad (3.16)$$

ahol, a t_I a korábban megfogalmazott integrál időskála, ami hosszabb, mint egy jellemző nagy örvény áthaladási ideje a mérési ponton.

Homogén turbulencia esetére a fluktuáló sebességek és koncentrációk időbeli átlagai nullát kell, hogy adjanak, vagyis $\overline{u_i'} = \overline{C'} = 0$. Így a 3.15 egyenletből a következő marad vissza:

$$\overline{u \cdot C} = \overline{\bar{u}_i \cdot \bar{C}} + \overline{u_i' \cdot C'} \quad (3.17)$$

Az előbbi egyenlet jobb oldali első tagjánál elhagytuk a kettős felülvonást (kétszeres átlagolás), mivel egy átlagnak az átlaga az csak az átlagot adja. Érdekes kiemelni azonban, hogy a jobb oldal második tagjának keresztorzatáról ($\overline{u_i' \cdot C'}$) nem feltételezhetjük annak zérus voltát.

Az előbbieken kifejtett tagok ismeretében, most már készek vagyunk arra, hogy behelyettesítsük a Reynolds-féle dekompozíciót a vezérlő advektív diffúziós egyenletünkbe (amelyben molekuláris diffúziós tagok szerepelnek).

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(u_i c)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \cdot \frac{\partial c}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial(\bar{c}+c')}{\partial t} + \frac{\partial((\bar{u}_i+u_i') \cdot (\bar{c}+c'))}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \cdot \frac{\partial(\bar{c}+c')}{\partial x_i} \right) \quad (3.18)$$

A következő lépésben integráljuk az egyenletet a t_l integrál időskála időtartamban.

$$\frac{1}{t_l} \cdot \int_t^{t+t_l} \left\{ \frac{\partial(\bar{c}+c')}{\partial t} + \frac{\partial((\bar{u}_i+u_i') \cdot (\bar{c}+c'))}{\partial x_i} \right\} d\tau = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \cdot \frac{\partial(\bar{c}+c')}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial(\bar{c}+c')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i \cdot \bar{c} + \bar{u}_i' \cdot c' + u_i' \cdot \bar{c} + u_i' \cdot c')}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \cdot \frac{\partial(\bar{c}+c')}{\partial x_i} \right) \quad (3.19)$$

Vegyük észre, hogy az $\bar{u}_i \cdot \bar{c}'$, az $u_i' \cdot \bar{c}$ és a \bar{c}' tagok zérus értékűek. Átmozgatva az $u_i' \cdot \bar{c}'$ tagot a jobb oldalra a következő egyenlet marad vissza.

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i \cdot \bar{c})}{\partial x_i} = - \frac{\partial(u_i' \cdot \bar{c}')}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} \right) \quad (3.20)$$

Ha a vizsgált x_i irányban a sebesség átlagos értéket állandónak tekintjük a bal oldali második tagból az \bar{u}_i kiemelhető a differenciáljel elé.

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_i \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} = - \frac{\partial(u_i' \cdot \bar{c}')}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} \right) \quad (3.21)$$

Hogy valóban használhassuk az előbbi egyenletet (3.21) a gyakorlatban az $u_i' \cdot \bar{c}'$ tagra valamilyen modellt kel felállítanunk. Mivel ez a tag $u \cdot C$ alakú, tudjuk róla, hogy valami tömeg fluxust jelképez. Mivel a szorzat minkét komponense az átlag körüli változást (fluktuációt) jelképezi, a szorzatuk által képezett tömeg fluxus a turbulenciával kell, hogy kapcsolatos legyen. Reynolds ezt a turbulens komponenszt minőségileg egy gyors elkeveredést jelképező tényezőként írta le, így ezek alapján analógiát vonhatunk a molekuláris diffúzióval. Taylor 1921-ben (in Sokolofsky-Jirka 2005) egy részét levezette ennek az analógiának, azáltal, hogy analitikusan követte egy nyomjelző részecskékből álló felhő útját egy turbulens áramlásban és számította a Lagrange-i autokorrelációs függvényt. Az eredményei azt mutatták, hogy a t_l -nél nagyobb időkre, a nyomjelző részecske felhő nagysága lineárisan nő az idővel. Fischer et al. (1979) ezt az előbbi eredményt használta fel a molekuláris diffúzióval kapcsolatosan felállított analógia igazolására. Érdemes azonban rámutatni, hogy Taylor az analógia alkalmazásában nem ment ilyen messzire. A diffúzióval kapcsolatos analógia esetében az átlagos turbulens diffúziós időskála $\Delta t = t_l$, és az átlagos turbulens diffúziós hossz mérték $\Delta x = u_l \cdot t_l = l_l$, innen következik, hogy a modell csak t_l -nél nagyobb időkre érvényes. A Fick-féle törvény alakjához hasonló kapcsolatot alkalmazva a turbulens diffúzióra adódik:

$$\bar{u}_i' \cdot \bar{c}' = -D_t \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} \quad (3.22)$$

ahol, D_t értékét a következő összefüggés adja meg.

$$D_t = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = u_l \cdot l_l \quad (3.23)$$

Behelyettesítve ezt a modellt az átlagos turbulens diffúziós transzportot megadó **3.21**-es egyenletbe és elhagyva az átlagolást jelző felülvonásokat a következőt kapjuk.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial c}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_t \cdot \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_m \cdot \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) \quad (3.24)$$

Amint látni fogjuk a következő szakaszban, a turbulens diffúziós tényező (D_t) általában sokkal nagyobb, mint a molekuláris diffúziós tényező (D_m), így az előző egyenlet utolsó tagját általában el is hanyagoljuk.

Turbulens diffúzió egy szobában

Azért, hogy a turbulens diszperzió jelenségét egy zárt helyiségben demonstráljuk, fecskendezzünk ki pontszerű forrásként parfümöt egy előadóterem elülső részén. A helyiség hosszdimenziói 10 m, 10 m és 5 m és 50 ember tartózkodik benne. mennyi ideig tart míg a parfüm turbulens diffúzióval szétterjed a helyiségben?

Hogy ezt a kérdést megválaszoljuk szükséges, hogy megbecsüljük a levegő sebességének skáláját a helyiségben. Minden egyes ember egy 60 W-os hőforrás, innen kijelenthető, hogy a levegő áramlása szempontjából a domináns folyamat a konvekció. a vertikális felhajtóerőből (sűrűségkülönbség) származó sebesség w_* dimenzióanalízissel a következőképpen adható meg.

$$w_* = (B \cdot L)^{\frac{1}{3}} \quad (3.25)$$

ahol, B a felhajtóerőből származó fluxus egységnyi területen [$L^2 T^{-3}$] és L [L] a szoba vertikális dimenziója (5 m). A levegő felhajtóereje a hőmérséklet növekedésével növekszik a kiterjedés miatt. A nettó felhajtóerőből származó fluxus egységnyi felületen a következőképpen adható meg.

$$B = \beta \cdot g \cdot \frac{H}{\rho \cdot c_v} \quad (3.26)$$

ahol, β a hő okozta expanziót jellemző tényező ($0,00024 \text{ K}^{-1}$ a levegőre), H a látens hő fluxus egységnyi területen, ρ a közeg sűrűsége ($1,25 \text{ kg/m}^3$ a levegőre) és c_v egy konstans térfogatnál értelmezett fajhő ($1004 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ a levegőre).

Az előbbi problémára a H értéke a következő:

$$H = \frac{50 \text{ fő} \cdot 60 \text{ W/fő}}{10^2 \text{ m}^2} = 30 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (3.27)$$

Ezen H érték alapján az egységnyi területre érvényes felhajtóerő fluxus $5,6 \cdot 10^5 \text{ m}^2/\text{s}^2$ és a vertikális sebesség $w_* = 0,07 \text{ m/s}$.

Most már megvannak a szükséges távolság és időskáláink a turbulens diffúziós tényező becsléséhez a **3.23** egyenlet alapján. Vegyük, hogy az $u_l \propto w_*$ és $l_l \propto h$, ahol a h a helyiség magassága. A D_t érték becslése tehát a következő:

$$D_t \propto w_* h \approx 0,35 \text{ m}^2/\text{s} \quad (3.28)$$

amely, nagyságrendekkel nagyobb a molekuláris diffúziós tényezőnél (összehasonlítva a molekuláris diffúziós tényező értéke a levegőre $D_m = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$).

Az elkeveredés ideje a felhő szélességnek szóródása alapján számítható.

$$t_{mix} \approx \frac{L^2}{D_t} \quad (3.29)$$

A vertikális elkeveredés esetére $L=5\text{m}$ a t_{mix} kb. 1 perc, a horizontális elkeveredésre $L=10\text{m}$ a t_{mix} kb. 5 perc. Ezen eredmények alapján eltart néhány percig (de nem egy-két szekundumig és nem órákig) amíg a teremben lévők elkezdik megérezni a parfüm illatát.

3.2. Turbulens diffúziós tényezők értelmezése vízfolyásokban

Milyen nagyok lehetnek a turbulens diffúziós tényezők? Hogy ezt a kérdést megválaszoljuk, azt szükséges meghatározni, hogy a diffúziós tényező mitől függ, használjuk a dimenzió analízis módszerét.

Hogy megválaszoljuk az előző kérdést vegyünk példaként egy széles (W) folyót h átlagos mélységgel, ahol $W \gg h$. A három dimenzióban értelmezett turbulencia fontos tulajdonsága, hogy a legnagyobb örvények méretét általában a legkisebb térbeli dimenzió irányában értelmezett kiterjedés befolyásolja, ebben az esetben a mélység. Ez azt jelenti, hogy egy széles folyó turbulenciával kapcsolatos tulajdonságai függetlenek kellene, hogy legyenek a vízfolyás szélességétől, de függenek a mélységétől. Gondoljunk csak meg azonban, hogy a turbulencia a nagymértékű nyírással jellemezhető zónákban generálódik, amely zónák egy folyó esetében lehetnek például a vízfolyás medrének közelében. A nyírás erősségének a jellemzésére szolgáló sebesség (amely több turbulenciát jellemző értékkel is arányos) a nyíró vagy más néven fenékcúsztató sebesség, $u_* [LT^{-1}]$. a következőképpen jellemezhető:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (3.30)$$

ahol, a τ_0 (N/m^2) a mederfenéken jellemző nyírófeszültség és ρ (kg/m^3) a folyadék sűrűsége. Nyíltfelszínű csatornában történő egyenletes folyadékmozgás esetében a gravitációs erőt ez a nyírásból származó súrlódás ellensúlyozza, tehát az u_* a következőképpen számítható:

$$u_* = \sqrt{g \cdot h \cdot S} \quad (3.31)$$

ahol, ahol az S a csatorna hosszúsága.

Használjuk fel a tárgyalt két paraméterünket, hogy egy diffúziós tényezőt hozzunk létre.

$$D_t \propto u_* \cdot h \quad (3.32)$$

Mivel a sebesség profil nagyon különböző vertikális (z) irányban a transzverzális (y) iránytól, D_t -vel kapcsolatban nem feltételezhetjük, hogy izotróp (tehát a tér különböző irányában más és más értéket vesz fel).

3.2.1. Vertikális elkeveredés

A vertikális értelmű turbulens diffúziós tényező a vertikális sebességprofilból származtatható (lásd Fischer et al. 1979). A teljesen kifejlődött turbulens nyílt felszínű áramlás esetére megmutatható, hogy az átlagos turbulens sebesség profil a következőképpen adható meg:

$$\bar{u}_t(z) = u + \frac{u_*}{\kappa} \cdot \left(1 + \ln\left(\frac{z}{h}\right) \right) \quad (3.33)$$

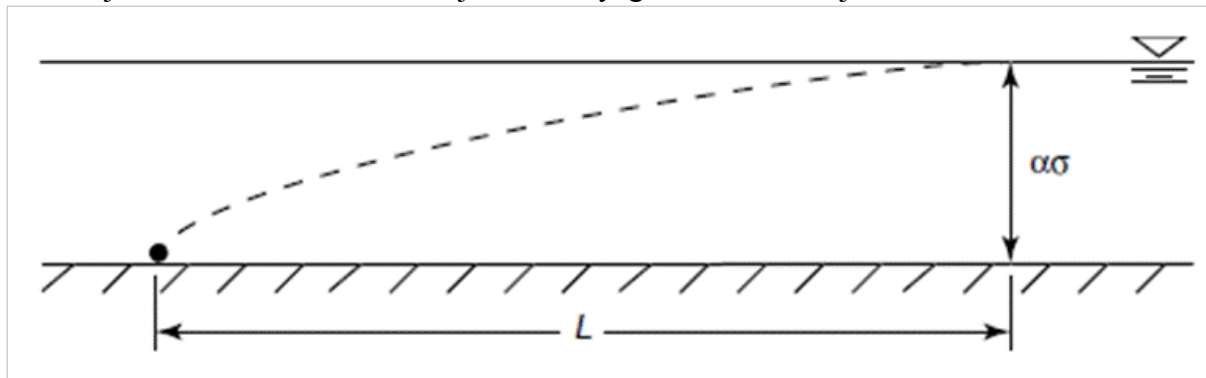
ahol, κ a Kármán-féle konstans, κ -t 0,4-nek véve a D_T -re a következő adódik:

$$D_{t,z} = 0,067 \cdot h \cdot u_* \quad (3.34)$$

Ez az egyenlet a vízfolyásokra és az atmoszférikus határretegére kísérletek által verifikált és $\pm 25\%$ -os pontosságúak vehető.

Vertikális elkeveredés egy vízfolyásban (3.2 doboz)

Egy gyár szennyvizét egy laterális elhelyezkedésű perforált csövön vezetik be egy vízfolyás mederfenekére, amint az a **34. ábra** látható. A kérdés az, hogy milyen távolságra a bebocsájtástól lefelé tekinthető a bejuttatott anyag vertikálisan teljes elkeveredettnek.



34. ábra: Vertikális elkeveredés szemléltetése egy vízfolyás mederfenekén bejuttatott szennyvíz példáján (forrás Sokolofsky-Jirka 2005).

A teljesen elkeveredés azzal az állapottal definiálható, ahol koncentráció változása a keresztmetszvény mentén egy küszöbszint alatt van. Mivel a vertikális (z irányú) domain-nak két határa van (alsó a meder, a felső a vízfelszín), az image forráson alapuló (tükrözéses) megoldást (2.54) célszerű használni a koncentráció kiszámításához:

$$C(z, t) = \frac{M}{A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(z+2nL)^2}{4 \cdot D \cdot t}\right) \right) \quad (3.35)$$

A kapott eredményeket az alkalmas alfa paraméter meghatározásával összegezzük a következő egyenletre vonatkozóan:

$$h = \alpha \cdot \sigma \quad (3.36)$$

ahol, h a mélység és σ a koncentráció eloszlás szórása. Fischer et al. (1979) javaslatára az α paraméter $\alpha=2,5$ -nek vehető.

Vertikális elkeveredésnél, minket elsősorban a vertikális diffúziós tényező érdekel, így írhatjuk, hogy:

$$h = 2,5 \cdot \sqrt{2 \cdot D_{t,x} \cdot t} \quad (3.37)$$

ahol, t a vertikális elkeveredés kifejlődéséhez szükséges idő. A t időn túl a felhő lefelé utazik L távolságra ($L = \bar{u} \cdot t$). Az \bar{u} -ra vonatkozóan szintén alkalmazhatunk egy közelítést ($u_* = 0,1 \bar{u}$). Behelyettesítve ezeket az előbbi összefüggéseket a **3.34** egyenlettel kombinálva adódik:

$$h = 2,5 \cdot \sqrt{2 \cdot 0,067 \cdot h \cdot (0,1 \bar{u}) \cdot L/\bar{u}} \quad (3.38)$$

L-re megoldva az előbbi egyenletet, adódik:

$$L = 12 \cdot h \quad (3.39)$$

Ezek alapján a felszínen vagy a mederfenéken történő beinjektálás egy természetes vízfolyásba, úgy kezelhető, mint egy teljes mértékű vertikális elkeveredés ha kb. 12-szer nagyobb távolságra vagyunk, mint ami a mederben a víz mélysége.

3.2.2. Keresztirányú elkeveredés

Átlagosan nem jellemző nagymértékű keresztirányú sebesség profil a vízfolyásoknál és így az elkeveredési tényezőket kísérletek alapján kell számítanunk. Jól felszerelt laboratóriumban végzett mérések és terepi kísérletek alapján Fischer et al. (1979) az átlagos keresztirányú, turbulens diffúziós tényezőkre, egyenes csatornaszerű meder esetében a következő összefüggést adja:

$$D_{t,y} = 0,15 \cdot h \cdot u_* \quad (3.40)$$

A kísérletek azt mutatják, hogy a mélység is szerepet játszik a keresztirányú elkeveredésben, azonban az nem tisztázott, hogyan lehet ezt a hatást kifejezni (Fischer et al. 1979). A keresztirányú elkeveredés nem követi minden esetben, az előbbi egyenletben (3.40) megfogalmazott összefüggést különösen igaz ez nagy, koherens, laterális mozgások esetében, amelyeknek valójában nem a turbulens tulajdonságaik az elsődlegesek. A kísérletekben vizsgált tulajdonság tartományokra vonatkozóan az 3.40-es egyenletnek a megbízhatósága legjobb esetben $\pm 50\%$.

Természetes vízfolyásokban, a keresztiszelvény ritkán egységes mélységű, és a helyszínrajzi vonalvezetés meanderező. Az előbbi két hatás fokozza a keresztirányú elkeveredést, így a természetes vízfolyásokra $D_{t,y}$ esetében, Fischer et al. (1979) a következő összefüggést ajánlja:

$$D_{t,y} = 0,6 \cdot h \cdot u_* \quad (3.41)$$

Abban az esetben ha a vízfolyás csak kissé meanderező és a partok vonalvezetésének szabálytalansága csak mérsékelt, az előbbi egyenlet jobb oldalának szorzótényezője általában a 0,4-0,8 tartományban vehető fel.

3.2.3. Hosszirányú elkeveredés

Ha feltételezzük, hogy nincs határból eredő visszaverődés a keresztirányú vagy hosszirányú szennyezőanyag terjedésnél a hosszirányú turbulens elkeveredés a keresztirányúhoz hasonlóan kezelhető. Ebben az esetben a turbulens diszperziós tényező megegyeznek:

$$D_{t,x} = D_{t,y} \quad (3.42)$$

Azonban a vertikális sebességprofil nem egységes volta és más egyenlőtlenségeket okozó hatások (holt terek, csavart áramlások, nem egységes mélység, stb.) egy hosszirányú diszperzióknak nevezett, a hosszirányú elkeveredésben domináns folyamatot indukálnak. Emellett a hosszirányú diszperziós folyamat mellett (amely a következőkben kerül tárgyalásra) a hosszirányú diffúzió ($D_{t,z}$) gyakran elhanyagolható és az előbbi folyamat veszi át a helyét.

A turbulens diffúziós folyamatok összefoglalás a vízfolyások esetében

Egy természetes vízfolyás esetében, amelynek szélessége $W=10\text{m}$, mélysége $h=0,3\text{m}$, vízhozama $Q=1\text{ m}^3/\text{s}$ és medrének esése $S=0,0005$, a **3.34**, **3.40** és **3.42** egyenletek alapján a diffúziós tényezők a három fő koordinátengely irányában a következők.

$$D_{t,z} = 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \quad (3.43)$$

$$D_{t,y} = 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s} \quad (3.44)$$

$$D_{t,x} = 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s} \quad (3.45)$$

Megjegyzendő, hogy a természetes medrű (szabálytalanul meanderező, stb.) vízfolyásokra a **3.41** képlettel megadott számítás a $D_{t,y}$ és így a $D_{t,x}$ tényezőkre is mintegy négyszer nagyobb értéket ad.

Az előbbi számítások értékei (**3.43**, **3.44**, **3.45**) azt mutatják, hogy a turbulens diffúziós tényezők a természetes vízfolyásokban több nagyságrenddel nagyobbak, mint a molekuláris diffúziós tényezők, biztonsággal eltávolíthatjuk a D_m -re vonatkozó tagot a **3.24** egyenletből.

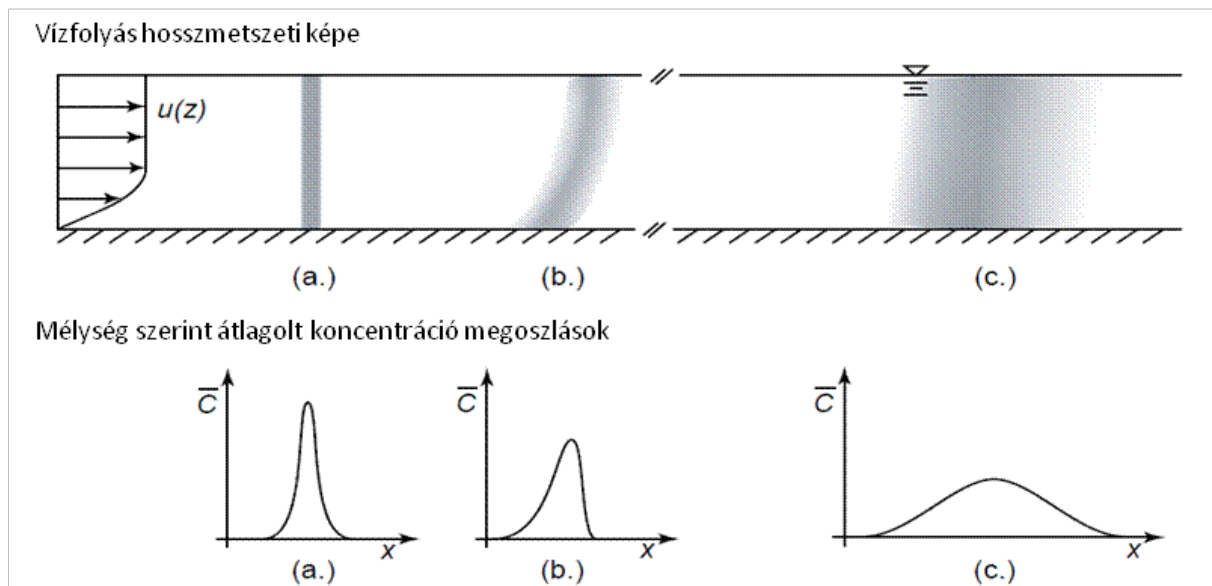
3.3. A hosszirányú diszperzió értelmezése

Az előző részben láthattuk, hogy a sebesség turbulens fluktuációja egy véletlenszerű elkeveredést okoz, ami a Fick-féle diffúziós egyenlet segítségével leírható, a molekulárisnál nagyobb ún. turbulens diffúziós tényezőt figyelembe véve. Ebben a részben azt akarjuk megvizsgálni, hogy milyen a sebességek eltéréseinek a hatása térben, a nem egyenletes sebességmegoszlásnak, vagy nyíróáramlásnak, sebességprofilnak a szennyezőanyagok terjedésére.

A **35. ábra** szematikusan mutatja be, hogy mi történik egy nyomjelzőanyag felhővel, hogyan változik annak mintázata egy olyan nyíróáramlásban, ami a nyílt felszínű csatornában jellemző.

- Vegyük egy vízfolyás átlagos, egységnyi széles hosszirányú metszetét. Ha beinjektálunk egy jelzőanyagot (ami pl. egy szennyezőanyagot szimbolizál) az áramlás (a.) szektorába keresztiszelvény mentén egyenletesen elosztva, akkor a bebocsájtás pillanatában nem lesz jelen vertikális koncentráció gradiens (keresztirány sem, de azt most nem vizsgáljuk). Mivel nincs koncentráció gradiens, nem lesz diffúziós fluxus sem az adott bebocsájtási pont vertikális függvényében.
- A jelzőanyag mintázata azonban advekción mozgással folyásirányban elmozdul és közben szét is húzódik a vertikálisan eltérő advekción sebességek következtében előálló nyírás miatt. Egy rövid távolságra lefelé tehát a jelzőanyag felhő mintázata a (b.) szelvényben láthatóhoz lesz hasonló. Ebben a pontban egy erős vertikális koncentráció gradiens lesz jellemző, aminek következtében nagy nettó diffúziós fluxus jelentkezik vertikális irányban.
- Ahogy a széthúzó mintázat folyásirányban lefelé mozog tovább, a (turbulens) diffúzió ki fogja simítani a vertikális koncentráció gradienst, és elegendő távolságra lefelé, a jelzőanyag felhő mintázata a (c.) pontban rajzolthoz válik hasonlóvá.

Az a jelzőanyag mennyiség, ami a lent fekvő, (c.) szelvényig jellemzően széterjedt azonban jóval nagyobb, mint ami a hosszirányú (turbulens) diffúziós folyamatok kizárólagos (a keresztirányú (itt most nem vizsgált) és a vertikális turbulens diffúziót elhagyva) figyelembe vételével széterjedhetett volna. Ezt a kapcsolt megjelenését a diffúziós (itt most vertikális) és advekción folyamatoknak hívjuk diszperzióknak.



35. ábra: A hosszirányú diszperzió folyamatának sematikus ábrája. Egy nyomjelzőt injektálunk a keresztiszelvényben egyenletesen elosztva az áramlási tér (a.) pontjában, amely a nyíróáramlás sebességprofilja következtében széthúzódik a (b.) helyen. A (c.) szelvényben a vertikális diffúzió már homogenizálta a koncentráció gradienst és egy mélység átlagolt Gauss féle normális eloszlás formájában várható a hosszirányban vett koncentráció profil megjelenése (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán).

Ha három dimenzióban oldjuk meg transzport egyenletet, megfelelő molekuláris vagy turbulens diffúziós tényezőket felhasználva, akkor nem szükséges semmi speciális tennünk, hogy a sebességprofil fent említett széthúzó hatását pontosan lekövethessük. A diszperzió ugyanis implicit módon benne van a három dimenziós transzport modellben.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(u \cdot C)}{\partial x} + \frac{\partial(v \cdot C)}{\partial y} + \frac{\partial(w \cdot C)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \cdot \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (3.46)$$

ahol, C , a koncentráció (ML^{-3}), t , az idő (T), x, y , és z a hossz-, kereszt-, és függőleges irányú koordináta [L]; u , v és w az áramlási sebesség [LT^{-1}], D_x , D_y és D_z a diffúziós tényezők [L^2T^{-1}] a megfelelő koordinátatengely szerinti irányokban.

A gyakorlati feladatok többségénél az u , v és w sebesség-összetevők, valamint a D_x , D_y és D_z (turbulens) diffúziós tényezők nem ismertek kielégítő pontossággal ahhoz, hogy érdemes lenne, különösen ha a matematikai nehézségeket is figyelembe vesszük, a turbulens diffúzió előbbi (3.46) egyenletének három dimenzióban történő megoldása. Vízfolyások esetében az előbbi egyenlet vízmélység (h [L]) illetve szelvényterület (A [L^2]) szerint vett integrál alakjainak, azaz a turbulens diszperzió egyenleteinek az alkalmazása szokásos (Somlyódy 1985).

A vízmélység szerint vett integrál alak a következő:

$$\frac{\partial}{\partial t} (h \cdot \bar{C}) + \frac{\partial(h \cdot \bar{u} \cdot \bar{C})}{\partial x} + \frac{\partial(h \cdot \bar{v} \cdot \bar{C})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h \cdot D_x^* \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \cdot D_y^* \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) \quad (3.47)$$

ahol, a felület a sebességek és a koncentráció esetében a mélység menti átlagot jelöli, a D_x^* és a D_y^* pedig a kétdimenziós egyenlet hossz- és keresztirányú turbulens diszperziós tényezői. A (h) mélység értékével, ha a vizsgált szakaszon kereszt- és hosszirányban állandónak vehető egyszerűsíthetünk.

A keresztiszelvény szerint vett integrál alak így írható fel:

$$\frac{\partial}{\partial t} (A \cdot \bar{C}) + \frac{\partial(A \cdot \bar{u} \cdot \bar{C})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \cdot D_L \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) \quad (3.48)$$

ahol, a kettős felülvonás a sebesség és a koncentráció esetében a kereszt-szelvény területre vonatkozó átlagot jelöli, a D_L pedig az egydimenziós egyenlet hosszirányú turbulens diszperziós tényezője [L^2T^{-1}]. A (A) kereszt-szelvényterület értékével, ha a vizsgált szakaszon hosszirányban állandónak vehető egyszerűsíthetünk. A kettős felülvonást a későbbiekben nem fogjuk használni, hanem csak szóban utalunk az összefüggés kereszt-szelvény mentén átlagolt voltára.

Az előbbiek szerint tehát diszperzió alatt tehát azt a térbeli egyenlőtlenségekből adódó valójában advektív transzportot értjük, amely az átlagolás eredményeként jelenik meg (a vízrészecskék előresietnek, illetve elmaradnak az átlagos elmozduláshoz viszonyítva), és amely a diffúzióhoz hasonlóan a koncentráció kiegyenlítődését idézi elő. A turbulens diszperziós tényező a diffúzív és diszperzív transzportot együttesen jellemzi és alapvetően a sebességtér függvénye. Értéke tehát annál nagyobb, minél szabálytalanabb jellegű a vízfolyás, illetve egy adott vízfolyás esetén, minél nagyobb az átlagolás alapjául szolgáló felületelem kiterjedése ($D_x < D_x^* < D_L$). Megjegyzendő, hogy előbbi zárójeles tagból a D_x még nem a diszperziós, hanem a sima diffúziós tényező.

A diszperzió egyenleteinek alkalmazásához még az alábbi korlátozások megtétele is szükséges:

A **(3.47)** vízmélység szerint vett integrál egyenlet nem használható a szennyező anyag felhő azon kezdeti szakaszára, amely szakaszon belül a koncentráció jelentős mélység szerinti gradienssel rendelkezik, vagyis jelentős a koncentráció változása a mélységgel (sekély vízfolyások esetében ez a szakasz általában elhanyagolható hosszúságú).

A **(3.48)** kereszt-szelvény szerint vett integrál egyenlet a szennyezőanyag felhőnek (csóvának) csak arra, a szennyezőanyag bebocsájtástól távolabbi szakaszára érvényes, amelynek kereszt-szelvényein belül a koncentráció már többé-kevésbé kiegyenlített. A **3.48** egyenlet használata ezért általában nem ajánlott széles vízfolyásokra (Somlyódy 1985).

Vizsgáljuk a továbbiakban a transzportegyenlet szelvényterület mentén vett integrál alakját részletesebben. A továbbiakban ki szeretnénk használni annak az előnyét, hogy a koncentráció megoszlása a (c) szelvényben lényegében csak egy dimenziós, mivel y , keresztirányban (előbbiekben nem vizsgált) és z , vertikális irányban a vizsgált anyag már jól eloszlott (nincs jelentős koncentráció gradiens). Az előbbieken kívül a koncentráció eloszlása a (c) pontban a Gauss-féle normális eloszlást követi, így alkalmazható a Fick-féle diffúziós törvény. Taylor elemzése a diszperzióra, ezt a későbbiekben bemutatjuk, egy olyan módszer, ami a diszperzió anyagfelhő széthúzó hatását egy egy dimenziós modellbe helyezi el. Az eredmény egy egy dimenziós transzport egyenlet egy jelentősebb hosszirányú elkeveredési tényezővel, amit hosszirányú elkeveredési tényezőnek nevezünk.

Amint Fischer et al. (1979) már rámutatott, a következőkben bemutatandó G. I. Taylor által leírt elemzés, amely a hosszirányú diszperziós tényező számítására vonatkozik a nyíró sebesség profil alapján egy külön érdekes példája G. I. Taylor géniusának.

3.3.1. Az advektív diszperziós egyenlet levezetése

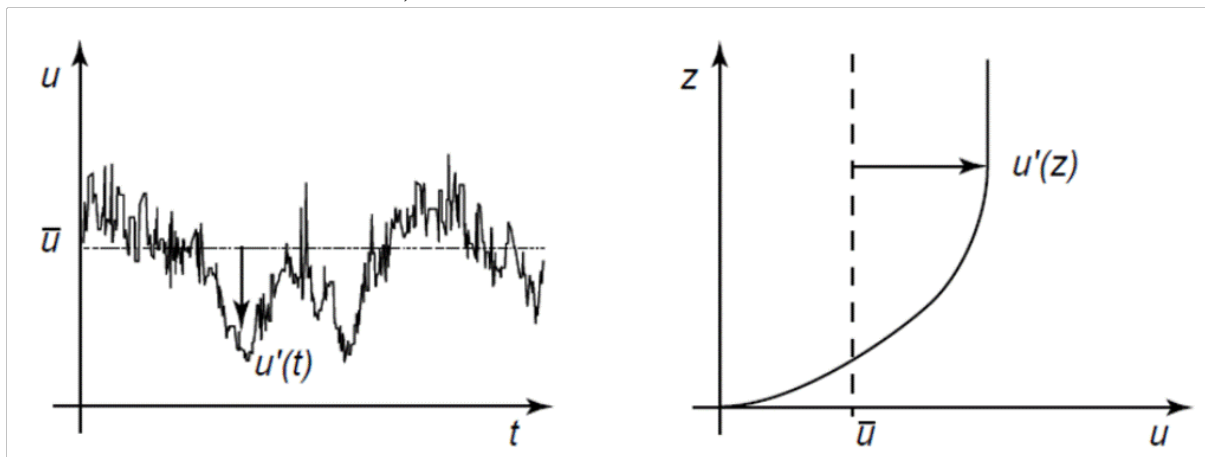
Hogy levezethessük a hosszirányú diszperzióra vonatkozó egyenletünket, használjuk a Reynolds féle dekompozíció előző fejezetben levezetett változatának módosított formáját a turbulencia kezelésére. A **36. ábra** mutatja a sebességvektor egyik komponensének turbulens dekompozícióját, ahol megvan az átlagos sebesség ($\bar{u}(x_i)$), ami a három dimenziós tér x_i pontjában konstans és a sebesség fluktuáció ($u'(x_i, t)$), ami változik az időben, egyenlettel kifejezve:

$$u(x_i, t) = \bar{u}(x_i) + u'(x_i, t) \quad (3.49)$$

A nyíróáramlás dekompozíciója (itt egy logaritmikus vertikális sebességprofilát látunk egy folyóban) esetében van egy mélység szerint átlagolt sebességünk (\bar{u}), ami egy konstans értéket képvisel és egy deviációs (ettől eltérő) sebességünk ($u'(z)$), ami a mélység szerint különböző mértékben tér el az átlagtól, egyenletszerűen a következőképpen.

$$u(z) = \bar{u} + u'(z) \quad (3.50)$$

Explicit módon feltételezzük, hogy az \bar{u} és az $u'(z)$ független az x -től. A fő különbség ezek között az egyenletek között, hogy míg a 3.49-ben egy véletlenszerűen fluktuáló sebességkomponens $u'(x_i, t)$ van; addig a 3.50-ben egy determinisztikus, nem véletlenszerű (és jellegében teljes mértékben ismert) eltérést kifejező „fluktuációs” komponens $u'(z)$, amit inkább hívhatunk deviációs-nak, mint fluktuációs-nak.



36. ábra: A Reynolds féle dekompozíció összehasonlítása egy (adott ponton mért) turbulens áramlás (bal oldal) és egy (térben változó) nyíróáramlás (jobb oldal) sebességértékeinek esetére (Sokolofsky-Jirka 2005)

Amint a turbulens diffúzió esetében tettük, a koncentrációkra szintén alkalmazhatjuk a Reynolds-féle dekompozíciót.

$$C(x, t) = \bar{C}(x) + C'(x, t) \quad (3.51)$$

amely, szintén függ az x -től, és amelyre $C'(x, t)$ ismeretlen.

Felszerelve az előbbi ismeretekkel, készek vagyunk a Taylor-féle elemzést követni és alkalmazni egy nyílt felszínű csatornában kialakuló áramlás esetében a hosszirányú diszperzióra. A levezetéshez tételezzünk fel lamináris áramlást és végtelenül széles csatornát (medret) egy alsó és felső áramlás szempontjából záró határral, így a $v=w=0$. A h mélység a csatornában legyen, mind hossz- mind keresztirányban állandó és a D_x és D_z tényezők is legyenek konstansok a vizsgált szakaszon. A nyomjelző anyagot egy felület mentén juttattuk be így elhanyagolható az y , keresztirányú diszperzió ($\frac{\partial C}{\partial y} = 0$). A vezérlő, advektív.diffúziós egyenletünk így a következő formát ölti:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial C}{\partial x} = D_x \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_z \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (3.52)$$

Az előbbi egyenlet a fent említett feltételek mellett három dimenzióban érvényes és tartalmazza a diszperziós hatásokat. A diffúziós tényezők lehetnek molekulárisak vagy turbulensek, attól függően, hogy lamináris vagy turbulens áramlásra alkalmazzuk az egyenletet. Helyettesítsük

be a nyíráramlásra vonatkozó Reynolds-féle dekompozíciós összefüggést az előbbi (3.52) egyenletbe.

$$\frac{\partial(\bar{c}+c')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \cdot \frac{\partial(\bar{c}+c')}{\partial x} = D_x \cdot \frac{\partial^2(\bar{c}+c')}{\partial x^2} + D_z \cdot \frac{\partial^2(\bar{c}+c')}{\partial z^2} \quad (3.53)$$

Mivel már korábban megállapítottuk, hogy a hosszirányú diszperzió sokkal nagyobb, mint a hosszirányú diffúzió, ezért el fogjuk fogjuk hanyagolni a D_x -es tagot az egyenlet rövidebbé tétele céljából (ezt később bármikor később visszaadhatjuk, egy additív diffúziós tagként). Szintén célszerű észrevenni, hogy a \bar{C} nem függvénye a z -nek, így a jobb oldali utolsó, D_z -re vonatkozó tagból kihagyható.

$$\frac{\partial(\bar{c}+c')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \cdot \frac{\partial(\bar{c}+c')}{\partial x} = D_z \cdot \frac{\partial^2 c'}{\partial z^2} \quad (3.54)$$

Amint korábban tettük, egyszerűbb kezelni az egyenletet egy átlagos advekciós sebességgel mozgó koordináta-rendszerhez rögzítetten. Az előbbi célból vezessük be tehát a következő koordináta-transzformációt.

$$\xi = x - \bar{u} \cdot t \quad (3.55)$$

$$\tau = t \quad (3.56)$$

$$z = z \quad (3.57)$$

A láncszabályt felhasználva a differenciáloperátorok a következőképpen alakulnak át.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - u \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.60)$$

Az előbbi transzformációkat behelyettesítve a 3.54 egyenletbe, amelyen már alkalmaztuk a korábban említett egyszerűsítéseket a következő egyenlet adódik.

$$\frac{\partial(\bar{c}+c')}{\partial \tau} + \frac{\partial u(\bar{c}+c')}{\partial \xi} = D_z \cdot \frac{\partial^2 c'}{\partial z^2} \quad (3.61)$$

Ez az egyenlet az, amely Taylor analízis effektív kiinduló pontját képezi.

Az előbbi diszkusszió már megmutatta, hogy a vertikális értelemben létező koncentráció és sebességgradiens az, ami a felelős a megnövekedett hosszirányú diszperzióért. Így ezen a ponton azt szeretnének elérni, hogy eltávolítsuk a fluktuációt nem mutató tagokat (amelyeken nincs vessző) az előbbi 3.61-es egyenletből. Ez a lépés nagy bátorságot és alapos körültekintést igényel, hiszen azt jelenti, hogy éppen a $\frac{\partial \bar{c}}{\partial t}$ tagot dobjuk el, ami pont az a mennyiség, amit végül is szeretnénk előrejelezni (Fischer et al. 1979). Amint látni fogjuk azonban, pontosan ez az, ami képessé tesz majd minket, hogy egy összefüggést határozzunk meg a diszperziós tényezőre vonatkozóan.

Abból a célból, hogy eltávolítsuk az állandó komponenseket a 3.61 egyenletből, számítsuk ki az egyenlet mélység mentén vett átlagát és vonjuk ki ezt az átlagolt formát az eredeti egyenletből. A mélységi átlagolást kifejező operátor a következő:

$$\frac{1}{h} \int_0^h dz \quad (3.62)$$

Alkalmazva, tehát a mélység menti átlagolást a **3.61** egyenletre a következőt kapjuk.

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} + \frac{\partial \overline{u \cdot c'}}{\partial \xi} = 0 \quad (3.63)$$

mivel, a C' és az u' mélység mentén átlagolt értéke is zérus, de az $u' \cdot C'$ keresztszorzata már nem lehet az. Ez az előbbi egyenlet tulajdonképpen az az egy dimenziós vezérlő egyenlet, amit keresünk. Vissza is fogunk térni tehát ehhez az egyenlethez, amint megtaláltuk az $u' \cdot C'$ tagra vonatkozó összefüggést. Kivonva tehát a korábbi **3.61** egyenletünkből a most megkapott **3.63**-at a következő adódik.

$$\frac{\partial c'}{\partial \tau} + u' \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} + u' \cdot \frac{\partial c'}{\partial \xi} = \frac{\partial \overline{u \cdot c'}}{\partial \xi} + D_z \cdot \frac{\partial^2 c'}{\partial z^2} \quad (3.64)$$

amely összefüggés megadja nekünk a koncentráció eltérésekre (deviációkra) vonatkozó vezérlő egyenletünket. Ha ezt az előbbi **3.64** egyenletet meg tudjuk oldani C' -re, akkor vissza tudjuk helyettesíteni a megoldást a **3.63**-ba, hogy megkapjuk a \bar{C} -ra vonatkozó óhajtott összefüggést. Mielőtt megpróbáljuk megoldani a **3.64** egyenletet, vegyük fontolóra minden egyes tag nagyságrendjét és a nagyságrendek alapján döntsük el vajon szükséges-e mindegyik tag figyelembevétele az egyenletben. Ezt az eljárást hívják scale (lépték vagy nagyságrend) analízisnek. A **35. ábra** (c.) pontjára keresünk megoldásokat. Ebben a pontban egy részecskét a csóvában a sebességprofil mentén vizsgálva megállapítható, hogy $C' \ll \bar{C}$. Így a következő nagyságrendi relációk adódnak az egyes tagok között.

$$u' \cdot \frac{\partial c'}{\partial \xi} \ll u' \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial \overline{u \cdot c'}}{\partial \xi} \ll u' \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} \quad (3.66)$$

Az előbbieken alapján a **3.65** és **3.66** egyenlőtlenségek bal oldalán lévő tagokat elhanyagolhatjuk és a **3.64**-ből a következő összefüggés marad vissza.

$$\frac{\partial c'}{\partial \tau} + u' \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} = D_z \cdot \frac{\partial^2 c'}{\partial z^2} \quad (3.67)$$

Ha megnézzük ezt az összefüggést a következő meglepő dolgot vehetjük észre. A turbulens diffúziós esetre, a $u' \cdot \bar{C}$ keresztszorzat volt az, amelyik a turbulens diffúziós taggá vált. Most meg éppen eldobtuk ezt a tagot. Turbulens mozgásnál (ami itt a diszperzióra is a jellemző körülmény lesz), az előbbi keresztszorzat reprezentálja a fluktuáló sebességek miatt előálló anyagtranszportot. De nézzük csak meg egy kicsit közelebről a **3.67** egyenlet középső tagját. Ez az elem egy advekción tag, amely az átlagkoncentráción (\bar{C}) dolgozik, de a nem véletlenszerű vertikális sebességeltérések ($u'(z)$) szerint. Így tehát ez egy transzport tag, ami a nyíró sebességprofil működését reprezentálja.

A következőkben nézzünk meg egy másik Taylor által elkészített éles elméjűsége valló egyszerűsítést. A diszperziós folyamat kezdeti szakaszában (a **35. ábra** (a.) és (b.) pontjában) a koncentráció fluktuációja változó (unsteady). De lefelé haladva (a (c.) pontban), miután a sebességprofil hatása már mindenhol érvényesült, a vertikális koncentráció fluktuáció el fog érni egy állandósult (steady-state) állapotot (az anyagok vertikális irányú transzportja ekkor kiegyenlített lesz), amely egy konstans (idő invariáns) diszperziós tényező esetét reprezentálja.

Ebben az állandósult állapotban a **3.67.** egyenlet leegyszerűsödik (a koncentráció fluktuáció időbeli változását reprezentáló tag kiesik).

$$u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \cdot \frac{\partial C'}{\partial z} \right) \quad (3.68)$$

amely, összefüggésben, az előbbihez (**3.67**) képest, egy nem állandó D_z tényezőt tételeztünk fel.

Kétszeres z -szerinti integrálással C' -re megoldva az előbbi egyenletet a következőt kapjuk.

$$C'(z) = \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \cdot \int_0^z \frac{1}{D_z} \cdot \int_0^z u' dz dz \quad (3.69)$$

amely egyenlet ígéretesnek látszik, de még mindig tartalmaz egy ismeretlen \bar{C} -ra vonatkozó tagot.

Lépünk vissza egy pillanatra és vegyük fontolóra mennyi a hossz irányban értelmezett tömegfluxus. A mozgó koordináta-rendszerünkben, csak egy sebességünk van, így az advektív tömegfluxus (q_a) a következő kell, hogy legyen:

$$q_a = u' \cdot (\bar{C} + C') \quad (3.70)$$

Hogy megkapjuk az integrált tömeg fluxust (kereszt-szelvényre vonatkozó anyagáramot), számítsuk ki **3.70** összefüggés mélység szerinti átlagát (vigyázzunk az átlagos fluxus, még nem a kereszt-szelvényre vonatkozó anyagáram).

$$\bar{q}_a = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h u' \cdot (\bar{C} + C') \cdot dz = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h u' \cdot C' \cdot dz = \overline{u' \cdot C'} \quad (3.71)$$

Az előbbi egyszerűsítésnél felhasználtuk, hogy $u' \cdot \bar{C}$ szorzat mélység szerinti átlaga zérus. Behelyettesítve a **3.69**-es, C' -re vonatkozó megoldást az előbbi (**3.71**) összefüggésünkbe, a mélység mentén átlagolt tömegfluxusra adódik.

$$\bar{q}_a = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h u' \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \cdot \int_0^z \frac{1}{D_z} \cdot \int_0^z u' dz dz dz \quad (3.72)$$

A $\frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi}$ tagot kivehetjük az integrál jel elé, mivel független a z -tól. A kapott összefüggésre a Fick-féle törvény tömeg-fluxusra vonatkozó alakját alkalmazva kapjuk a következőt.

$$\bar{q}_a = -D_L \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \quad (3.73)$$

ahol, a D_L tag jelentése:

$$D_L = -\frac{1}{h} \cdot \int_0^h u' \cdot \int_0^z \frac{1}{D_z} \cdot \int_0^z u' dz dz dz \quad (3.74)$$

Mivel a D_L tagra vonatkozó összefüggésünk csak a mélység és a sebességprofil függvénye (meg D_z paraméteré, de az szintén az előbbieken alapján adható meg lásd. **3.33**, **3.40**, **3.41** és **3.42** összefüggéseket) D_L értékét bármilyen sebességprofilra számíthatjuk integrálással. Az előbbieken szerint tehát sikerült egy analitikus megoldást kapnunk a hosszirányú diszperziós tényezőre.

Az utolsó lépés, hogy behelyettesítsük a kapott eredményünket a mélység szerint átlagolt (3.63-as) vezérlő egyenletünkbe. Vegyük észre azonban, hogy a 3.63-as egyenletünk nemcsak mélység szerint átlagolt, hanem keresztirányban is, hiszen a kiindulási feltételek között szerepelt, hogy a keresztirányú koncentráció gradiense zérus volt.

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_L \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} \right) \quad (3.75)$$

Az előbbi egyenlet az eredeti, álló koordinátarendszerre visszatranszformálva megadja az egy dimenziós advektív diszperziós egyenletet.

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_L \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) \quad (3.76)$$

amelyben, a D_L a 3.74 egyenlet szerint definiált (Socolofsky-Jirka 2005).

3.3.2. Hosszirányú diszperziós tényezők számítása

Az előző részben megadott analitikus megoldás (3.74) alapján próbáljunk meg számítási módszereket találni gyakorlati problémák megoldásához. Valódi vízfolyások esetében, általában inkább a keresztirányú (y koordinátatengely iránya) nyíróáramlás inkább, mint a vertikális (z irányú) irányú nyírás játszik sokkal fontosabb szerepet. A keresztirányú nyíróáramlás esetére Fischer et al. (1979) az előző részben leírthoz hasonló elemzés alapján vezette le a következő összefüggést:

$$D_L = -\frac{1}{A} \cdot \int_0^W u' \cdot h \cdot \int_0^y \frac{1}{D_y \cdot h} \cdot \int_0^y u' \cdot h \cdot dy \quad (3.77)$$

ahol, A , a keresztmetszvény területe [L^2] (korábban már definiált), W pedig a szélessége [L] a vizsgált vízfolyásnak. Függetlenül attól melyik összefüggést választjuk, a kérdés még mindig fennáll, hogy hogyan tudjuk ezeket az integrálokat a legjobban kiszámítani.

Analitikus megoldás

Lamináris áramlások esetére létezhetnek analitikusan megadható sebesség profilok és a 3.74-es összefüggés analitikusan is számítható. Fischer et al. (1979) példáját követve, a legegyszerűbb áramlás a két végtelen felületű lap közötti áramlás, ahol a felső lap U relatív sebességgel mozog az alsó laphoz képest. Erre az esetre D_L értékre adódik:

$$D_L = \frac{U^2 \cdot d^2}{120 \cdot D_z} \quad (3.78)$$

ahol, a d a két lap közötti távolság [L].

Hasonlóan megadható a csőben kialakuló lamináris áramlás esetére a D_L .

$$D_L = \frac{U_0^2 \cdot a^2}{192 \cdot D_r} \quad (3.79)$$

ahol, a a cső sugara [L], U_0 a cső tengelyében mérhető sebesség [LT^{-1}] és D_r a radiális diffúziós tényező [L^2T^{-1}].

Turbulens áramlásokra az elemzés hasonló ahhoz, amit a turbulens diffúzióval foglalkozó alfejezetben végrehajtottunk és az eredmény a 3.74-es összefüggés szerinti formáját tartja meg. Az összefüggésbe a turbulens diffúziós tényezőt és az átlagos turbulens nyírósebesség profilt

helyettesítjük be a D_z és az u' helyére. Ezek alapján egy csőben beálló turbulens áramlás hosszirányú diszperziós tényezője a következő.

$$D_L = 10,1 \cdot a \cdot u^* \quad (3.80)$$

ahol, u^* [LT^{-1}] a már korábban definiált nyíró vagy más néven fenékcúsztató sebesség. Egy különös fontossággal bíró eredmény egy végtelen széles, h mélységű nyílt felszínű csatornára érvényes összefüggés. Logaritmikus sebesség profilt használva (3.33) a Kármán-féle konstanst 0,4-nek véve a 3.74-es összefüggés alapján a diszperziós tényező a következőképpen számítható.

$$D_L = 5,93 \cdot h \cdot u^* \quad (3.81)$$

Összehasonlítva az eredményt a hosszirányú turbulens diffúzióra kapott összefüggéssel az előző fejezetből ($D_{t,x} = 0,15 \cdot h \cdot u^*$) láthatjuk, hogy a D_L -re vonatkozóan hasonló alakú összefüggést kapunk ($\propto h \cdot u^*$), azonban a D_L valójában sokkal nagyobb, mint a hosszirányú turbulens diffúziós tényező. Valódi nyílt felszínű csatornák esetére, ahol a két part közötti keresztirányú nyírósebesség profil dominánsá válik, a D_L -re vonatkozó szorzótényező 5 és 7000 között változhat (Fischer et al. 1979).

Numerikus integrálás

Számos gyakorlati mérnöki alkalmazás esetében, a változó medergeometria lehetetlenné teszi, hogy egy analitikus nyíró sebesség profilt becsüljünk. Ebben az esetben egy alternatív lehetőség, hogy a vízfolyás keresztmetszelyét szektorok sorozatára bontjuk szét, minden egyes szektorban egy jellemző függély mentén, több helyen megmérjük a sebességet (klasszikus forgószárnyas sebességmérés esete). A sebességekből szektoronként átlagot számolunk, így a keresztirányú sebességprofil rendelkezésre áll, ezután számítjuk a vízfolyás keresztmetszelyre vonatkozó átlagsebességétől való eltéréseket. A sebesség eltérések alapján a 3.77-es összefüggés segítségével numerikus integrálást alkalmazva számítjuk a diszperziós tényező értékét.

Mérnöki becslés

Amikor csak durva mérések állnak rendelkezésre, akkor is valahogyan szükséges egy mérnöki szempontból okszerű becslése a hosszirányú diszperziós tényezőnek. Hogy ezt megtehesük, írjuk fel a 3.77-es összefüggésünket dimenzió nélküli formában.

$$y = W \cdot y^* ; u' = \sqrt{u'^2} \cdot u'^* ; D_y = \overline{D_y} \cdot D_y^* ; h = \bar{h} \cdot h^* \quad (3.82)$$

ahol, a felülvonások keresztmetszely menti átlagot jelentenek.

Amint már elmondtuk a vízfolyások hosszirányú diszperzióját a keresztirányú nyíró sebesség profilok határozzák meg dominánsan. Ez az amiért y és D_y van a 3.77 egyenletben feltüntetve. Az előbbi tagokat dimenziómentes formában behelyettesítve a 3.77 egyenletbe, a következőt kapjuk.

$$D_L = \frac{W^2 \cdot \overline{u'^2}}{D_y} \cdot I \quad (3.83)$$

ahol,

$$I = - \int_0^1 u'^* \cdot h^* \cdot \int_0^{y^*} \frac{1}{d_y^* \cdot h^*} \cdot \int_0^{y^*} u'^* \cdot h^* \cdot dy^* dy^* dy^* \quad (3.84)$$

Vigyázzunk itt a d_y^* nem a keresztirányú diszperziós tényezőt jelöli, hanem a D_y keresztirányú diffúziós tényező dimenziómentes formáját. Fischer et al. (1979) kimutatta, hogy a legtöbb gyakorlati esetben megfelelő, ha az I -t a 0,01-0,1 tartományban vesszük fel.

Egy lépéssel továbbmenve, további nagyságrendi becsléseket vezetünk be Fischer et al. (1979) mérései alapján. Kísérletek és terepi mérések alapján megállapítható, hogy az $\frac{\overline{u'^2}}{\overline{u}^2}$ arány 0,2±0,03 között vehető fel. Szabálytalan vízfolyásokra a $\overline{D_y} = 0,6 \cdot h \cdot u_*$ adható meg a korábbiak szerint. Ezeket az értékeket behelyettesítve a **3.83**-ba az $I=0,033$ értéket felvéve adódik.

$$D_L = 0,011 \cdot \frac{W^2 \cdot \overline{u}^2}{h \cdot u_*} \quad (3.85)$$

amely összefüggés egy négyszeres szorzón belül volt érvényes a vizsgálatok alapján. Az eltérések elsődlegesen az elemzés során egyes faktorok figyelembe nem vételéből adódtak, ilyen tényezők például a recirkulációk (visszaforgások) és holt zónák.

Geomorfológiai alapú becslés

Deng et al. (2001) az előbbieken tárgyalt mérnöki becsléshez hasonló megközelítést publikáltak a diszperziós tényezők egyenes vonalvezetésű vízfolyások esetében történő becslésére a jellemző geomorfológiai paraméterek alapján. Az általuk megadott kifejezés a következő alakú.

$$\frac{D_L}{h \cdot u_*} = \frac{0,15}{8 \cdot \epsilon_{t0}} \cdot \left(\frac{W}{h}\right)^{\frac{5}{3}} \cdot \left(\frac{\overline{u}}{u_*}\right)^2 \quad (3.86)$$

ahol, ϵ_{t0} egy dimenzió nélküli szám, amely a következőképpen adható meg.

$$\epsilon_{t0} = 0,145 + \frac{1}{3520} \cdot \frac{\overline{u}}{u_*} \cdot \left(\frac{W}{h}\right)^{1,38} \quad (3.87)$$

Ezek az egyenletek stabil medrű folyók hidraulikájának és geometriájának kapcsolatán alapulnak, avval a feltételezéssel, hogy az egyenletes áramlásra vonatkozó formula érvényes helyi mélység szerint átlagolt változókra. Deng et al. (2001) az előbbi összefüggés **(3.86)** által megadott becslést összehasonlította a **3.85** egyenlettel számított becsléssel és 73 db. terepi mérésorozat adataival. Több, mint 64%-a az előbbi, **3.86** egyenlettel történt becslésnek a mérésekből származó értékekkel összehasonlítva a $0,5 \leq D_{L, \text{becslés}} / D_{L, \text{mérés}} \leq 2$ tartományon belülre esett. Ez a pontosság átlagban jobb, mint ami a **3.85** alapján adódott, azonban néhány egyedi esetben a **3.85** egyenlet jobb becslést adott.

Nyomjelzős vizsgálatok használata

Az egyik leginkább megbízható módja a diszperziós tényezők számításának nyomjelzős vizsgálatok végzése, amint ezt a következő részben be is fogjuk mutatni egy alkalmazáson keresztül. Fontos figyelni arra, hogy mivel a D_L a sebességprofiltól függ, tehát általában a vízhozamnak is függvénye. Így a nyomjelzős vizsgálatnál egy adott vízhozamnál meghatározott diszperziós tényező nem szükségszerűen alkalmazható egy másik helyzetre eltérő vízhozamtartományban. Az ilyen esetekben valószínűleg az adja a legjobb megoldást, hogy nyomjelzős mérések sorozatát végezzük el különböző vízhozam tartományokban. Egy másik megoldás egyetlen nyomjelzős vizsgálat esetében, hogy annak eredményét összehasonlítjuk pl. a 3.85 egyenlet alapján történő becsléssel, acélból hogy az összevetés alapján az egyenletet alkalmasabbá tehesük a más vízhozam-tartományokban (vagy egyéb körülmények között) történő becslésre.

Elkeveredés vizsgálata vízfolyásokban

Egy elkeveredési jellemzők becslésre végzett nyomjelzős vizsgálat részeként egy diák egy pontszerű forrásként nyomjelzőt adagol folyamatosan egy felszíni vízfolyásba a keresztmetszvény közepi részén. Tárgyaljuk meg a lezajló elkeveredési folyamatokat és azokat a hossz skálákat, amelyek a bejuttatott nyomjelző útját befolyásolják.

Bár a bejuttatott nyomjelző kezdeti vertikális impulzusa általában jó függély menti elkeveredést idéz elő, tételezzük fel most azt, hogy a diák nagyon óvatosan csak a felszínre juttatja ki a nyomjelzőt. Ebben az esetben a vertikális turbulens diffúzió fogja elkeverni a nyomjelzőt a mélység szerint és a „vertikális elkeveredés egy vízfolyásban” című alfejezet példájából tudjuk, hogy a bejuttatott anyag vertikálisan teljesen elkeveredtként kezelhető a bebocsátási ponttól,

$$L_z = 12 \cdot h \quad (3.88)$$

ahol, h a vízfolyás mélysége [L].

Amint az anyagfelhő (csóva) lefelé mozog, folyásirányban a keresztirányú turbulens diffúzió elkeveri a nyomjelzőt keresztirányban (Sokolofsky-Jirka 2005).

Amennyiben arra vagyunk kíváncsiak, hogy mennyi az a távolság, ami alatt a vízfolyás sodorvonalában (az előbbieket a keresztmetszvény középvonalát említettük, ami kanyarulatmentes szakaszon megegyezik a sodorvonallal) permanens formában bebocsátott szennyezőanyag (mélység mentén átlagolt jellemzőkkel) csóvájának széle mikor éri el a vízfolyás partját először definiálnunk kell a csóva szélét (**37. ábra**). Ezt tegyük meg a keresztirányú szórás (σ_y) segítségével, amely a csóva keresztirányú eloszlására a Gauss-féle normális eloszlás analógiája, amely a \bar{C} , mélység mentén átlagolt koncentráció eloszlását adja meg,

$$\bar{C}(x, y) = \frac{M}{h \cdot \sqrt{4 \cdot D_y^* \cdot \bar{u} \cdot x}} \cdot \exp\left(-\frac{\bar{u}}{4 \cdot D_y^* \cdot x} \cdot y^2\right) \quad (3.89)$$

alapján a következőképpen írható.

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{2 \cdot D_y^* \cdot x}{\bar{u}}} \quad (3.90)$$

ahol, \bar{u} a hosszirányú sebesség átlaga, [LT^{-1}], D_y^* a keresztirányú turbulens diszperziós tényező, x pedig a hossz menti koordináta [L]. A csóva szélét defináljuk most úgy, hogy ahhoz a legnagyobb koncentráció bizonyos rögzített százaléka tartozzék. Amennyiben ez 10%, akkor

$y = 2,15 \cdot \sigma_y$, és így a csóva a szélessége (W_{cs} [L]) a szimmetria figyelembevételével a következő:

$$W_{cs} = 4,3 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot D_y^* \cdot x}{\bar{u}}} \quad (3.91)$$

A $W \approx W_{cs}$ feltételből, ahol W a vízfolyás szélessége, a partélek eléréséhez szükséges távolság az elkeveredés egyik fontos jellemzője a következő.

$$L_1 = 0,027 \cdot \frac{\bar{u} \cdot W^2}{D_y^*} \quad (3.92)$$

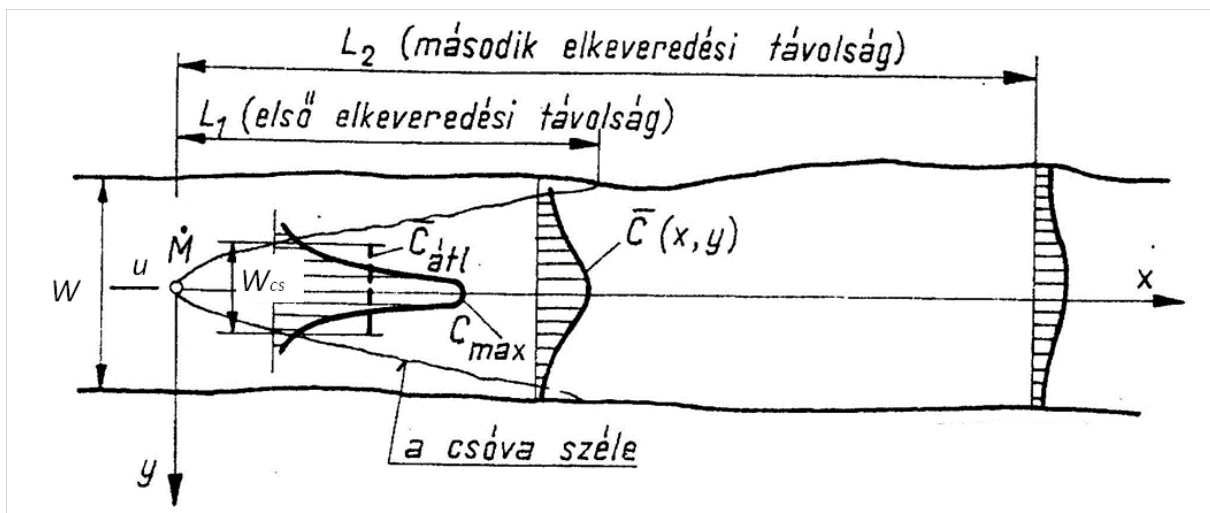
ahol, L_1 az úgynevezett első elkeveredési távolság [L].

A 3.92 egyenlet alapján viszont az alábbi lényeges következtetések vonhatók le.

- Az L_1 egyenesen arányos a áramsebességgel és fordítottan arányos a diszperziós tényezővel,
- L_1 a szélesség négyzetével nő. Ez magyarázza azt, hogy míg értéke pl. Sajó nagyságú vízfolyásoknál néhány száz méter, addig a Duna esetében 100 km-t is elérhet.

A koncentráció szelvényen belüli teljes elkeveredéséhez (kiegyenlítéséhez) szükséges távolság (L_2 úgynevezett második elkeveredési távolság) jelentősen nagyobb, mint az L_1 , de a 3.89 egyenletből nem vezethető le, mivel a megoldás a partélek hatását nem veszi figyelembe. Ha a partélek hatását is figyelembe vesszük, de a bevezetés parti, a L_2 távolság durván az L_1 háromszorosának adódik.

$$L_2 \approx 3 \cdot L_1 \quad (3.93)$$



37. ábra: Szennyezőanyagok permanens elkeveredésének szemléltetése keresztirányban (középvonalban történő bevezetés esete), (Somlyódy 1985 nyomán)

Egy másik megközelítés szerint újra a „vertikális elkeveredés egy vízfolyásban” című alfejezet okfejtését segítségül hívva a nyomjelzőt keresztirányban teljesen elkeveredettnek vehetjük a bebocsájtási ponttól,

$$L_y = \frac{W^2}{3 \cdot h} \quad (3.94)$$

ahol, W a vízfolyás szélessége [L]. Ez az egyenlet tehát egy más megközelítésből ad becslést a L_2 [L], úgynevezett második elkeveredési távolságra.

A bebocsájtási pont és az L_z távolság között az csóva teljes mértékben három dimenziós mozgású és nem kell egyszerűsítéseket tennünk a transzport egyenletben. Az L_z távolságon túl a csóva vertikálisan elkeveredett és a hosszirányú diszperzió fogalma használható. Az L_y -nál kisebb távolságokra azonban két dimenziós modellt célszerű használni pl. a 3.47 egyenlet szerint, ahol keresztirányú és hosszirányú diszperziós tényezőket célszerű használni a mélységi átlagolás miatt. Az L_y távolságon túl az egy dimenziós hosszirányú diszperziós modell alkalmazható (keresztmetszvény szerint átlagolt jellemzőket használva).

3.4. Mintapélda: Nyomjelzős vizsgálat

A nyomjelzős vizsgálat célja, hogy segítségével leírjuk egy vízfolyás áramlási jellemzőit (pl. hozamát) és meghatározzuk transzport tulajdonságait (különösen ezek közül az átlagos advekciós sebességet és az effektív hosszirányú diszperziós tényezőt). Hogy becsülni tudjuk ezeket a mennyiségeket adagoljunk egy vízfolyásba jelzőanyagot és egy alsóbb keresztmetszvényben mérjük annak koncentráció eloszlását, majd hasonlítsuk össze az eredményeinket az analitikus megoldásokkal. A jelzőanyag bejuttatásának két fő típusa a pillanatszerű bejuttatás és a folyamatos adagolás. A következő fejezetekben nézzük meg ezen két módszer végrehajtását és annak eredményeit.

3.4.1. A mérés előkészítése

A nyomjelzős vizsgálat előkészítésénél mérnöki becsléseket használunk a várható transzport tulajdonságokkal kapcsolatban, hogy meg tudjuk határozni a mérés vagy mérések célszerű helyét, a kísérlet időtartamát, a szükséges jelzőanyag mennyiségét, és a jelzőanyag bejuttatásának módját.

Hogy számszerű adatokkal is dolgozzunk, illusztrációképpen vegyünk egy adott vízfolyás keresztmetszvényét, ahol az átlagos vízmélység $h=0,35$ m és a vízfelszín szélessége $W=10$ m. A mérési hely terepszemléjénél megérjük a felszíni áramlási sebességét (úszóként leveleket használva) $u_s=0,53$ m/s. Ökölszabályként felhasználva, hogy a keresztmetszvény átlagsebessége a felszíni sebességnek 85%-a, számíthatjuk az átlagsebességet:

$$\bar{u} = 0,85 \cdot u_s = 0,45 \text{ m/s} \quad (3.95)$$

A meder esését topográfiai térképről meghatározva az $S=0,0005$ -nek adódik. A meder alakja egyenletes, kissé meanderező.

A mérési hely kiválasztása

Egy kritikus része a nyomjelzős vizsgálatnak, hogy a beadagolás helyétől a mérés folyásirányban elég távol helyezkedjen el ahhoz, hogy a nyomjelző keresztmetszvényben egyenletesen elkeveredhessen. Ha túl közel mérünk a forráshoz kaphatunk ugyan egy Gauss-féle görbéhez hasonló alakot a $C(t)$ eloszlására, de a koncentráció nem lesz egységes a keresztmetszvényben és az elégtelen hígulás hibát eredményez. Használjuk ezért az elkeveredési hosszra vonatkozó ökölszabály szerű becslést, hogy a szükséges folyásirányú távolságot meghatározzuk. Érdemes itt megjegyezni, hogy a kisebb vízfolyások esetében (ha csak vízhozammérés a cél) a keresztirányú elkeveredést gyorsíthatjuk, ill. a koncentrációkiegyenlítődést tökéletesebbé tehetjük, ha a vizsgált szakaszon a holtterek jelenlétét megszüntetjük, ill. a mérési pont helyén a keresztmetszvényt beszűkítjük egy kis földmunkával.

Feltételezzük, hogy a bejuttatás pontszerűen történik és a jelzőanyagok mind vertikálisan, mind keresztirányban el kell keverednie. Ekkor a két jellemző turbulens diffúziós tényező a következőképpen számítható:

$$D_{t,z} = 0,067 \cdot h \cdot u_* = 0,067 \cdot h \cdot \sqrt{g \cdot h \cdot S} = 9,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s} \quad (3.96)$$

$$D_{t,y} = 0,6 \cdot h \cdot u_* = 0,6 \cdot h \cdot \sqrt{g \cdot h \cdot S} = 8,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s} \quad (3.97)$$

Az idő (t), ami a diffúzióhoz szükséges, hogy a nyomjelzőanyagot l távolságra szétterjessze, $l^2/(12,5 \cdot D)$ (2.32 hasonló skálázási képlet alapján számítva). Így az a távolság, amit ez alatt az idő alatt a tracer megtehetne a következő:

$$L_x = \frac{l^2}{12,5 \cdot D} \cdot \bar{u} \quad (3.98)$$

Sokféle lehetőség van a nyomjelző bejuttatására. Ha a felszínen vagy a fenéken jutjuk be, a nyomjelzőnek szét kell terjednie vertikálisan a teljes mélységben, a mélység közepvonalaiban jutjuk be, akkor csak a fél mélységnyi távolságot kell a diffúzióhoz legyőznie. Hasonlóképpen, ha a bebocsátás az egyik parton történik, akkor a nyomjelzőnek a teljes folyó szélességében szét kell terjednie, míg egy közepvonalbéli bejuttatásnál a nyomjelzőnek csak a fél szélességben kell szétszórulnia. Gyakran fennáll az a lehetőség, hogy a folyó közepvonalaiban a vízfelszínre jutjuk a jelzőanyagot. Ilyen típusú bejuttatásnál, az előbbi példánk szerinti adatokkal számolva a vertikális elkeveredés távolsága

$$L_{m,z} = 12 \cdot h = 4,2 \text{ m} \quad (3.99)$$

míg a keresztirányú elkeveredés távolságára a fél szélességet figyelembe véve adódik

$$L_{m,y} = \frac{W^2}{3 \cdot h} = 95 \text{ m} \quad (3.100)$$

Így a példánkban a mérési pontnak célszerű legalább 100m-re lennie lefelé a bebocsátás helyétől.

A csóva hosszirányú szétterjedése a diszperziós tényező által jellemzett. Fischer et al. (1979) által megadott **3.85** összefüggést felhasználva a diszperziós tényezőre a következő becslést adhatjuk:

$$D_L = 0,011 \cdot \frac{W^2 \cdot \bar{u}^2}{h \cdot \sqrt{g \cdot h \cdot S}} = 15,4 \text{ m}^2/\text{s} \quad (3.101)$$

Azt szeretnénk, hogy a csóva hosszirányú kiterjedése a mérési pontunknál mindenképpen rövidebb legyen, mint az a távolság, ami a bebocsátási- és a mérési hely között mérhető. Ebből a célból szeretnénk, ha a Peclet-szám a mérési pontunknál már 0,1-nek vagy annál kevesebbnek adódna ($Pe \leq 0,1$, vagyis jellemzően az advektív folyamatok lennének már dominánsak). Az előbbi kritérium a következőképpen adható meg:

$$L_m = \frac{D_L}{\bar{u} \cdot Pe} = 342 \text{ m} \quad (3.102)$$

Mivel a Peclet-számmal megadott kritérium sokkal szigorúbb, mint a korábbi keresztirányú elkeveredésre megadott, ezért válasszuk a mérési helyül a beadagolás helyétől $L_m=350\text{m}$ -re folyásirányban lefelé fekvő keresztiszelvénnyel.

A mérés időtartamának meghatározása

A folyásirányban lefelé elhelyezkedő mérési pontnál elegendően hosszú időtartamig kell a mérést folytatnunk, hogy sikerüljön a szennyezőanyag felhőt (annak elejétől a végéig, vagy egy már reprezentatív pontjáig) megfelelő mértékben mintáznunk, annak áthaladása közben. A felhő középpontja a mérési helyünket a folyó átlagos sebességével éri el:

$$t_c = \frac{L_c}{\bar{u}} = 778 \text{ s} \quad (3.103)$$

A diszperzió miatt azonban a nyomjelző egy része korábban érkezik, míg egy része hátramarad. Egy lehetséges becslés annak a nyomjelző felhő szakaszának a hosszára, ami a felhő súlypontjának áthaladása még érzékelhető:

$$L_\sigma = 3 \cdot \sqrt{2 \cdot D_L \cdot \frac{L_m}{\bar{u}}} = 525 \text{ m} \quad (3.104)$$

Észrevehető, hogy az L_σ számításánál a biztonság kedvéért a fél csóvára háromszoros szórótávolságot vettünk figyelembe. Az előbbi L_σ távolságot időben kifejezve, $t_\sigma=1170$ s. Az előbbieket alapján a mérést közvetlenül a nyomjelző beadagolása után célszerű elkezdenünk és t ideig folytatni.

$$t = t_c + t_\sigma = 1948 \text{ s} = 32,5 \text{ perc} \quad (3.105)$$

Hogy kerek idővel dolgozhassunk, folytassuk a mérést 35 percre.

A szükséges jelzőanyag mennyisége

A „nagyközönség” különösen manapság nem nagyon szeret vörös vagy narancsszínű vizet látni a vízfolyásokban, így mikor egy nyomjelzős vizsgálatot végzünk, célszerű a koncentrációt olyan alacsonyan tartani, hogy egy egyszerű szemlélő számára ne legyen feltűnő a színeltérés. Ez fluoreszcens nyomjelzőket használva lehetséges, mert ezek a mérőeszközök számára sokáig érzékelhetőek maradnak olyan koncentrációkban is, amit a laikus szemlélő már nem tud érzékelni. A leggyakrabban alkalmazott fluoreszcens nyomjelző a vízfolyások esetében a Rhodamin WT, de sok egyéb nyomjelző anyagot is alkalmazhatunk pl. egyszerűbb esetekben a normál konyhasót is.

A nyomjelzős vizsgálat előkészítésénél szükséges meghatározni tehát a beadagolandó nyomjelző mennyiségét. Egy általánosan alkalmazott terepi fluorométernek a mérési tartománya Rhodamin WT-re vonatkozóan $0,04-40 \cdot 10^{-2}$ mg/l között van. Hogy jól érzékelhető adatokat kapjunk és széles vízhozam-tartományhoz képesek legyünk alkalmazkodni a mérési ponton a maximum koncentrációt célszerű a fluorométer felső mérési tartományához közel tervezni, az előbbi példát használva a $C_{max} = 4$ mg/l legyen.

A bejuttatandó nyomjelző mennyisége függ attól is, hogy a kísérlet egyszeri pontszerű beadagolással vagy folyamatos jelzőanyag adagolással dolgozik. Egyszeri pontszerű beadagolásra, használjuk a pillanatszerű pontszerű forrásra (pontosabban annak maximum koncentrációjára) kidolgozott megoldást, az előbbieken meghatározott (3.96) hosszirányú diszperziós tényező értékével.

$$M = C_{max} \cdot A \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot D_L \cdot \frac{L_m}{\bar{u}}} = 5,4 \text{ g} \quad (3.106)$$

Folyamatos beadagolás esetére becsüljük meg a nyomjelző anyagáramot becsüljük meg a várt hígításnak megfelelően.

$$\dot{m} = \bar{u} \cdot A \cdot C_{max} = 6,3 \text{ g/s} \quad (3.107)$$

Ezek a számítások azt mutatják, hogy a folyamatos beadagolás sokkal több nyomjelző anyagot igényel, mint a pillanatszerű.

A beadagolás módja

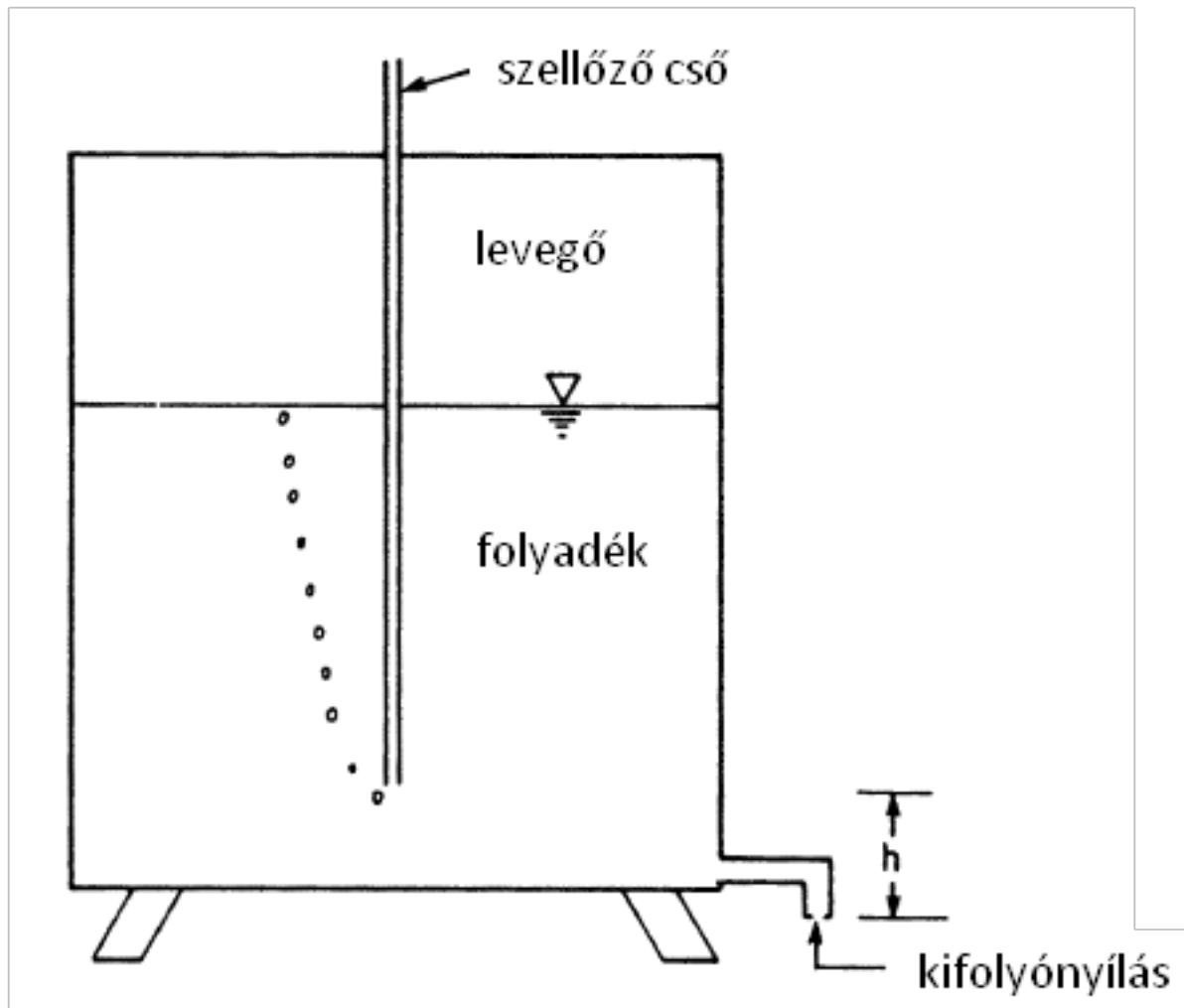
Azért, hogy a beadagolás kedvezőbb legyen, oldjuk fel a por formájú jelzőanyagot víz és alkohol keverékébe mielőtt a vízfolyásba adagoljuk. Az alkohol ahhoz szükséges, hogy a nyomjelző sűrűségkülönbsége ne idézzon elő réteges áramlást, vagyis neutrális elegyet kapjunk a felhajtóerő szempontjából.

Pillanatszerű bebocsájtás céljából általában a vízfolyás középvezetékében öntsük be egyszerűen a kiszámított jelzőanyag mennyiségét és jegyezzük fel az időt, amikor a bejuttatás történt.

A folyamatos beadagolás egy csőhálózaton keresztül történik általában egy tárolóedényből, amely ismert koncentrációban tartalmazza a jelzőanyagot, és amelyből szabályozható, vagy legalábbis ismert állandó hozammal távozik a nyomjelző. A legegyszerűbb módja, hogy állandó nyomjelző hozamot érjünk el egy perisztaltikus pumpa. Egy másik lehetséges megoldás a Mariott-féle üveg használata, amelyet a **38. ábra** mutat be. A Mariott-féle üveg alapötlete, hogy egy konstans nyomású tartályt hozzon létre, ahol feltételezhető, hogy a nyomás egyenlő az atmoszférikus nyomással a függőleges levegőztető cső aljának szintjében. Addig az időpontig, amíg a tartályban elegendő nyomjelző van, hogy a függőleges levegőztető cső alja elmerüljön egy konstans hozam (Q_0) távozik a tartályból, amely a kibocsájtás és a tankban jellemző állandó nyomáskülönbség miatt áll elő. Mielőtt a terepre kivisszük az adagoló Mariott-féle üveget célszerű a laborban kalibrálni egy a kísérletnek megfelelő nyomáskülönbségre. A nyomjelző anyagárama a következő egyenlettel kalkulálható,

$$\dot{m} = Q_0 \cdot C_0 \quad (3.108)$$

ahol, a Q_0 a pumpa vagy a Mariott-féle üveg által produkált hozam, C_0 pedig a tárolóban lévő nyomjelző oldat koncentrációja.



38. ábra: A Mariott-féle üveg sematikus rajza (Fischer et al. 1979 nyomán).

3.4.2. Vízhozam meghatározása mért adatokból

A 39. ábra annak a folyamatos bebocsátásnak a hatására kialakuló koncentráció-megoszlásnak az áttörési görbét mutatja, amely az előbbi szakaszban megtervezett kísérleten alapult. A vízfolyás hozama abból az állandósult folyóbeli jelzőanyag koncentrációból (C_r) számítható, amelyet a $t = 35$ s-ban határoztunk meg. A 39. ábra leolvasva $C_r = 3,15$ mg/l, amelynek alapján a nyomjelzős kísérlet alatt jellemző vízhozam (Q_r) a következő volt.

$$Q_r = \frac{\dot{m}}{C_r} = 2,0 \text{ m}^3/\text{s} \quad (3.109)$$

Vegyük észre, hogy a vízhozamnak ez a fajta meghatározása független a keresztmetszeti területtől.

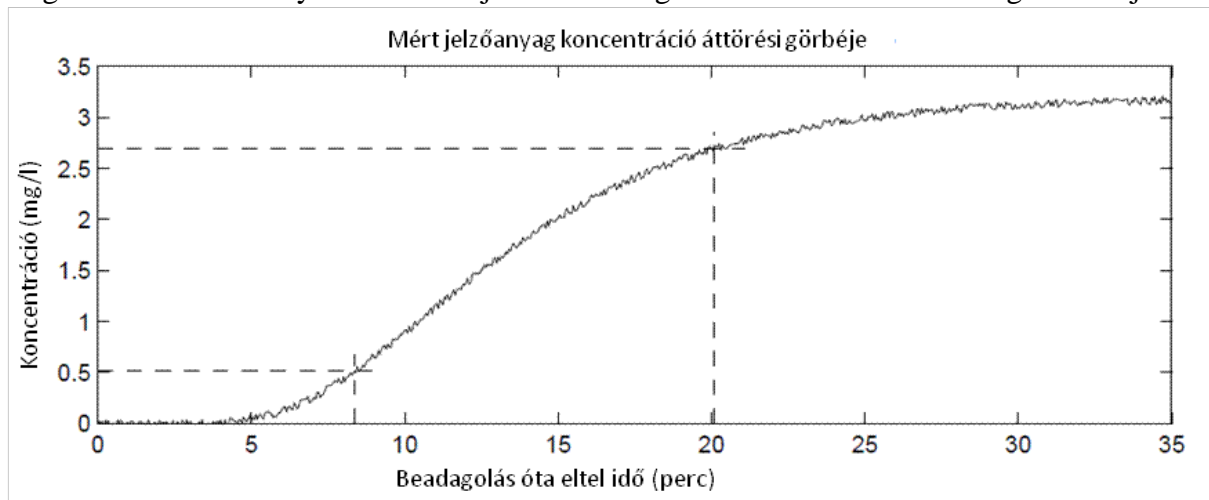
Hogy becsüljük a mérésünk hibáját, használjuk a hibaterjedésre vonatkozó egyenletet.

$$\delta\gamma = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial\gamma}{\partial m_i} \cdot \delta m_i \right)^2} \quad (3.110)$$

ahol, $\delta\gamma$ egy adott γ jellemző hibája, amelyet n db. m_i mérésből határoztunk meg. Ezek alapján számítva a becsült vízhozamunk hibáját a következőt kapjuk.

$$\delta Q_r = \sqrt{\left(\frac{C_0}{C_r} \cdot \delta Q_0\right)^2 + \left(\frac{Q_0}{C_r} \cdot \delta C_0\right)^2 + \left(\frac{Q_0 \cdot C_0}{C_r^2} \cdot \delta C_r\right)^2} \quad (3.111)$$

Ha a méréseink a bizonytalansága a következő volt, $C_r = 3,15 \pm 0,04$ mg/l, $C_0 = 32 \pm 0,01$ g/l és $Q_0 = 0,2 \pm 0,01$ l/s, akkor a vízhozamra vonatkozó becslésünk hibája a következő kellett, hogy legyen $Q_r = 2,0 \pm 0,1$ m³/s. A hibaterjedési formula segít nekünk abban is, hogy meghatározhassuk melyik hibaforrás járul hozzá leginkább a becslésünk összegzett hibájához.



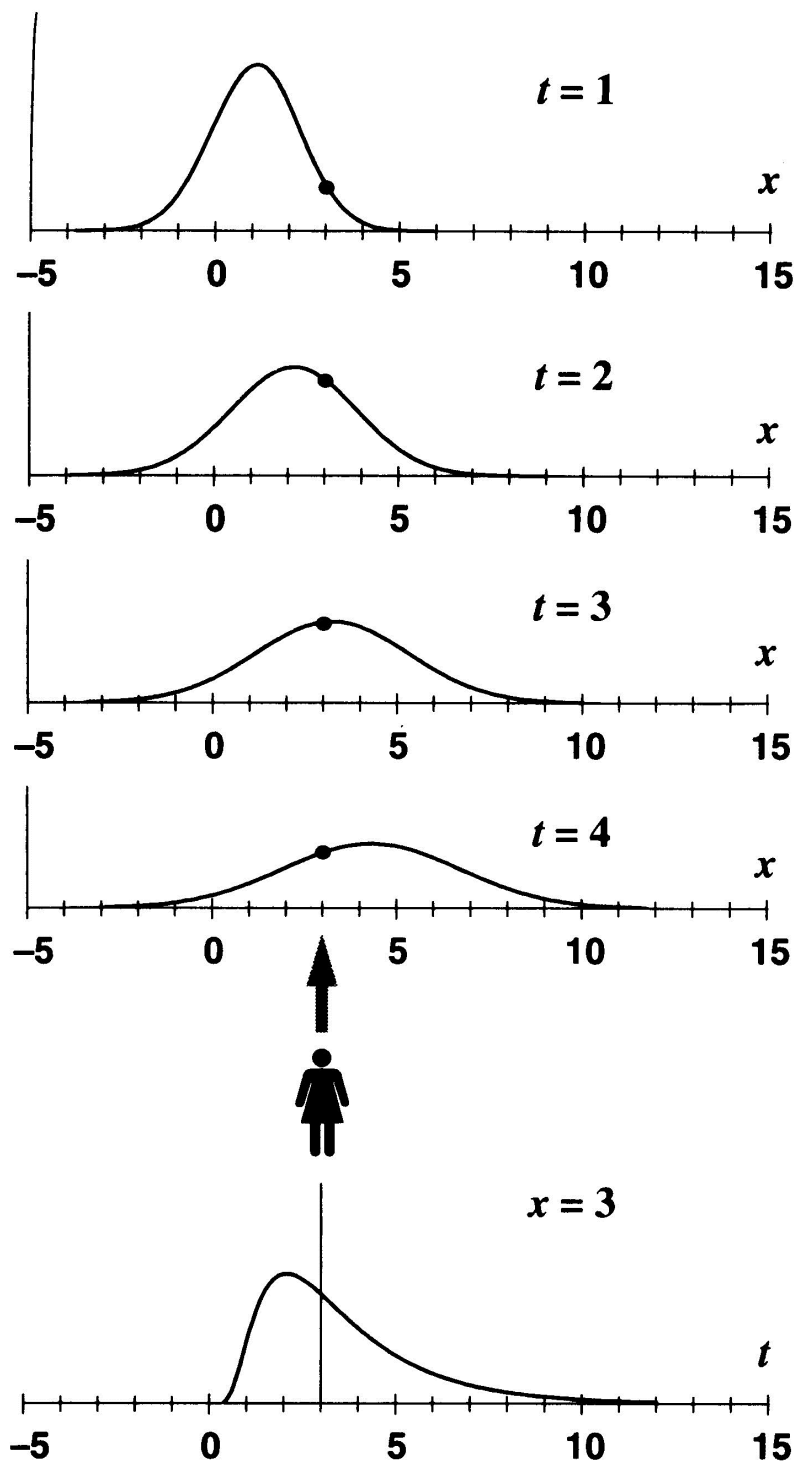
39. ábra: A minta kísérletben mért nyomjelző anyag koncentrációk állandó, folyamatos jelzőanyag bebocsátás mellett. A látható jelzőanyag fluktuáció a mérőműszer bizonytalansága miatt jelentkeznek és nem a turbulens ingadozás okozza azokat (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán).

3.4.3. Diszperziós tényezők meghatározás a mérés alapján

A 39. ábra látható áttörési görbe az összes olyan információt is tartalmazza, ami az in situ hosszirányú diszperziós tényező becsléséhez szükséges. Ahhoz, hogy ezt megtegyük, a következő ismert összefüggést fogjuk felhasználni.

$$\sigma^2 = 2 \cdot D_L \cdot t \quad (3.112)$$

Mivel nekünk az időbeli szórásra (σ) vonatkozóan vannak méréseink, ezeket át kell konvertálnunk a térbe, hogy az előbbi egyenletet használhassuk. Az egyik probléma az, hogy a nyomjelző felhő az alatt is folyamatosan növekszik, amíg áthalad a mérési helyen, így a szélesség, amit a front kezdetének áthaladásakor mérünk kisebb, mint a front nagy-részének áthaladása után mért szélesség. Vagyis a mérési helyen érzékelve a koncentrációkat, annak ellenére, hogy a jelzőanyag eloszlására egy adott időpontban a Gauss-féle szimmetrikus normális eloszlás jellemző, a jelenség folyamatos időbeli széthúzódása miatt egy ferde eloszlást tudunk mérni. A jelenséget jól szemlélteti egy pillanatszerű beadagolás esetére a 40. ábra.



40. ábra: A koncentráció felhő eloszlásának torzulást mérése egy adott (a beadagolástól $x=3$ km-re lévő) keresztmetszvényben. Bár a pillanatszerűen beadagolt jelzőanyag szétterjedésére a szimmetrikus haranggörbe alak jellemző, egy fix ponton mérve mégis ferde alakot érzékelünk az időben. Ennek oka, hogy a haranggörbe a mérés időtartama alatt folyamatosan terjed szét (forrás Chapra 1997).

Az előbbieket miatt tehát a jelzőanyag-felhő átlagos szélességet célszerű figyelembe vennünk a számítás során.

A nyomjelző front centruma a $C=0,5 \cdot C_0$ értéknél vehető fel, amely koncentráció $t = 12,94$ perc múlva a beadagolás kezdetétől halad át a mérési helyen (39. ábraleolvashatóan) és az átlagos vízfolyás sebességet reprezentálja. Az egy szórásnyi távolság ettől a ponttól balra a $C = 0,16$

C_0 –nál jelentkezik a **39. ábra** alsó szaggatott vonallal jelölt helyen. Ez a koncentráció a mérési pontot $t = 8,35$ perckor hagyta el. Az egy szórásnyi távolság a középponttól a $C = 0,84 C_0$ –nál jelentkezik, amely koncentráció $t = 20,12$ perckor hagyta el a mérőhelyet. Ezen információk alapján, az átlagos sebesség $\bar{u} = 0,45$ m/s és a jelzőanyag front átlagos szélességét kétszeres szórással számítva $2 \cdot \sigma_t = 20,12 - 8,35 = 11,77$ perc. Ehhez az átlagos időbeli szóráshoz tartozó idő $t = 8,35 + 11,77/2 = 14,24$ perc.

Hogy a D_L értékét számíthassuk a **3.112** egyenlet alapján, át kell alakítanunk a σ_t időbeli becslését, térbeli becslése a következő összefüggést felhasználva.

$$\sigma = \bar{u} \cdot \sigma_t \quad (3.113)$$

D_L -re megoldva a **3.112**-öt a következő adódik.

$$D_L = \frac{\bar{u}^2 \cdot \sigma_t^2}{2 \cdot t} = 14,8 \text{ m}^2/\text{s} \quad (3.114)$$

Ez a becslés jól illeszkedik az eredeti becslésünkhöz ($15,4 \text{ m}^2/\text{s}$), amelyet a **3.85** összefüggés alapján tettünk meg.

3.4.4. Nyomjelzős vizsgálat pillanatszerű beadagolással

végeztek a Cowaselon Creek nevű vízfolyáson Rhodamine WT nyomjelzőt használva, annak pillanatszerű bebocsátásával. A vízfolyás a vizsgált szakaszon nagyon egységes keresztmetszelvényekkel és egyenes permanens felszíngörbével volt jellemezhető a bebocsátási ponttól a mérési helyig. A beadagolás helyén a felmérték a keresztmetszelvényt és meghatározták a vízhozamot, az eredmények a következők voltak.

$$Q = 0,6 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}; W = 10,7 \text{ m}; \bar{u} = 0,17 \frac{\text{m}}{\text{s}}; h = 0,3 \text{ m} \quad (3.115)$$

A topográfiai térkép alapján a meghatározható volt a mérési szakaszon vízfolyás medrének esése.

$$S = 4,3 \cdot 10^{-4} \quad (3.116)$$

A koncentráció profilokat a vízfolyás mentén lefelé három keresztmetszelvényben mérték. Az első szelvény 670 m-re, a második 2800 m-re, a harmadik pedig 5320 m-re helyezkedett el a beadagolási ponttól. Mindegyik helyszínen a vízfolyás középvonalában, illetve a jobb és bal part közelében is mintáztak. A **41. ábra** mutatja a mért koncentráció profilokat.

A turbulens elkeveredés vertikális irányban a beadagolás helyétől lefelé a következő távolságon volt becsülhető:

$$L_{m,z} = 12 \cdot h = 3,6 \text{ m} \quad (3.117)$$

Ez a szelvény jóval a mérési pontjaink fölött helyezkedik el, így biztosan elvárhatjuk, hogy a csóva már jól elkeveredett lesz vertikálisan, amikor eléri a mérőhelyeinket.

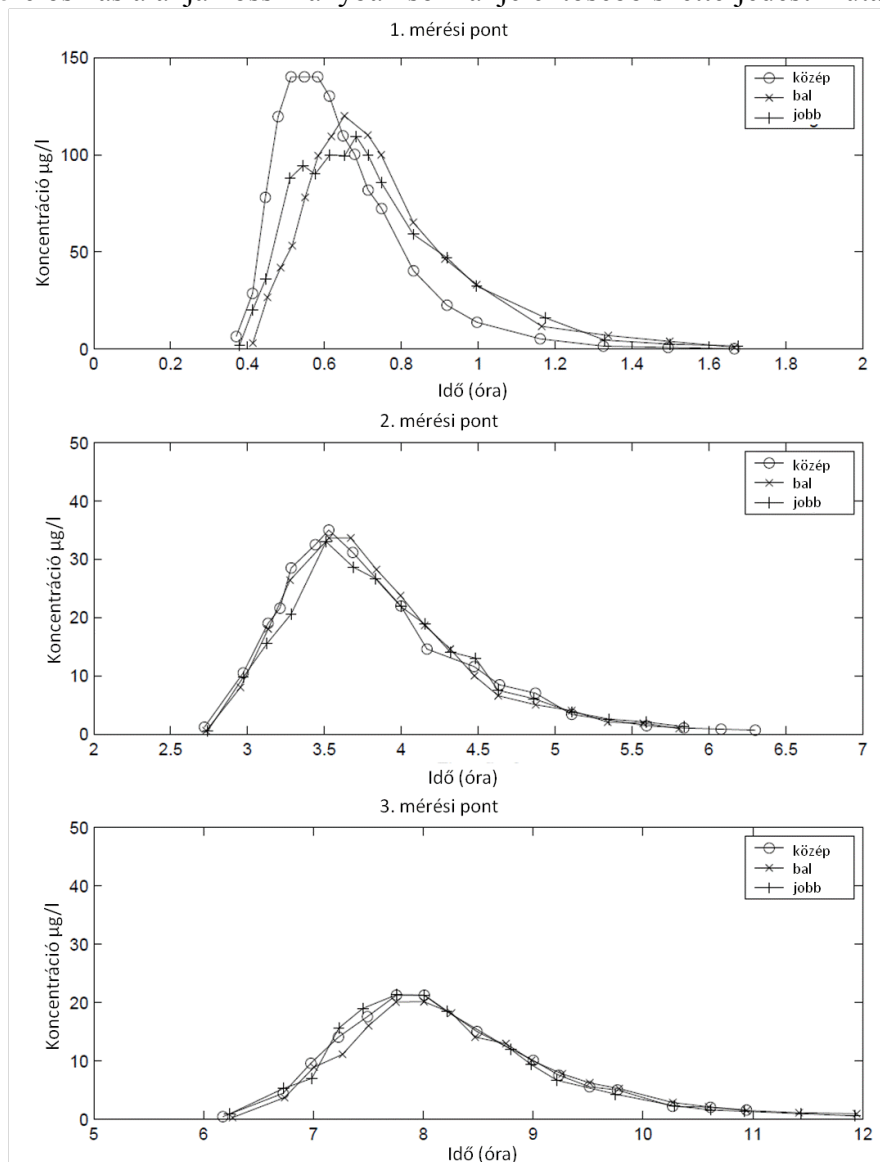
A keresztirányú elkeveredést értékelve, a **3.92** és **3.93**-as egyenleteket összekapcsolva a következő egyenlettel becsülhetjük a példánkban a keresztirányú elkeveredést (kerekítéseket alkalmazva).

$$L_{m,y} = 0,081 \cdot \bar{u} \cdot \frac{W^2}{D_y^*} \approx 0,1 \cdot \bar{u} \cdot \frac{W^2}{D_y^*} \quad (3.118)$$

ahol, mivel a vízfolyásszakaszunk egyenes $D_y^* = 0,15 \cdot h \cdot u_*$ becslés adható meg, és $u_* = 0,1 \cdot \bar{u}$ közelítéssel. Előbbiek szerint az $L_{m,y}$ távolságra a következő érték kalkulálható.

$$L_{m,y} \approx 6,7 \cdot \frac{W^2}{h} = 2557 \text{ m} \quad (3.119)$$

Mivel az első mérési pontunk a beadagolás helyétől csak 670 m-re található, itt még jól láthatjuk, hogy egy jellemző keresztirányú gradiens van jelen a koncentráció felhőben (**41. ábra**). A második mérési pontnál, 2800m-re lefelé a beadagolás helyétől ez a keresztirányú gradiens már szétdiffundált és a keresztirányú koncentráció megoszlás független az y keresztirányú koordinátától. Hasonló a helyzet a harmadik mérési pontnál, 5320 m-re a beadagolástól, ahol a csóva szintén elkeveredett keresztirányban, de a diszperzió miatt a koncentráció-eloszlás alakja hosszirányban sokkal jelentősebb szétterjedést mutat.



41. ábra: A Cowaselon-patakon pillanatszerű beadagolással történt nyomjelzős vizsgálat koncentráció-megoszlásai folyásirányban lefelé három jellemző keresztiszelvényben. A mérések egy adott keresztiszelvényben a vízfolyás középvonalában és a jobb illetve bal parthoz közel történtek (Socolofsky-Jirka 2005 nyomán).

A diszperziós tényezők számításához, számítsuk ki a koncentráció-eloszlás mérések alapján a második és a harmadik mérési pont között a felhő áthaladási idejét, valamint az egyes pontokon áthaladó csóvák szélességét (a σ szórásokkal jellemezve azt). A csóva két pont közötti áthaladási ideje $\delta t = 3,97$ óra (a mért eloszlások súlypontjainak mérési ideje között számítva az időkülönbséget). A szórásokkal becsült hosszirányú csóvaszélesség (a C_{max} értékek 61%-ánál mért koncentrációk metszeténél adódó kétszeres szórászélesség fele, az átlagsebességgel hossz dimenzióba átszámítva) a második mérési ponton $\sigma_{1,L} = 236$ m, míg a harmadikon $\sigma_{2,L} = 236$ m. A diszperziós tényező, a $\sigma = \sqrt{2 \cdot D \cdot t}$ összefüggést felhasználva, a következőképpen számítható.

$$D_L = \frac{\sigma_{2,L}^2 - \sigma_{1,L}^2}{2 \cdot \delta t} = 5,1 \frac{m^2}{s} \quad (3.120)$$

Hasonlítsuk össze a kapott eredményt a 3.85 és 3.86 egyenletek alapján történt becslésekkel, amelyek alapján a következő diszperziós tényezők számíthatók.

$$D_{L,Fischer} = 3,4 \frac{m^2}{s} \quad (3.121)$$

$$D_{L,Deng} = 5,4 \frac{m^2}{s} \quad (3.122)$$

Bár Deng et al. (2001) által megadott összefüggés eredménye közelebb áll a valósághoz, mint a Fischer et al. (1979) által kidolgozott, a gyakorlati célokra a $3,4 \text{ m}^2/\text{s}$ -os eredmény is elfogadható. Egy vízfolyásra, az adott körülmények között jellemző, a valóságot legjobban megközelítő elkeveredést leíró paramétereket mégis a nyomjelzős vizsgálatok adják.

Végül, de nem utolsósorban megjegyzendő, hogy az előbbi pillanatszerű bebocsátással jellemezhető vizsgálat alapján is számítható a vízhozam. A számításra a teljes keresztirányú elkeveredéssel jellemezhető második és harmadik mérési pontok adatai használhatóak fel. A számítás anyagáram alapú és a mért koncentrációk (C_{ti}) vízhozammal (Q_r) való anyagáram szorzatainak ($\dot{m}_{ti} = Q_r \cdot C_{ti}$) a csóva levonulási idején (τ) számított integrálja (numerikusan összegzése) vissza kell, hogy adja a beadagolt nyomjelző mennyiségét (M). Ebből az egyenletből számítható a hozam a következő összefüggéssel (feltételezve, hogy a háttér nyomjelző koncentráció a vízfolyásban zérus).

$$Q_r = \frac{M}{\int_0^\tau C_{ti} dt} \quad \text{numerikusan} \quad Q_r = \frac{M}{\sum_{i=0}^\tau C_{ti} \Delta t} = \frac{M}{\tau \cdot \overline{C_{ti}}} \quad (3.123)$$

ahol, $\overline{C_{ti}}$ a mért jelzőanyag-hullám egyenletes időközökkel mért koncentrációnak számtani átlaga.

A fejezetben tanultak rövid összefoglalása

Ebben a fejezetben a szennyezőanyag transzport jellemzőit elemeztük a környezetben jelentkező sebességek változásai (mint turbulenciát okozó hatások) szerint. A fejezet első részében, a turbulencia jelenségét tárgyaltuk és bemutattuk, hogy a turbulencia miatt ingadozó sebesség egy átlagos értékből és véletlenszerű tagból összerakható. Ezek alapján bevezettük a Reynolds-féle turbulens sebességekre vonatkozót dekompozíciót az advektív diffúziós egyenletbe, az új turbulens diffúzióra érvényes egyenlet formája hasonló, mint a molekuláris diffúzióra érvényes egyenleté, de nagyobb ún. turbulens diffúziós tényezővel. A másodikként tárgyalt változó sebességek típusa egy ún. nyíró sebesség profilra vonatkozott, amely egy átlagos áramlási sebességgel és egy ettől a sebességtől való determinisztikus eltéréssel jellemezhető. A nyírási profilra érvényes módosított Reynolds-féle dekompozíciót behelyettesítve az advektív diffúziós egyenletbe és mélység, ill. később keresztirányú szerint átlagolva egy új kereszt és hosszirányú tagokat, majd később csak egy hosszirányú tagot tartalmazó diszperziós egyenlethez jutottunk. A csak hosszirányú diszperziós tagot tartalmazó egyenletet átrendezve eljutottunk a hosszirányú diszperziós tényező meghatározására érvényes integrál összefüggéshez. Abból a célból, hogy bemutassuk hogyan használhatjuk ezeket az egyenleteket és kaphatunk terepi mérések alapján értékeket ezekre a jellemzőkre, a fejezet végén egy egyszer nyomjelzős vizsgálatra mutattunk be példát. A jelzőanyag vizsgálat segítségével a vízfolyás hozamát és a szennyezőanyagok terjedésére is érvényes hosszirányú diszperziós tényezőt számítottuk.

Irodalomjegyzék:

- Chapra, Steven C. (1997): Surface water quality modeling, the McGraw-Hill Companies, ISBN 0-07-011364-5
- Deng, Z., Q., Singh, V. P., és Bengtsson, L. (2001): "Longitudinal dispersion coefficient in straight rivers." *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, 127(11), 919-927
- Fischer, Hugo. B., List, E. John., Koh, Robert. C. Y., Imberger, Jörg. és Brooks, Norman. H. (1979): *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press, New York, NY., ISBN 0-12-258150-4.
- Haszpra Ottó (1989): *Hidraulika II/1. a vízépítő szakos építőmérnök hallgatók részére*, Budapesti Műszaki Egyetem, Építőmérnöki Kar, Tankönyvkiadó, Budapest.
- Lajos Tamás (2008): *Az áramlástan alapjai*, egyetemi tankönyv, 4. átdolgozott és bővített kiadás, Budapest.
- Kundu, Pijush R., Cohen, Ira M. (2002): *Fluid mechanics*, second edition, Academic press.
- Scott A. Socolofsky – Gerhard H. Jirka (2005): *Special Topics in Mixing and Transport Processes in the Environment*, Egyetemi Jegyzet, Texas A&M University.
- [Reynolds, Osborne](#) (1883): "An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels". *Philosophical Transactions of the Royal Society* **174**: 935–982. [doi:10.1098/rstl.1883.0029](https://doi.org/10.1098/rstl.1883.0029). [JSTOR](#).
- Somlyódy László (1985): Szennyezőanyagok terjedésének meghatározása vízfolyásokban, *Vízügyi Közlemények*, LXVII. évfolyam, 1985. évi. 2. füzet. p. 185-202.

4. Fluidumok áramlása

4.1. Fluidumok jellemzése

Az áramlástani műveleteket leíró összefüggések a hidrodinamikai alaptörvényekre vezethetők vissza. Ez indokolja a már ismert összefüggések átismétlését.

4.1.1. Viszkozitás

Viszkozitás: a fluidumnak az a tulajdonsága, hogy ellenállást tanúsít részecskék egymás közötti relatív elmozdulása során keletkezett erőhatásokkal szemben.

Közegek nyúlósságát, áramoltathatóságát kétféle viszkozitással jellemezhetjük:

$$\begin{array}{llll} \text{dinamikai viszkozitás:} & \eta & [\text{Pa}\cdot\text{s}] & \\ \text{kinematikai viszkozitás} & \nu & [\text{m}^2/\text{s}] & \eta/\rho = \nu \end{array}$$

A dinamikai viszkozitás azt fejezi ki, hogy az áramlást határoló falra a közeg belső súrlódása következtében a fallal párhuzamos érintő irányú erő hat. Ezt az erőt, vagyis az egymás felett elmozduló rétegek egyenletes mozgásához szükséges tangenciális erőt (F) a Newtoni viszkozitás törvény írja le:

$$F = -\eta A \frac{dv}{dx} \quad (1.1)$$

Ennek egységnyi felületre vonatkoztatott részét *csúsztatófeszültségnek* (τ) nevezzük.

A Newtoni folyadékok esetében lineáris összefüggés van a csúsztató feszültség (τ) és a sebesség gradiens (dv/dx) között, az egyenes meredeksége pedig a dinamikai viszkozitással (η) egyenlő. A Newtoni folyadékok mozgását tehát az alábbi összefüggéssel írhatjuk le:

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dx} \quad (1.2)$$

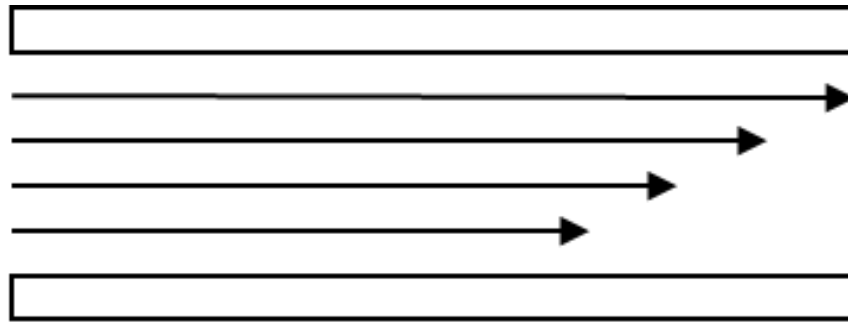
A dinamikai viszkozitás nyomás- és hőmérsékletfüggő anyagi állandó.

4.2. A folyadékok mozgása

Fluidumok áramlása – legyen akár gázokról vagy folyadékokról szó – igen gyakori a környezettechnikában. Az áramlás két jól elkülöníthető részre vagy formátumra osztható. Az egyik alapvető áramlási mód az, amikor a fluidum részecskéi egyetlen egy irányba mozdulnak el/áramlanak, és más irányú sebességvektor sincs jelen a rendszerben. Ezt a típusú áramlást lamináris, rétegelt, vagy más néven viszkózus áramlásnak nevezzük. A másik áramlási mód a turbulens, gomolygó, vagy más néven fajsúlyos áramlás az, amikor a fluidum részecskéi ugyan random mozgást végeznek, de a főtömeg áramlási iránya mégis megegyező.

Ezt a random mozgást ne tévesszük össze a molekulák diffúzió okozta random mozgásával.

A következő ábrán két eltérő sebességgel mozgó párhuzamos lap között, laminárisan áramló fluidum áramlási képét mutatjuk be. A két párhuzamos lap állandó, de egymástól különböző sebességgel mozog, a felső lap sebessége nagyobb, mint az alsó lapé.



42. ábra: Laminárisan áramló rétegek

Az 42. ábra is bemutatott, egyenes sebesség profil akkor érhető el, ha a rendszer állandósult állapotba kerül. Mindez az egymás felett párhuzamosan áramló fluidum valamint a lap és a vele érintkező fluidumréteg súrlódásának köszönhető. Más szóval, úgy tűnik, hogy a gyorsabban mozgó fluidum rétegek húzzák a határos, lassabban mozgó rétegeket és a latter tends ellenállni neki.

Így tehát az impulzus (mozgási energia) átadódik a gyorsabban mozgó rétegtől a lassabban mozgó rétegnek. Ezen sebesség gradiens fenntartásához egy bizonyos nagyságú erőre van szükség. Az áramló fluid rétegekkel párhuzamos egységnyi felületre vonatkoztatott erőt csúsztató feszültségnek (τ [Pa]) nevezzük. A csúsztató feszültség arányos a sebesség gradienssel (dv/dx [s^{-1}]). A sebesség gradienst nyíró sebességnek is nevezik.

Így tehát a fennálló függvénykapcsolat:

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dx} \quad (1.1)$$

A negatív előjel azt mutatja, hogy a mozgási energia sebesség gradiens csökkenés iránya adódik át. Az arányossági tényező, η – dinamikai viszkozitás [Pas], az áramlások intenzitás tényezője, hőmérséklet függő anyagi állandó.

Az előző összefüggést másik alakban felírva:

$$\tau = -\frac{\eta}{\rho} \frac{d(v\rho)}{dx} = -\nu \frac{d(v\rho)}{dx} \quad (1.2)$$

Láthatjuk, hogy a csúsztató feszültség a kinematikai viszkozitással (m^2s^{-1}) és a mozgási energia gradienssel arányos. Ezt nevezük a Newtoni viszkozitás törvényének.

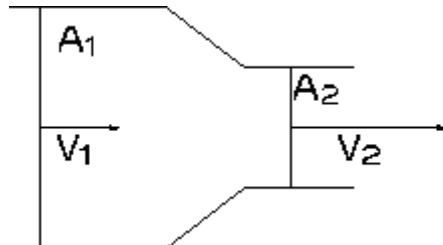
A sebesség gradiens értékétől független viszkozitású folyadékokat Newtoni folyadékoknak nevezük. Folyásgörbékük (43. ábra) tehát egy origóból kiinduló félegyenes.

Azokat a folyadékokat, melyek viszkozitása függ a sebesség gradienstől, nem-Newtoni folyadékoknak nevezük.

4.2.1. Folytonosság tétele

A folytonosság tétele az anyagmegmaradás törvényét fogalmazza meg az egyes műveletekre vonatkoztatva, vagyis a tétel kimondja, hogy zárt rendszer esetén a rendszer bármely pontján mért tömegáram állandó:

$$Q_{m1} = Q_{m2} = Q_{m3}$$



43. ábra: Változó keresztmetszetű csőben történő áramlás

A fenti összefüggést a sűrűség a sebesség és az áramlási keresztmetszet segítségével is felírhatjuk:

$$v_1 \cdot A_1 \cdot \rho_1 = v_2 \cdot A_2 \cdot \rho_2$$

összenyomhatatlan fluidumok esetében.: $\rho_1 = \rho_2$
tehát:

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \tag{1.3}$$

vagyis az áramlási sebesség és az áramlási keresztmetszet fordítottan arányos egymással.

4.2.2. Áramlások jellemzése

Az áramlások jellemzése a Reynolds szám segítségével történik:

$$Re = \frac{d \cdot v \cdot \rho}{\eta} \tag{1.4}$$

v = közeg sebessége [m/s]

d = az áramlási tér jellemző geometriai mérete [m]

η = dinamikai viszkozitás [Pas]

ρ = a közeg sűrűsége [kg/m³]

A Re szám nagyságától függően az alábbi áramlási tartományokat különböztetjük meg:

$2300 > Re$	lamináris
$2300 < Re < 10\,000$	átmeneti
$10000 < Re$	turbulens

4.2.3. Lamináris áramlás

A lamináris áramlás esetében a térfogatáram (q_v) értékét a Hagen-Poiseuille egyenlettel számíthatjuk ki:

$$q_v = \frac{\pi \Delta p}{8 \eta l} r^4 \quad (1.5)$$

ebből a nyomásesés értékét kifejezve:

$$\Delta p = \frac{32 \eta l v}{d^2} \quad (1.6)$$

4.2.4. Bernoulli egyenlet

A Bernoulli törvény kimondja, hogy egy áramló közegben az áramvonal mentén, a különböző energiaösszetevők összege állandó, vagyis az egyenlet az energia megmaradás törvényét fogalmazza meg. Zárt rendszerben az áramló fluidum összes energiataralma nem változhat meg:

$$h \cdot \rho \cdot g + p + \rho \frac{v^2}{2} = \text{konstans} \quad [\text{Pa}] \quad (1.7)$$

$$h + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2g} = \text{konstans} \quad [\text{m}] \quad (1.8)$$

v = közeg [sebessége](#) az áramvonal mentén [m/s]

g = [nehézségi gyorsulás](#) [m/s²]

h = [magasság](#) tetszőleges ponttól a [gravitáció](#) irányában [m]

p = [nyomás](#) az áramvonal mentén [Pa]

ρ = a közeg [sűrűsége](#) [kg/m³]

A fenti egyenlet természetesen, csak abban az esetben érvényes, ha:

- [Viszkózitás](#) (belső súrlódás) nélküli aközeg
- Állandósult az áramlás
- Összenyomhatatlan közeg; ρ = állandó

Az egyenletet ebben az alakjában először Leonhard Euler vezette le.

Ideális esetben nem tételezünk fel súrlódást. Ez a peremfeltétel a gyakorlati életben csak néhány esetben teljesül, például a tartályból történő kifolyás vagy mérőperem esetében.

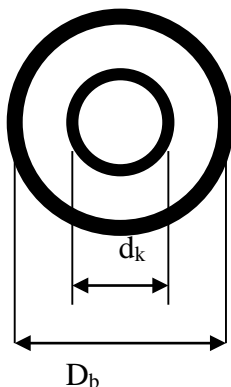
Reális folyadékoknál azt, hogy a fluidum részecskék áramlási sebessége különböző, végeredményben a csőfal és a fluidum közt fellépő külső súrlódás okozza. A súrlódó erő ellenében a fluidumnak munkát kell végeznie, ezért a Bernoulli egyenletet ki kell egészíteni a súrlódási veszteséget tartalmazó taggal:

$$h \cdot \rho \cdot g + p + \rho \frac{v^2}{2} + \Delta p_{\text{súrl}} = \text{konstans} \quad [\text{Pa}] \quad (1.9)$$

Ha az áramlás vízszintes, állandó keresztmetszetű csőben történik, természetesen nem változhat sem a szint, sem a sebességi energia, a súrlódás ellen végzett munkát tehát a fluidum nyomási energiájából kell fedezni (súrlódási nyomásesés).

Példa

1. Állapítsuk meg a cső a csőben típusú hőcserélő csövei közötti térben a folyadék áramlásának jellegét, ha a belső cső külső átmérője 25 mm, a falvastagság 2 mm, a külső cső külső átmérője 51 mm, a falvastagság 2,5 mm, $q_m=3730 \text{ kg/h}$, sűrűség: 1150 kg/m^3 , viszkozitás: $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Pas}$.



$$d_e = 4 \frac{D_b^2 \pi - d_k^2 \pi}{D_b \pi + d_k \pi} = 0,021 \text{ m}$$

$$v = \frac{q_m}{A \cdot \rho} = \frac{3730 \frac{\text{kg}}{\text{h}}}{3600 \left(\frac{D_b^2 \pi}{4} - \frac{d_k^2 \pi}{4} \right) 1150} = 0,77 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Re = \frac{d v \rho}{\eta} = \frac{0,021 \cdot 0,77 \cdot 1150}{1,2 \cdot 10^{-3}} = 15500$$

Tehát az áramlás turbulens.

2. Egy vízszintes csővezetékbe épített mérőperemhez csatlakozó kloroform töltésű manométer $\Delta H = 200 \text{ mm}$ szintkülönbséget mutat.

$\rho_{\text{CHCl}_3} = 1489 \text{ kg/m}^3$ Mennyi a nyomásesés Pa -ban, ha a vezetékben

a./ levegő

b./ víz áramlik ?

$$\rho_{\text{lev}} = 1,29 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{víz}} = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Megoldás:

$$\Delta p = \Delta H \cdot g (\rho_{\text{CHCl}_3} - \rho_{\text{lev}}) \neq \Delta H \cdot g \cdot \rho_{\text{CHCl}_3}$$

$$\Delta p = 0,2 \cdot 9,81 \cdot 1489 = 2921 \text{ Pa}$$

$$\Delta p = \Delta H \cdot g (\rho_{\text{CHCl}_3} - \rho_{\text{víz}})$$

$$\Delta p = 0,2 \cdot 9,81 (1489 - 1000) = 959 \text{ Pa}$$

3. Milyen magasan kell elhelyezni egy állandóan 1 m-es szintmagasságú nyitott víztartályt egy másik tartály fölött ahhoz, hogy a felső tartály aljára csatlakozó, a két tartályt összekötő függőleges, 2 cm átmérőjű horganyzott vas csővezetéken keresztül 2,2 m³/h 20 C^o-os víz folyjon be az alsó zárt tartályba, melyben az állandó túlnyomás 2,5·10⁴Pa?

$$p_{b\ o}=10^5\text{Pa} \quad \rho_{20}=1000\text{kg/m}^3 \quad \eta_{20}=10^{-3}\text{Pas}$$

Megoldás: Felírjuk a Bernoulli egyenletet az alsó és felső tartályra

$$p_{atm} + (H+1) \cdot \rho \cdot g = p_{alsó} + \frac{v^2 \rho}{2} + \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2 \rho}{2}$$

Az ismeretlen a H magasság, amely egyben a függőleges cső hossza is.

$$v = \frac{q_v}{A} = \frac{2,2\text{m}^3}{3,6 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} \cdot \pi \text{m}^2 \text{s}} = 1,94\text{m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 1,94 \cdot 10^3}{10^{-3}} = 3,88 \cdot 10^4$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = 8 \cdot 10^{-3} \quad \lambda = 0,0364$$

$$10^5 + (H+1) \cdot 10^3 \cdot 9,81 = 10^5 + 2,5 \cdot 10^4 + \frac{1,94^2 \cdot 10^3}{2} \left(1 + 0,0364 \frac{H}{2 \cdot 10^{-2}} \right)$$

$$H = 2,52\text{m}$$

2,52 m magasra kell helyezni a másik tartály fölé.

4. Egy 5m magasan elhelyezett nagy tároló tartályból 20 m magasan fekvő nyitott tartályba CCl₄-et kell felnyomatni 2,5 cm átmérőjű, a szerelvények ekvivalens csőhosszával együtt 68 m hosszú horganyzott vas csővezetéken keresztül. A felnyomatás levegővel történik. Milyen állandó levegőnyomás szükséges ahhoz, hogy a felső tartályba 15 perc alatt 1000 l CCl₄-et nyomassunk fel, ha a beömlésnél $\eta=0,90$?
Az alsó tárolótartály szintváltozása elhanyagolható.

$$\rho_{20}=1600 \text{ kg/m}^3 \quad \eta_{20}=10^{-3}\text{Pas}$$

Megoldás:

$$\rho \cdot g H_1 + p_1 + \frac{v_1 \cdot \rho}{2} = \rho \cdot g H_2 + p_2 + \frac{v_2 \cdot \rho}{2} + p_{surt}$$

$$\frac{v_1^2 \cdot \rho}{2} = 0 \quad \text{és} \quad p_2 = p_{atm}$$

$$\text{tehát: } p_1 = \rho \cdot g \cdot (H_2 - H_1) + p_{atm} + \frac{v_2^2 \cdot \rho}{2} \left(1 + f \frac{L}{D} \right)$$

$$v_2 = \frac{q_v}{A} = \frac{\frac{1}{900} \text{ m}^3 / \text{s} \cdot 4}{0,9 \cdot 2,5^2 \cdot 10^{-4} \cdot 3,14 \text{ m}^2} = 2,50 \text{ m/s}$$

$$\frac{2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5 \cdot 1600}{10^{-3}} = 1 \cdot 10^5 = \text{Re}$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = 6 \cdot 10^{-3} \quad f = 0,033 \quad p_{atm} \approx 10^5 \text{ Pa}$$

$$p_1 = 1600 \cdot 9,81 \cdot 1,5 + 1 \cdot 10^5 + \frac{2,5^2 \cdot 1600}{2} \left(1 + 0,033 \frac{68}{0,025} \right)$$

$$p_1 = (2,35 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^5 + 4,55 \cdot 10^5) \text{ Pa}$$

$$p_1 = 7,9 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

4.3. Venturi cső

Egy csőben folyó folyadék mennyiségének és sebességének mérésére szolgáló eszköz. Nevét Giovanni Battista Venturi (1746-1822) olasz fizikusról kapta. A cső egy torokká szűkül össze, majd újra tágul. A torokban és a torok előtt mérik a nyomást, és a nyomáskülönbségből meghatározható az átfolyási sebesség a Bernulli-törvény alapján. A Venturi-cső az állandó keresztmetszetű szívócsőbe helyezett konfúzor-diffúzor, vagyis szűkülő, majd bővülő keresztmetszetű csőszakasz.

Venturi-cső:

A Venturi-cső a szűkítőelemes térfogatárammérő eszközök közé tartozik.

A Venturi-cső egy meglehetősen hosszú cső, mely az alábbi ábrán látható, s melynek két fő része van.

Az egyik rész egy konfúzor, a másik pedig egy diffúzor.

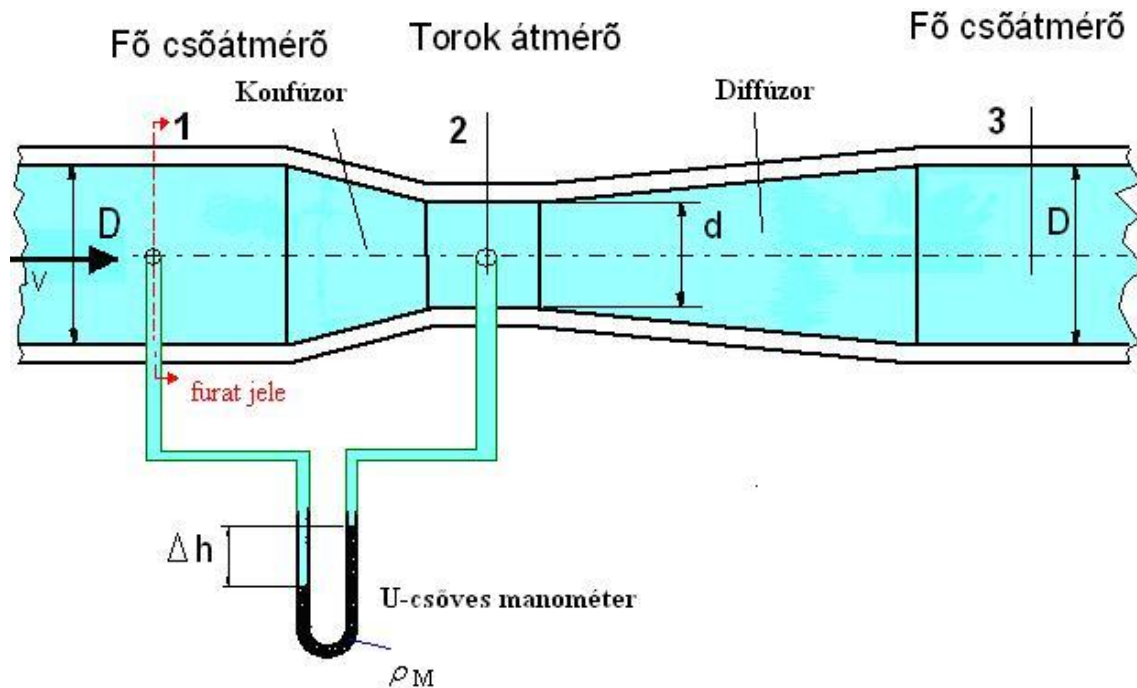
Az áramlás irányában bővülő csőtoldatokat nevezük diffúzoroknak, az áramlás irányában csökkenő keresztmetszetű csőtoldatokat pedig konfúzoroknak.

A diffúzorokban az áramlás irányában csökken a sebesség, s nő a nyomás.

A konfúzorokban ez a hatás fordított.

Általában a Venturi-csőveknél mindig az áramlás mondja meg, hogy melyik a diffúzor és melyik a konfúzor.

(A hosszú rész szokott a diffúzor lenni és a rövid a konfúzor.)



44. ábra: Ventúri cső

Az 44. ábralátható 1-es keresztmetszet a belépési keresztmetszet, a 2-es pedig a kilépési keresztmetszet.

Tudjuk, hogy a Venturi-csővek alkalmazásának egyik fontos tényezője az átmérő viszony (a mérő eszköz átmérő viszonya).

4.4. Pitot cső

A folyadéktranszport műveletek alapvetően fontos eleme az áramlási sebesség mérése. A fluidumok áramlási sebességét mérő műszerek rendkívül sokfélék, de túlnyomó többségük a nyomáskülönbség mérését használják fel a sebességérték meghatározásához.

A Pitot cső is valójában egy nyomásérzékelő műszer, ami fluidumok áramlási sebességének mérésére alkalmas. A gyakorlatban többnyire repülőgépek, helikopterek sebességének mérésére használják.

Henri Pitot (1695 – 1771) francia vízügyi mérnök, aki matematikusként indult pályáján. Munkája során szükségessé vált a folyókban és csatornában mérhető áramlási sebesség ismeretére, ez inspirálta 1732-ben a mérőszervezet kialakítását.

A Pitot cső alapeleme egy, az áramló közegbe szemből behelyezett, áramvonalas homlokfalú csőidom. Ennek belső furatában keletkezik az áramlás hatására a torlónyomás, vagy teljes nyomás, mivel a közeg nyugalomba kerül a cső belsejében, hiszen nincs kivezető csővég, ami az átáramlást biztosíthatná. A furat másik végén (többnyire az áramlás helyétől távolabbra elvezetve) egy nyomásváltozás mérésére alkalmas eszköz – U csöves manométer - található. Fontos, hogy a nyomásváltozás mértékét mindig a környezethez képest mérik, így az egész rendszer tartalmaz egy statikus nyomást érzékelő pontot is. A repülési gyakorlatban pl. ez egy apró furatot jelent vagy közvetlenül a Pitot-csővön, vagy valahol a repülőgép oldalán. Sok esetben a legcélszerűbb rögtön a Pitot-csővön megoldani, ekkor duplafalú csőként építik ki a berendezést.

Az áramlási térbe helyezett mérőfej tehát a statikus- és torlónyomás összegét érzékeli. A manométer a teljes nyomás és a referenciatér nyomása közötti különbséget mutatja:

$$p_0 = p + \frac{\rho v^2}{2} \quad (1.10)$$

Vagyis a manométer által jelzett nyomás a sebesség függvénye. A teljes nyomás tehát a statikus nyomás és a dinamikus nyomás összegéből alakul ki, ez Bernoulli egyenlettel kifejezve:

$$p_t = p_s + \frac{v^2 \rho}{2} \quad (1.11)$$

az összefüggésből az áramlási sebességet (v) kifejezve:

$$v = \sqrt{\frac{2(p_t - p_s)}{\rho_f}} \quad (1.12)$$

ahol p_t a teljes nyomás, p_s a statikus nyomás, ρ a fluidum sűrűsége.

Példa:

Egy vízszintes 10 cm átmérőjű csővezetékben áramló 20 °C –os levegő sebességét Pitot csővel mérjük. Mekkora a levegő sebessége, ha a mért nyomáskülönbség 196 Pa?

Megoldás: A Pitot cső tulajdonképpen egy U csöves manométer, melynek egyik vége az áramlással párhuzamosan, az áramlás irányával szembefordulva van bekötve és méri a torlónyomás és a statikus nyomás összegét. A másik vége az áramlás irányára merőlegesen csatlakozik a csőhöz és a statikus nyomást méri. Az U csövön leolvasható nyomáskülönbség közvetlenül a torlónyomást mutatja.

$$\frac{v^2 \cdot \rho}{2} = p_{\text{torlónyomás}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2,196 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3}{1,2 \text{ kg}}} = 17,9 \text{ m/s}$$

4.5. Nem-Newtoni folyadékok folyásgörbéi

Néhány folyadékknál a Newtoni viszkozitás törvényétől eltérő összefüggést tapasztalunk a csúsztató feszültség és a sebesség gradiens között. Ezek az anyagok a nem-Newtoni, azaz az anomális folyadékok csoportjába tartoznak.

Az Ostwald-féle hatványfüggvény segítségével tudjuk a legáltalánosabb alakban felírni a folyadékok mozgását, és ennek segítségével számos rheológiai modell kifejezhető:

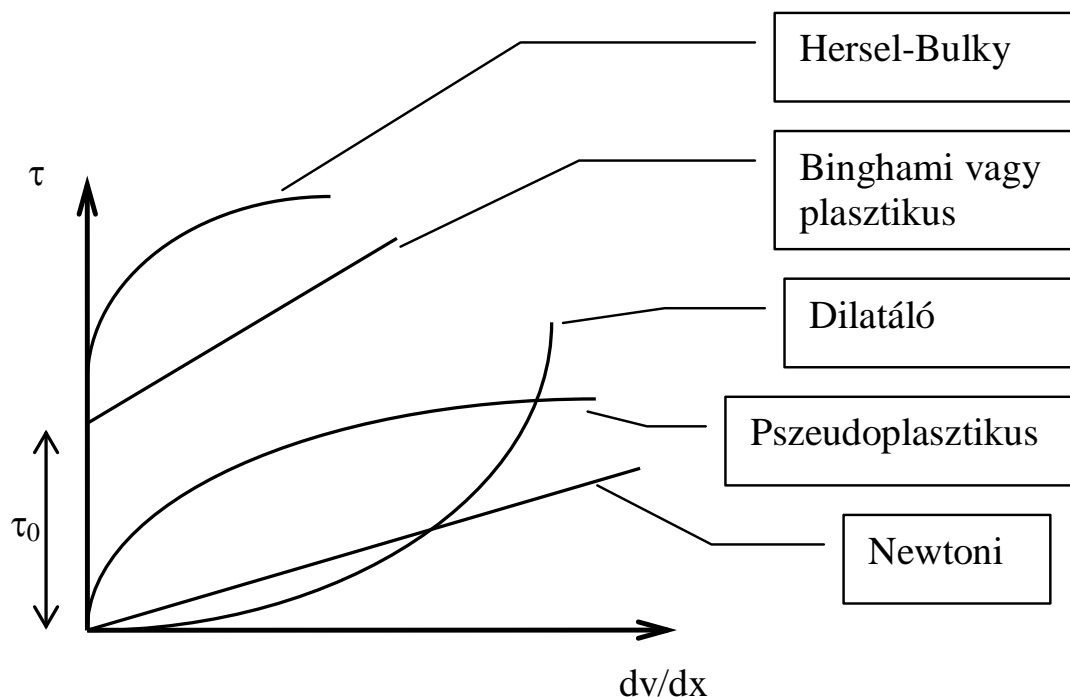
$$\tau = K \left(\frac{dv}{dx} \right)^n \quad (1.13)$$

ahol K a konzisztencia koefficiens, és n az áramlási viselkedést meghatározó, úgynevezett folyás index. A K konzisztencia tényező az anyag tulajdonságairól ad felvilágosítást, az n folyás index pedig a Newtoni folyadékoktól való eltérés mértékét mutatja meg.

Newtoni folyadékok esetében tehát n értéke egységnyi, 1, K – konzisztencia értéke pedig a dinamikai viszkozitással egyenlő. A konzisztencia koefficiens mértékegysége; $\text{Pa}\cdot\text{s}^n$, nem tévesztendő össze a látszólagos viszkozitással!

Ha n értéke kisebb, mint 1, a látszólagos viszkozitás csökken a sebesség gradiens növekedésével. Az ilyen folyadékokat pszeudo-plasztikus anomális folyadékoknak (nyírásra vékonyodó) nevezzük.

Amennyiben n értéke egynél nagyobb, akkor a fluidumot nyírásra vastagodónak, vagy dilatáló anomális folyadéknak nevezzük.



45. ábra: Leggyakoribb folyásgörbék

4.5.1. Binghami v. Plasztikus anomális folyadékok

A plasztikus anomális folyadékok nagyon elterjedtek. Közös jellemzőjük, hogy egy τ_0 kezdeti csúsztatófeszültség - áramoltató erő - kell az áramlás megindításához, ezt követően a Newtoni folyadékokkal analóg módon viselkednek.

Feltételezhető, hogy ezen erő hatására megbomlik az addig tartós folyadékszerkezet, nagyobb τ hatására Newtoni folyadékszerkezetet vesz fel.

$$\tau = \eta_p \frac{dv}{dx} + \tau_0 \quad (1.14)$$

η_p plasztikus viszkozitás

Jellemző plasztikus folyadékok: paszták, pépek, vörösáruk, zagyok, tortakrém, csokoládémassza, túró, margarin, sajt, fogkrém, folyékony szappan.

4.5.2. Pszeudoplasztikus anomális folyadékok

Már kis csúsztatófeszültség hatására áramlanak, folynak, de a csúsztató feszültség és a sebességgradiens aránya függ a dv/dx nagyságától, változik tehát ez az arány, és nem állandó, mint azt a Newtoni folyadékoknál tapasztalhattuk

Ez az arány az η_1 - látszólagos viszkozitás - a dv/dx növekedésével csökken, a folyásgörbe egyenesbe megy át.

Oswald-féle összefüggés:

$$\tau = k \left(\frac{dv}{dx} \right)^n \quad 0 < n < 1 \quad (1.15)$$

Pszeudo-plasztikus anomális folyadékok: paradicsompüré, majonéz, gyümölcsvelők, cukoroldat.

Nyugalmi helyzetben a részecskék kaotikus elrendezésűek, növekvő nyíróerők viszont e részecskék egyre nagyobb orientáltságát váltják ki a folyás irányába. A deformáció sebességének növelésekor a részecskék közötti kölcsönhatás is gyengül.

(Nagy sebességnél a hosszú láncok beállnak egyenes irányba, rendeződnek, párhuzamosan helyezkednek el, kisebb csúsztató feszültség elég az áramláshoz.)

4.5.3. Dilatáló anomális folyadékok

A dilatáló anomális folyadékoknál a pszeudoplasztikus folyadékoknál tapasztaltakkal ellentétben a sebességgradiens (dv/dx) növekedésével a látszólagos viszkozitás is nő:

$$\tau = k \left(\frac{dv}{dx} \right)^n \quad 1 < n \quad (1.16)$$

A dilatáló anomális folyadékok viszonylag ritkán fordulnak elő az élelmiszeripari gyakorlatban, főként a nagy mennyiségű szuszpendált részecskét tartalmazó szuszpenziók sorolhatók ide: nagy konc. szuszpenziók, keményítő szörp, gumiarábikum, kristályosított cukor az anyalúgban, kondenzált tej.

Viselkedésük feltételezett magyarázata az, hogy nagy sebességnél már kevés a folyadék, ami a szilárd részecskét befedi, nő a súrlódás, nő a látszólagos viszkozitás, nagyobb csúsztatófeszültség kell az áramoltatáshoz. Nagy nyírófeszültségnél a viszkozitás végtelen nagy lehet, ami az anyag töréséhez is vezethet.

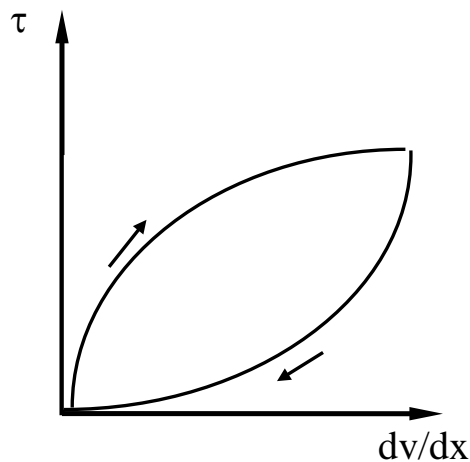
4.5.4. Instacioner v. Időtől függő anomális folyadékok

Az időtől függő anomális folyadékoknál az erőbehatás idejével arányosan változik a konzisztencia, áramoltathatóság. Két nagy csoportot különböztethetünk meg, a tixotrop és a rheopektikus anomális folyadékok csoportját.

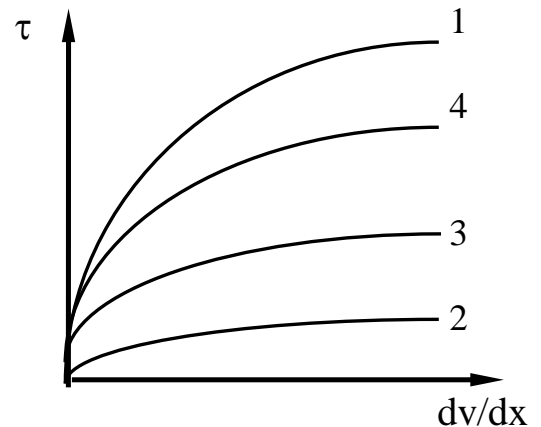
4.5.5. Időtől függő anomális folyadékok

A nem Newtoni folyadékok csoportját sorolhatjuk ide, melyeknél az idő változtatásával az áramoltathatóságuk is megváltozik.

Tixotróp anomális folyadékoknál a mechanikai igénybevétel hatására, az idő előrehaladtával a konzisztencia, a látszólagos viszkozitás csökken, a szerkezet felbomlik és a folyékonyság nő. Nyugalmi állapotban pedig visszaalakul az eredeti állapot.



Hiszterézis



Időbeli függés

46. ábra: A folyásgörbék időbeli függése és a hiszterézis jelensége a tixotróp folyadékoknál. Adott anyag egymás után felvett (1-4) folyásgörbéinek alakja eltérő.

Ugyanez az oka a hiszterézisnek is, vagyis a már szétroncsolt, nagy sebességgel áramoltatott anyagnál kisebb csúsztatófeszültség is elég az áramlás fenntartásához.

Jellemző előfordulás: aludttej, kefir, vaj, zselék, ketchup, festékek, szol-gél rendszerek, tört kakaó.

Rheopektikus anomális folyadékoknál a hiszterézis jelensége szintén tapasztalható, csak ellentétes irányba, vagyis az áramlás előrehaladtával az áramoltathatóság csökken. Lsd. pl. habok.

4.5.6. Szilárd testhez hasonló, Maxwelli, viszkoelasztikus anomális folyadékok

Rugalmas és viszkózus tulajdonságokkal egyaránt rendelkező szerkezetek: tészták, desszert masszák.

Ennél a csoportnál a reológiai törvényszerűségek nem írhatók le egyszerűen a nyírófeszültség és a sebesség gradiens közötti összefüggésként, hanem ezek idő szerinti deriváltjait is figyelembe kell venni. Jellemző közös tulajdonságuk a Wiesenberg effektus: viszkoelasztikus anyagok részlegesen merített forgó tengelyen felfelé kúsznak.

4.6. Anomális folyadékok áramoltatása

A különböző gépekben (sajtológák, keverők, granulálók, csővezetékek) végbemenő folyamatok műszaki számítása a sebesség, a nyomás, az anyag rheológiai tulajdonságai valamint a berendezés geometriai méretei közötti összefüggések ismeretén alapulnak. Mivel az anomális folyadékok áramoltathatósága típusuktól függően eltér a Newtoni folyadékokétól, ezért a reális folyadékoknál megismert összefüggések is módosításra szorulnak.

Főbb megkötések: összenyomhatatlan, időtől független anomális közegeknek tekintjük őket, a falnál zérus áramlási sebességet feltételezünk, csak lamináris áramlást vizsgálunk.

4.6.1. Binghami v. plasztikus anomális folyadékok:

A Newtoni folyadékok számolóképletével megegyező módon számítható a Binghami folyadékok szállítása, de a τ_0 miatt egy új dimenzió nélküli kifejezést, a Hedström számot is figyelembe kell venni:

$$He = \frac{\tau_0 d^2 \rho}{\eta_p^2} \quad (1.17)$$

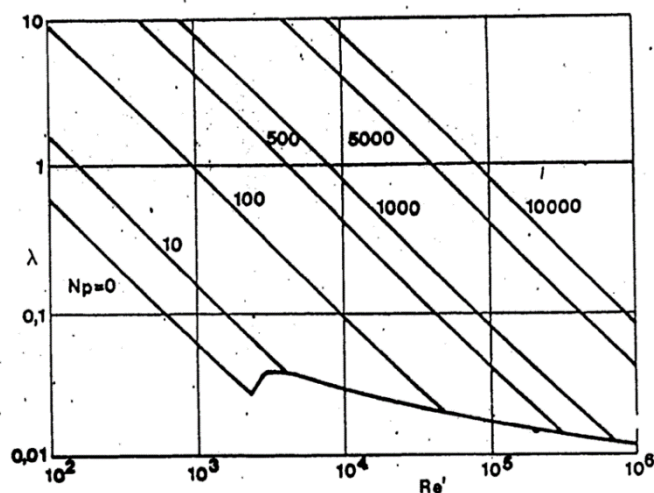
A binghami testek áramlására tehát a Re és a He szám közösen jellemző. Ez a közös jellemző dimenzió nélküli kifejezés, a Plaszticitási szám N_p .

$$N_p = \frac{He}{Re} = \frac{\tau_0 d^2 \rho}{\eta_p^2} \frac{\eta_p}{d v \rho} = \frac{\tau_0 d}{\eta_p v} \quad (1.19)$$

A súrlódási nyomásesés plasztikus anomális folyadékok esetében is az ismert összefüggéssel számolható:

$$\Delta p_s = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2 \rho}{2} \quad (1.32)$$

ám λ értékét egy, a N_p számot is figyelembe vevő nomogramról kell meghatározni.



47. ábra: Plasztikus folyadékok súrlódási tényezője

4.6.2. Pszeudoplasztikus és dilatáló anomális folyadékok:

Mivel a struktúrviszkózus anomális folyadékokra jellemző, hogy: k és n közösen jellemzik a folyékonyságot, csak lamináris áramlás képzelhető el, ezért:

$$\Delta p = \frac{64}{\text{Re}} \frac{l}{d} \frac{v^2 \rho}{2} \quad (1.20)$$

$$\text{Re}_m = \frac{d^n v^{2-n} \rho}{\frac{k}{8} \left(\frac{6n+2}{n} \right)^n} \quad (1.21)$$

4.6.3. Instacioner anomális folyadékok

Ebben az esetben a számolás megegyezik a struktúrviszkózus folyadékoknál tárgyaltakkal. Megjegyzendő, hogy a szivattyúnál sokkal nagyobb a kezdeti energia-felvétel, ezért nagy indítási teljesítmény kell.

Példa:

1. Egy gyümölcsvelőt továbbító szivattyúnál 15%-kal megnöveltük a szállítási teljesítményt (térfogatáramot). Hány %-kal változik meg a csővezeték ellenállása, ill. a szivattyú teljesítmény felvétele?

$$n = 0,4$$

$$k = 8,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{s}^{0,4-2}$$

$$q_v = v \cdot A$$

$$\Delta p = \frac{64}{\text{Re}} \frac{l}{d} \frac{v^2 \rho}{2}$$

$$\Delta p = \frac{64}{\frac{d^n v^{2-n} \rho}{\frac{k}{8} \left(\frac{6n+2}{n} \right)^n}} \frac{l}{d} \frac{v^2 \rho}{2}$$

$$\Delta p \sim v^{-(2-n)} v^2 = v^n$$

$$\text{A teljesítmény: } P = \Delta p \cdot q_v$$

$$P \sim v \cdot v^n = v^{1+n}$$

Az eredeti sebesség: v_1

A megváltozott sebesség: v_2

$$v_2 = 1,15 v_1$$

nyomásesés %-os változása:

$$(\Delta p_2 / \Delta p_1) \cdot 100 = (v_2^n / v_1^n) \cdot 100 = (1,15 v_1) / v_1^n \cdot 100 = 1,15^{0,4} \cdot 100 = 105,7$$

Tehát 15 % térfogatáram növelés 5,7 % nyomásesést eredményez, így

$$P_1 / P_2 \cdot 100 = (1,15 v_1)^{1+n} / v_1^{1+n} \cdot 100 = 1,15^{1,4} \cdot 100 = 121,6 \%$$

Tehát a térfogatáram emelés 21,6 % teljesítményigény növekedést eredményezett.

2. Pseudo-plasztikusan áramló anyagot kell a töltőgép tartályába szivattyúzni 3,6 m³/h térfogatárammal. A csővezeték belső átmérője 60 mm, hossza: 30 m.

A jellemző értékek: kezdeti csúsztató feszültség: 265 kg/ms^2
sűrűség: 1690 kg/m^3
plasztikus viszkozitás: $0,278 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$
Állapítsuk meg a közeg nyomásesését.

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2 \rho}{2}$$

$$Np = \frac{He}{Re} = \frac{\frac{\tau_0 l^2 \rho}{\eta_p^2}}{\frac{lv\rho}{\eta}} = \frac{\tau_0 l}{\eta_p} = 163$$

$$Re = \frac{dv\rho}{\eta} = \frac{0,06 \cdot 0,35 \cdot 1690}{0,278} = 127,6$$

$$v = \frac{q_v}{A} = \frac{\frac{3,6}{0,06^2 \pi}}{4} = 0,35 \text{ m/s}$$

Nomogramról leolvassa: $\lambda = 9,8$

$$\Delta p = 9,8 \frac{30}{0,06} \frac{0,35^2 \cdot 1690}{2} = 5,07 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

3. Egy 6 m szintmagasságú tartályból a 80 m távolságra fekvő töltőgéphez kell gyümölcsvelőt szivattyúzni.
Tömégáram: 4000 kg/h , $d_b = 30 \text{ mm}$, $k = 8 \text{ kg/m}\cdot\text{s}^{0,454}$, sűrűség: 1100 kg/m^3
Mekkora a súrlódási nyomásesés?

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2 \rho}{2}$$

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

$$v = \frac{q_m}{A\rho} = \frac{\frac{4000}{3600}}{\frac{0,03^2 \pi}{4} \rho} = 0,86 \text{ m/s}$$

$$Re_m = \frac{d^n v^{2-n} \rho}{\frac{k}{8} \left(\frac{6n+2}{n} \right)^n} = 61,22$$

$$\Delta p = \frac{64}{61,22} \frac{80}{0,03} \frac{0,86^2 \cdot 1100}{2} = 1,134 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Kérdések:

1. A Newtoni folyadékok esetében _____ összefüggés van a csúsztató feszültség (τ) és a sebesség gradiens (dv/dx) között, az egyenes meredeksége pedig a _____ egyenlő. (lineáris, dinamikai viszkozitás)
2. Mi a dinamikai viszkozitás SI mértékegysége?
 - a) Pas
 - b) Poise
 - c) m^2s^{-1}
 - d) kgm^3 (a)
2. Mit fogalmaz meg a Bernoulli törvény?
 - a) anyagmegmaradás törvénye
 - b) tömegmegmaradás törvénye
 - c) energia megmaradás törvénye (c)
5. Egy 3 cm belső átmérőjű csövön keszétül töltünk meg egy 1.5 m átmérőjű és 3 m magas tartályt. A folyadék sűrűsége 1040 kg/m^3 , a viszkozitása $1600 \times 10^{-6} \text{ Pas}$. (A) mennyi idő szükséges a tank feltöltéséhez ha lamináris az áramlás a csőben? (B) ha turbulensen áramlik a csőben a folyadék? A -19,29 h, B – 11,16 h
6. 30 °C-os vizet szivattyúzunk egy 30 m hosszú, 2.5 cm átmérőjű acél csövön 2 kg/s tömegárammal. Számolja ki a súrlódás következtében kialakult nyomásesést a csőben.
240,08 kPa
8. Egy nem Newtoni folyadék folyik egy 10 m hosszú csőben. A cső belépő átmérője 3.5 cm. A mért nyomásesés 100 kPa. Az állandósági együttható 5.2 és a folyási index 0.45. Számoljuk ki és ábrázoljuk a sebesség profilt, a térfogatáramot, átlagos sebességet, a Reynolds számot és a súrlódási faktort.

5. Súrlódó közegek

5.1. Lamináris és turbulens áramlások

Ahogy azt az előző fejezetben említettük, két alapvetően különböző áramlási típust tudunk megkülönböztetni, a lamináris és a turbulens áramlást. A két típust a Reynolds, dimenzió mentes szám alapján tudjuk megkülönböztetni egymástól. Kör keresztmetszetű egyenes csővezetékben történő áramlás esetén Reynolds számot (Re) az alábbi összefüggéssel határozhatjuk meg:

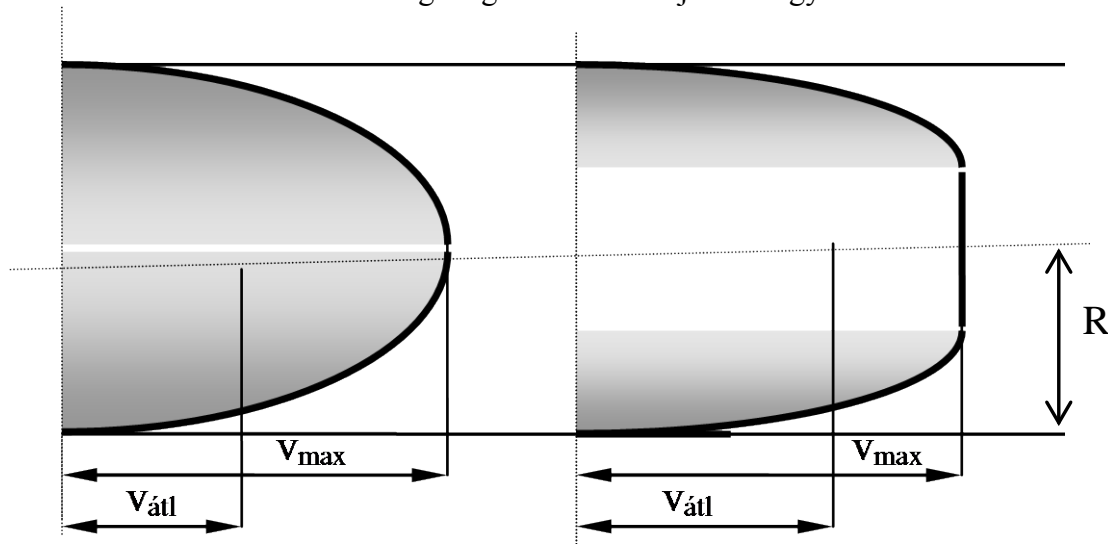
$$Re = \frac{d \cdot v \cdot \rho}{\eta} \quad (2.1)$$

Ahol d a csővezeték belső átmérője, [m], v a keresztmetszetre vonatkoztatott átlagos áramlási sebesség, [m/s], ρ a fluidum sűrűsége, [kgm^{-3}], η a fluidum viszkozitása [Pas].

Állandósult állapotban, amennyiben Re értéke kisebb, mint 2300, lamináris áramlásról beszélünk.

3000 (10000) Re értékek felett turbulens áramlást tapasztalunk a csővezetékben, a két érték közötti tartományban pedig az átmeneti tartományról beszélhetünk. Ebben az értékintervallumban sima falú csövek esetében az áramlás laminárisnak tapasztalható, azonban a legkisebb zavaró tényező hatására turbulenssé válik. Ezek a határértékek a nem kör keresztmetszetű vezeték esetében is helytállóak, amennyiben d helyére az egyenértékű csőátmérőt helyettesítjük be.

A **48. ábra** egy állandósult állapotú, azonos hőmérsékletű, nem-összenyomható, laminárisan áramló Newtoni fluidum sebesség megoszlását mutatjuk be egy kör keresztmetszetű csőben.



48. ábra: Lamináris és turbulens sebesség profil

Lamináris áramlás esetén az áramló rétegek sebességprofilja jól leírható a Hagen-Poiseuille egyenlettel:

$$q_v = \frac{\pi \Delta p}{8 l \eta} r^4 \quad (2.2)$$

Behelyettesítve a csőben áramló folyadék térfogatáramát,

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{r^2 \pi \cdot dl}{d\tau} = v \cdot r^2 \pi = \frac{\pi \Delta p}{8 l \eta} r^4 \quad (2.3)$$

levezethető, hogy

$$v = v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (2.4)$$

vagyis az áramlási profil a cső sugarának irányában parabola.

Ahol v a faltól r távolságra lévő folyadékréteg sebessége.

Az ábráról leolvasható, hogy az átlagos, teljes keresztmetszetre vonatkoztatott sebesség a maximális sebesség felével egyenlő.

5.2. Határrétegek jellemzői

A transzportfolyamatok intenzitását a leglassabban lejátszódó folyamatrészt, a legnagyobb ellenállás határozza meg elsősorban.

A legnagyobb ellenállás az esetek túlnyomó többségében egybeesik a fázishatárok találkozásával, a fázishatárok átlépésével. Ezen belül is a szilárd fázis, annak határa mentén kialakuló réteg (határréteg) jelenti a legnagyobb gátat, ellenállást.

Ha végiggondolunk néhány műveletet, belátjuk állításunk helyességét. Pl.: csővezetékben történő áramlás, szárítás, hőátadás, gőzkondenzáció.

Ezért érthető, hogy a szakirodalmak túlnyomó többsége külön fejezetet szentel a határréteg elméletnek. Ez a határrétegek kialakulásával, jellemzésével, és ami a legfontosabb, lehetséges megváltoztatásával foglalkozik.

Az egyik leggyakoribb határréteg a szilárd felületek mentén kialakuló folyadékréteg, a folyadékfilm: bepárlókban, hőcserélőkben, filmbepárlókban kialakuló (kondenz)film réteg.

A sebességprofil algebrai leírására számos próbálkozás történt turbulens áramlás esetén is. Ezek közül az egyik legismertebb NIKURADZE (1932) közelítő képlete:

$$\frac{v}{v_{\max}} = \left(\frac{y}{r} \right)^{\frac{1}{n}} \quad n = 6 - 10 \quad (2.5)$$

Ahol r a csővezeték sugara és y vizsgált réteg faltól mért távolsága.

Ez az összefüggés a csőfal közelében és a cső középvonalában nem ad a kísérleti értékekkel egyező eredményt.

PRANDTL feltételezte, hogy a csőfal közelében az áramlás lamináris, amit mérések is igazoltak. A fal mellett tehát a sebességprofil parabolikus, majd a faltól távolodva elfogadta Nikuradze közelítését.

A filmelmélet a bonyolult turbulens sebességprofil helyettesíti, vele hatásában megegyező mechanizmusú áramlással számol: a fal mellett tiszta lamináris áramlás van, amit pontosan tudunk számolni és feltételezzük, hogy a lamináris filmtől a cső közepéig nincs sebesség gradiens, itt végtelen nagy a turbulencia. Ez a δ film egyenértékű filmvastagság definíciója. A filmvastagság közelítő számítására az alábbi összefüggés használható:

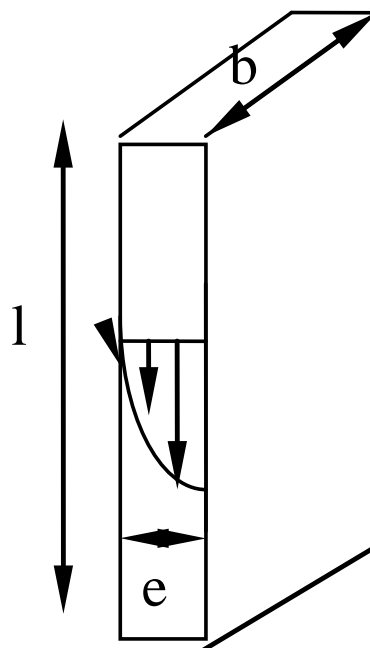
$$\frac{\delta_{film}}{d} = \frac{8}{\lambda Re} \quad (2.6)$$

A Re-szám növelésével, a sebesség növelésével, a relatív filmvastagság csökken, vagyis a turbulencia növelése csökkenti a hő- vagy anyagátadással szembeni nagy ellenállást jelentő határreteg/film vastagságát.

5.2.1. Folyadékfilmek jellemzése.

A síklapok menti áramlások speciális formája, amikor egy vékony folyadékfilm csorog le egy vertikális falon. Pl. kondenzátorokban, duplikátorokban, abszorberekben.

Ez esetben az áramló folyadékfilmnek nincs kezdeti v sebessége, a jelenség úgy képzelendő el, hogy egy e vastag folyadékréteg súlya a mozgást létrehozó hajtóerő, és ez egyensúlyban van a szomszédos réteg okozta súrlódó erővel. A levegővel érintkező határfelületen súrlódást nem tételezünk fel.



49. ábra: Síkfal mentén áramló folyadékfilm

A folyadék film jellemző hosszúság dimenzióval kifejezett értéke:

$$Re = \frac{d_e v \rho}{\eta} = 4 \frac{ebv\rho}{b\eta} = 4 \frac{\Gamma}{\eta} \quad (2.7)$$

$$\Gamma = ev\rho = \left[m \frac{m}{s} \frac{kg}{m^3} = \frac{kg}{sm} \right]$$

ahol l a film hossza, b a szélessége, e a vastagsága. Γ az **öntözési szám** (öntözés lineáris tömegsűrűsége, a folyadéknak a filmmel érintkező felület egységnyi hosszán áthaladó tömege)

Mivel az áramló filmnek nincs kezdeti sebessége, így az áramlása során a gravitációs erő egyensúlyt tart a súrlódási erővel:

$$F_{\text{grav}} = F_{\text{súrl}}$$

$$mg = \eta A \frac{dv}{dx}$$

$$(e - y)bl\rho g = \eta bl \frac{dv_y}{dy}$$

y a film egy rétegének a távolsága a faltól

Integrálva és rendezve:

$$\int_0^{v_y} dv_y = \frac{\rho g y}{\eta} \int_0^y (e - y) dz$$

$$v_y = \frac{\rho g}{\eta} \left(ey - \frac{y^2}{2} \right)$$

A sebesség $y=e$ helyen maximális, ezt behelyettesítve:

$$v_{\text{max}} = \frac{\rho g e^2}{2\eta}$$

Az átlagos sebességet a következőképpen számíthatjuk:

$$v = v_{\text{át}} = \frac{q_v}{A} = \frac{q_v}{eb} = \int_0^e \frac{v_y b}{eb} dy = \int_0^e \frac{\rho g}{e\eta} \left(ey - \frac{y^2}{2} \right) dy = \frac{\rho g}{e\eta} \left(\frac{e^3}{2} - \frac{e^3}{6} \right)$$

$$v = \frac{\rho g e^2}{3\eta} = \frac{2}{3} v_{\text{max}}$$

A térfogatáram:
$$q_v = v \cdot A = \frac{\rho g e^3 b}{3\eta}$$

Ebből a tömegáram:
$$q_m = q_v \cdot \rho = \frac{\rho^2 g e^3 b}{3\eta} \quad (2.8)$$

Mivel az öntözési szám definíció szerint a felület egységnyi hosszán áthaladó tömegáram, az öntözési szám:

$$\Gamma = \frac{q_m}{b} = \frac{\rho^2 g e^3}{3\eta}, \quad (2.9)$$

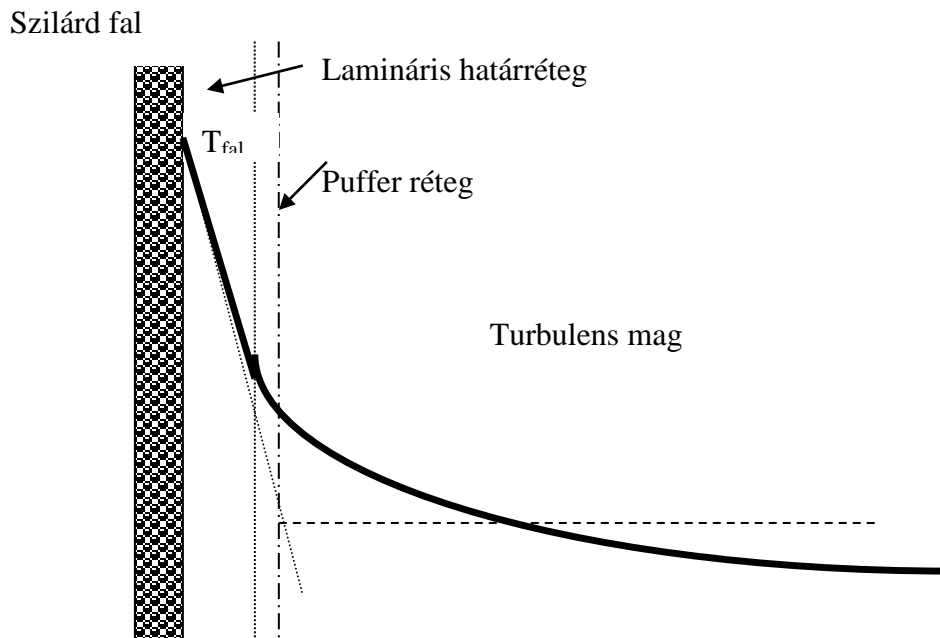
a film áramlására jellemző Re szám pedig:

$$\text{Re} = \frac{d_e v \rho}{\eta} = 4 \frac{\Gamma}{\eta} = 4 \frac{e v \rho}{\eta} = \frac{4 \rho^2 g e^3}{3\eta^2}. \quad (2.10)$$

5.3. Impulzus- hő és anyagátadás a határrétegben

Az impulzus-, hő- és anyagtranszport turbulensen áramló közegek esetében egy megnövekedett aktivitási értéket mutat, ami a közeg részecskéinek mozgásával magyarázható. A nyugvó vagy laminárisan áramló rétegben lejátszódó transzportfolyamatok lényegesen lassabbak, mint a turbulens közegben zajlók – hővezetéssel, ill. molekuláris diffúzióval kell számolnunk. A turbulensen áramló közeg, csőfalak, berendezésfalak mentén található határrétegeiben is hasonlóan limitált a transzportfolyamat sebessége, akár hő- akár komponens transzportot vizsgálunk. Az **50. ábra** egy hőmérsékleti profil elosztást mutatunk be, egy szilárd fal mentén, turbulensen áramló közeg esetében.

A határrétegben a hőmérséklet gradiens lineáris és meredek, mivel itt a hőátadás kizárólag hővezetéssel történik, és a fluidum hővezetési tényezője sokkal kisebb, mint a határos fém fal hővezetési tényezője. A turbulensen áramló főtömegben a hőmérséklet gradiens sokkal kisebb, a hőátadás fő formája a hőáramlás, vagyis a hőtranszportot a fluidum elemeinek makroszkópikus mozgása segíti. A gradiens értéke csökken a faltól való távolság növekedésével, hiszen a turbulencia foka növekszik. A hőmérséklet gradiens az ún. puffer rétegben, ahol már nem lamináris az áramlás, de még nem kiterjedt a turbulencia, sokkal kisebb, mint a határrétegben, viszont nagyobb, mint a közeg főáramában, a turbulens tengelyben. A hővezetési és áramlási transzportja összehasonlítható mértékű ebben a puffer/átmeneti rétegben. Fontos kihangsúlyozni viszont, hogy nincs éles elkülönülés, elhatárolódás a laminárisan áramló határréteg és a puffer réteg között, sem a puffer réteg és a turbulens fő tömeg között.



50. ábra: Hőmérséklet gradiens turbulensen áramló közeg esetében

A fent leírtak érvényesek a szilárd – fluidum anyagátadási folyamatokra is. A szilárd anyag felől a fluidum irányába mutató koncentráció gradiens turbulens áramlás esetében analógiát mutat a hőmérséklet gradiens alakulásával, ahogy azt az **50. ábra** bemutattuk.

Amikor az örvényáramlás esetén hő-, impulzus vagy anyagtranszportot jellemző arányszám kiszámítására van szükség, akkor az örvényáramlású, azaz módosított hővezetés, - diffúziós, - viszkozitás figyelembe vétele tűnik célravezetőnek.

Vagyis a hővezetés,

$$\varphi = -\lambda \frac{dt}{dx} \quad (2.11)$$

molekulás diffúzió

$$N_A = -D_{AB} \frac{dc_A}{dx} \quad (2.12)$$

és molekuláris viszkozitás

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dx} \quad (2.13)$$

alaptörvényének kiterjesztése látszik célszerűnek.

Az összefüggéseknél,

ρ - sűrűség [kg/m³]

η - dinamikai viszkozitás [Pas]

λ - hővezetési tényező [Wm⁻¹K⁻¹]

φ - hőáram sűrűség [Wm⁻²]

τ - csúsztató feszültség [Pa]

D_{AB} – A anyag diffúziós állandója B anyagban [m²/s]

dc_A – A anyag koncentráció különbsége dx távolságban

dt – hőmérséklet különbség dx távolságban

dv – sebesség különbség dx távolságban

A célszerű módosítások tehát, hőátadás esetében:

$$\varphi = -(a + E_H) \frac{d(c_p \rho t)}{dx} \quad (2.14)$$

anyagátadás esetében:

$$N_A = -(D_{AB} + E_D) \frac{dc_A}{dx} \quad (2.14)$$

impulzus transzport esetében:

$$\tau = -(\nu + E_v) \frac{d(v \cdot \rho)}{dx} \quad (2.16)$$

ezekben az egyenletekben

E_H , E_D , E_v az örvény hődiffúzió, az örvény diffúzió, az örvény kinetikai viszkozitás, és valamennyi mértékegysége: m²s⁻¹.

Fontos kiemelni, hogy ezek a tényezők nem anyagi állandók, értékük leginkább a turbulencia mértékétől függ, amit pedig az áramlási sebesség szab meg elsősorban, valamint a csőátmérő, sűrűség és a viszkozitás.

5.4. Határréteg- együttható hő- és anyagátadás esetében

Amennyiben a határrétegben ébredő hőmérséklet gradiens ismert, és a hővezetési tényező is meghatározott érték, akkor a hőtranszport sebessége kiszámítható lenne. Ám ez rendszerint kiszámíthatatlan, hiszen a határréteg vastagsága és a benne kialakuló hőmérséklet elosztás sem ismert. Ennek megmérése lehetetlen mert ez az érték változik a turbulenciával és más meghatározó faktorok változásával.

Ezért a mérnöki gyakorlatban a film vagy egyedi hőátadási együtthatót (α) alkalmazzák. Ez az érték a határréteg hőátzármaztató képességére jellemző.

$$\varphi = \alpha(t_{fal} - t_{főötöme}) \quad (2.17)$$

φ - hőáram sűrűség [Wm^{-2}]

α - hőátadási tényező [$Wm^{-2}K^{-1}$]

t_{fal} – érintkezési felületnél mért hőmérséklet [K]

$t_{főötöme}$ - a fluidum főötömegében mért hőmérséklet [K]

A fluidum hőmérséklete, ami a 2.3 ábrán szaggatott vonal jelez, az a hőmérséklet, amit a főáram képvisel, ill. az egész fluidum képviselne, amennyiben dugóáramlás lépne fel, azaz nem alakulna ki a határréteg.

A hőátadási határréteg elképzelés csupán egy elméleti megközelítést takar, és jelentősen vastagabb, mint a lamináris határréteg.

A 2.14 és 2.11 képletekből következik, hogy:

$$\alpha = \frac{\lambda}{dx} \quad (2.18)$$

tehát α értéke hűtésénél vagy melegítésnél növekszik a hővezetési tényező értékének növekedésével. A hőátadási tényező növekszik a határréteg csökkenésével, vagyis az áramlási sebesség növekedésével. A hőátadási együttható értéken meghatározását a 10. fejezetben részletezzük.

Az anyagtranszporthoz tartozó határrétegi anyagátadási együtthatót a hőátadási tényezőhöz hasonló módon definiálhatjuk. A hajtóerő kifejezésére néhány különböző fogalmat, különböző mértékegységet alkalmaznak, pl. a molaritást, vagy a móltörtet, de a legáltalánosabban a folyadék oldali anyagátadás vizsgálatánál a koncentráció különbséget kg vagy $kmol m^{-3}$ egységben adják meg, így a folyadék oldali anyagátadási együttható (β_L) mértékegysége: mh^{-1} . A gáz/gőz oldali transzport folyamatot a parciális nyomáskülönbséggel célszerű nyomon követni, így a koncentráció különbség mértékegysége Pa/ bar , tehát a gáz oldali anyagátadási együttható (β_G) mértékegysége: $kmol h^{-1}m^{-2}bar^{-1}$.

Mindezek alapján az anyagátadási együttható:

$$\beta = \frac{D}{dx} \quad (2.19)$$

meghatározható.

Példa:

Egy légfűtő berendezéssel a levegőt 20°C-ról 80°C-ra fűtjük fel. A levegő oldali hőátadási együttható 44,2 Wm⁻²K⁻¹. Becsüljük meg a levegő oldali hőtani határréteg vastagságát! A levegő hővezetési tényezője 50°C-on: 0,048 Wm⁻¹K⁻¹.

$$\alpha = \frac{\lambda}{dx}$$

$$dx = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{0,0481}{44,2} = 0,00109 \text{ m} = 0,109 \text{ cm} = 1,09 \text{ mm}$$

Mutassa meg az összefüggést a gáz oldali anyagátadási együtthatók β_{Gp} β_{Gc} között!

Az ideális gázok törvényét alkalmazva meghatározhatjuk a diffundáló A gáz parciális nyomását a gázfázisban:

$$p_A = \frac{RT}{V} = 0,0821 c_A$$

c_A a gázfázisban mért moláris koncentrációja az A anyagnak [kmol m⁻³]

$$\begin{aligned} 1\beta_{Gp} &= 1 \text{ kmolm}^{-2}\text{h}^{-1}\text{bar}^{-1} \\ &= 1 \text{ kmol m}^{-2}\text{h}^{-1}(0,0821 \text{ K kmol m}^{-3})^{-1} \\ &= 12,18 \text{ m h}^{-1}\text{K}^{-1} \\ &= 12,18 \beta_{Gc} \text{ K}^{-1} \end{aligned}$$

vagy

$$1\beta_{Gc} = 0,0821 \text{ K } \beta_{Gp} \text{ mivel } 1\beta_{Gc} = RT\beta_{Gp}$$

Kérdések:

- Mely fizikai paraméter nem határozza meg a Reynolds számot?
 - viszkozitás
 - sűrűség
 - átmérő
 - sebesség
 - nyomás
- A transzportfolyamatok intenzitását a lejátszódó folyamatrészt, a legnagyobbhatározza meg elsősorban. (leghaladtabbanellenállás)
- A Re-szám növelésével, a sebesség növelésével, a relatív filmvastagság,..... vagyis a turbulencia növelése..... a hő- vagy anyagátadással szembeni nagy ellenállást jelentő határréteg/film vastagságát. (csökken, csökkenti)
- Hogy nevezzük a határréteg és a fluidum fő tömege közötti réteget? (puffer réteg)
- A hő- vagy az impulzus átadási határréteg a vastagabb? (hő)
- Egy légfűtő berendezéssel a levegőt 20°C-ról 80°C-ra fűtjük fel. A levegő oldali hőátadási együttható 44,2 Wm⁻²K⁻¹. Becsüljük meg a levegő oldali hőtani határréteg vastagságát! A levegő hővezetési tényezője 50°C-on: 0,048 Wm⁻¹K⁻¹.
- Definiálja az öntözési számot. (felület egységnyi hosszán áthaladó tömegáram)

6. Súrlódási veszteségek

Súrlódásmentes közegek csak a nehézségi erő, a felhajtó erő és a nyomás hely szerinti változása következtében keletkező erő következtében gyorsulnak. Valóságos, súrlódásos közeg esetén ezekhez járul a súrlódásból származó, a folyadékfelszín felületén ható, a felülettel párhuzamos csúsztatófeszültségből és az arra merőleges, nyomásnövekedésből származó erő. Ezek a feszültségek a folyadék deformáció-sebességével arányosak. Ha az áramló közeg dinamikai viszkozitása és sűrűsége állandó, akkor az Euler-egyenlet

$$\frac{dv}{dt} = g \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}, \quad (3.1)$$

amely a súrlódás elhanyagolása esetén érvényes, jobb oldala egy, a súrlódás hatását figyelembe vevő taggal egészül ki, így kapjuk a Navier-Stokes-egyenletet:

$$\frac{dv}{dt} = g \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \Delta v \quad (3.2)$$

A stacionárius áramlás esetén ha felírjuk a Bernoulli-egyenletet, súrlódásmentes közeg esetén alkalmazható alakját (nyomás dimenzióban), az adódik, hogy $p_2 = p_1$, azaz a nyomás a cső hossza mentén nem változik.

Valóságos közeg áramlása esetén azonban $p_2 < p_1$, azaz az áramlás irányában távolabb lévő pontban kisebb a nyomás, mint az 1 pontban. Miután a cső vízszintes és az átlagsebesség állandó, a fentiekből következően Bernoulli-összeg, azaz az összenergia a súrlódás következtében az áramlás irányában csökken.

Ezt a csökkenés a súrlódási energiaveszteségre fordítódik, és súrlódási veszteségnek ($\Delta p_{súrl}$) nevezünk:

$$\frac{v_1^2 \rho}{2} + p_1 + \rho g h_1 = \frac{v_2^2 \rho}{2} + p_2 + \rho g h_2 + \Delta p_{súrl} \quad (3.3)$$

Az összefüggést veszteséges vagy súrlódásos Bernoulli-egyenletnek nevezzük.

6.1. Turbulens áramlás súrlódási nyomásesése

A súrlódási nyomásesési tagot dimenzióanalízissel vezethetjük le:
Kijelöljük a függvénykapcsolatot:

$$\Delta p_{súrl} = f(l, d, v, \rho, \eta) \quad (3.4)$$

Hatványfüggvényt feltételezve kijelöljük a függvénykapcsolatot:

$$\Delta p/l = konst \cdot d^x \cdot v^y \cdot \rho^z \cdot \eta^f \quad (3.5)$$

A paraméterek helyére a dimenzióikat helyettesítjük:

$$M L^{-2} \tau^{-2} = konst \cdot L^x (L \tau^{-1})^y (M L^{-3})^z (M L^{-1} \tau^{-1})^f, \quad (3.6)$$

majd az egyenletben szereplő alapokra nézve kifejezzük a jobb ill. baloldalon szereplő kitevők értékeit:

$$M \rightarrow 1 = z + f$$

$$L \rightarrow -2 = x + y - 3z - f$$

$$\tau \rightarrow -2 = -y - f$$

Négy ismeretlenünk van és három egyenletünk, így feltételezzük, hogy $f=f$.

$$z = 1 - f \quad y = 2 - f \quad x = -f - 1$$

$$\Delta p/l = \text{const} \cdot d^{-1-f} v^{2-f} \rho^{1-f} \eta^f$$

rendezve az egyenletet kitevők szerint:

$$\Delta p/l = \text{const} \cdot d^{-1} v^2 \rho (d \cdot v \cdot \rho / \eta)^{-f}$$

$$\Delta p_s = \frac{c}{\text{Re}^f} \frac{l}{d} \frac{v^2 \rho}{2}$$

$$\frac{c}{\text{Re}^f} = \lambda \tag{3.7}$$

ha $3 \cdot 10^3 < \text{Re} < 10^5$ akkor $\lambda = 0,3864/\text{Re}^{0,25}$ (Blasius képlet) (turbulens áramlás)
 ha $0 < \text{Re} < 3 \cdot 10^3$ akkor $\lambda = 64/\text{Re}$ (lamináris áramlás)

6.2. A csősúrlódási veszteség

Kör keresztmetszetű l [m] hosszúságú egyenes csőben a súrlódási veszteséget a

$$\Delta p_{\text{súrl}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2 \rho}{2} \tag{3.8}$$

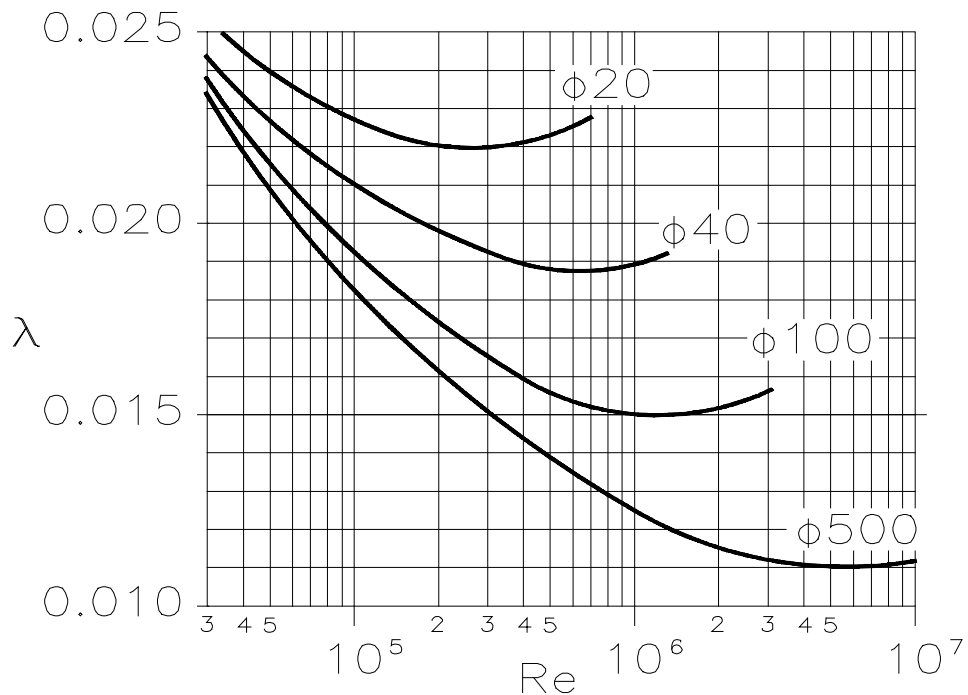
összefüggéssel határozhatjuk meg, ahol a λ a csősúrlódási tényező, amely a Reynolds-szám függvénye. Lamináris áramlás esetén, amikor a Reynolds-számmra fennáll $\text{Re} < 2300$ a csősúrlódási tényező:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \tag{3.9}$$

Turbulens áramlásnál az ún. átmeneti tartományban, $4000 \leq \text{Re} \leq 10^5$ a csősúrlódási tényező jól közelíthető a Blasius-képlettel:

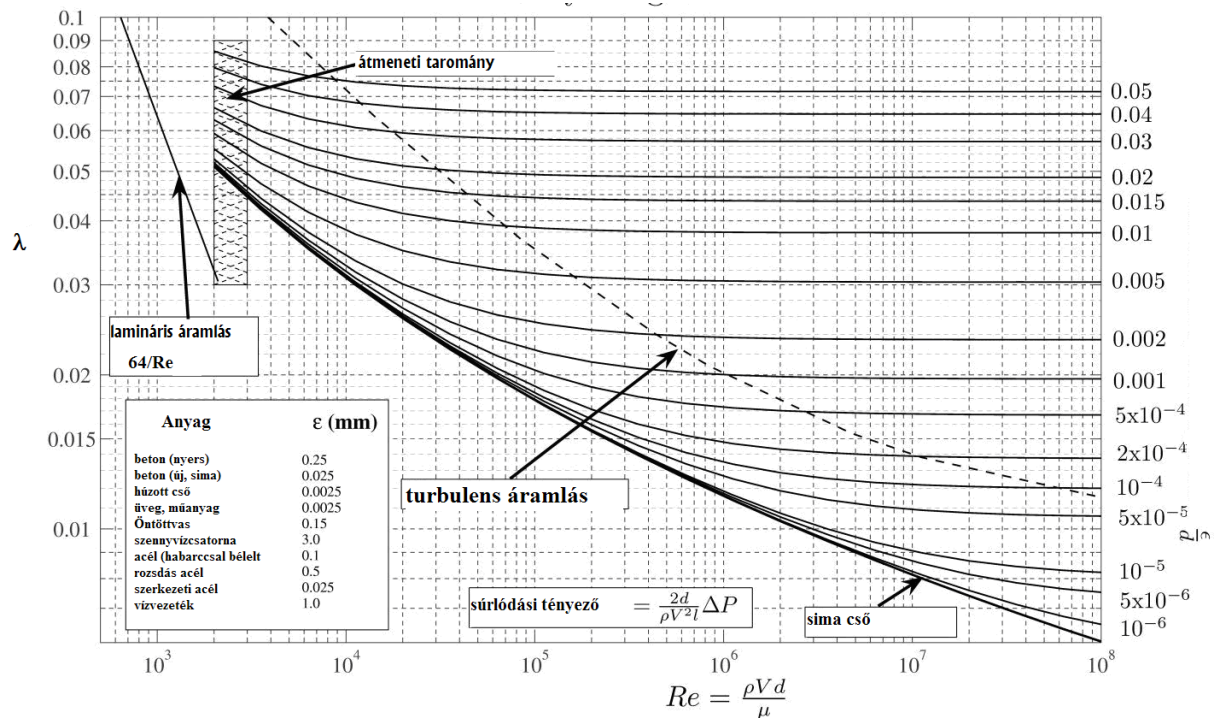
$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}} \tag{3.10}$$

Csövek, pl. acélcsővek esetén az érdesség mérete változó, tehát a Reynolds-szám növekedésével fokozatosan egyre több érdességcsúcs kerül ki a turbulens áramlásban a fal mellett kialakuló viszkózus alaprétegből. Ezért az érdesség a Reynolds-szám növekedésével fokozatosan növekvő mértékben befolyásolja a csősúrlódási tényező értékét. Miután az érdesség mértéke széles határok között nem függ a csőátmértől, csak a csőgyártás technológiájától, a relatív érdesség jellemzésére a csőátmérőt használhatjuk: minél nagyobb az átmérő adott érdességnél, annál kisebb a relatív érdesség. Adott technológiával készült acélcsővekre vonatkozó $\lambda - Re$ görbéket kétszer logaritmikus diagramban az **51. ábra** mutatja.



51. ábra: Acélcsővek csősúrlódási tényezője

A csősúrlódási tényező meghatározására a csövek relatív érdessége ismeretében a Moody diagram használható (**52. ábra**).



52. ábra: Moody diagram

Nem kör keresztmetszetű csövek veszteségének számítására az egyenértékű átmérőt vezetjük be:

$$d_e = 4 \frac{\text{áramlási keresztmetszet}}{\text{nedvesített terület}}, \quad (3.11)$$

6.3. Beömlési veszteség, a veszteségtényező

A cső elején kialakult csőáramlás létrejöttéhez a tapasztalat szerint nagyobb nyomásesésre van szükség, mint amennyi egyenes csőben kialakult áramlás esetén keletkezik. Ezt a többletvesztéséget $\Delta p'_{be}$ beömlési veszteségnek nevezzük, és a

$$\Delta p'_{be} = \frac{\rho}{2} v^2 \zeta_{be} \quad (3.12)$$

összefüggéssel határozhatjuk meg, ahol ζ_{be} a beömlési veszteségtényező.

Ugyanígy összefüggéssel határozzuk meg csőidomok (pl. könyök, tolózár, szelep) veszteségét, amelyeknél a ζ veszteségtényezőt az adott csőidom forgalmazója által rendelkezésre bocsátott, vagy a szakirodalomban megtalálható táblázatokról vesszük ki.

Az áramlás irányában bővülő csőtoldatokban, a diffúzorokban keletkező súrlódási veszteséget diffúzorhatásfok ismeretében határozhatjuk meg:

$$\Delta p'_{diff} = (1 - \eta_d) \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) \quad (3.13)$$

A csövekben áramló közegek irányváltozásainál a csőívekben, könyökökben jelentős súrlódási veszteségek keletkezhetnek, amelyeket ugyancsak a ζ veszteségtényezővel jellemezzük.

Itt jegyezzük meg, hogy a ζ veszteségtényezők és a λ csősúrlódási tényező számolt vagy katalógusból, szakirodalomból kikeresett értékei a valóságos alkalmazásoknál csak közelítően helyesek, hiszen a közölt csősúrlódási tényező, veszteségtényező, diffúzorhatásfok értékek nem veszik figyelembe a súrlódási veszteségforrások egymásra hatását.

Példák

1. Egy vízszintes csővezeték hossza 25 m, belső átmérője 150 mm. Mekkora a cső elején kialakuló nyomás és a végén mérhető nyomás különbsége, ha a csőben óránként 1000 m^3 ill. 100 m^3 40°C -os víz áramlik?

$$v = 0,653 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad \text{relatív érdesség:} \quad \varepsilon/D=0,0006 \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3 \quad .$$

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2 \rho}{2}$$

$$v = q_v/A = \frac{1000}{0,150^2 \pi} = 15,7 \text{ m/s}$$

$$Re = d \cdot v/v = 0,15 \cdot 15,7 / 0,653 = 3,6 \cdot 10^6$$

Nomogramról leolvastva: $\lambda = 0,018$

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2 \rho}{2} = 0,018 \cdot \frac{25}{0,15} \frac{15,7^2 \cdot 1000}{2} = 3,7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Ha a térfogatáram $100 \text{ m}^3/\text{h}$ -ra csökken: $v_1 : v_2 = 10 : 1 \rightarrow v_1^2 : v_2^2 = 100 : 1$

Δp is századrészére csökken, ha λ változatlan, Ekkor $\Delta p = 3,7 \cdot 10^3 \text{ Pa}$

2. Óránként 650 m^3 , 20°C -os vizet kell 1000 m hosszú, vízszintes egyenes 300 mm átmérőjű csőben szállítani. Mekkora a cső két vége közötti nyomáskülönbség?

$$v = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \varepsilon/D = 0,005, \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3.$$

A nyomáskülönbség értékét az alábbi összefüggéssel számíthatjuk ki:

$$\Delta p_s = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2 \rho}{2}$$

$$v = \frac{q_v}{A} = \frac{650 \text{ m}^3}{0,3^2 \text{ m}^2 \pi} = 2,55 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Re = \frac{dv}{\nu} = \frac{0,3 \text{ m} \cdot 2,55 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 7,65 \cdot 10^5$$

Nomogramból leolvassva a Re és a relatív érdesség értékének figyelembevételével a súrlódási együttható értéke: $\lambda=0,03$

$$\Delta p = 0,03 \frac{1000m}{0,3m} \frac{2,55^2 m^2 \cdot 1000 \frac{kg}{m^3}}{2} = 3,25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Tehát a cső két végpontja között mérhető nyomáskülönbség értéke: $3,25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

6.4. Sorba kapcsolt csővezetékek

Ha a nyomásesés összefüggését vizsgáljuk, látható, hogy a csőátmérő igen nagymértékben befolyásolja a nyomásesést. Ezért a csővezetékek átmérőjének megválasztása igen fontos. A túlzott átmérő a beruházási költségeket, a kicsi a szivattyúzási költségeket növeli.

A csővezetékeknél nemcsak a súrlódási nyomásesés számít veszteségnek, hanem mindaz, ami a csővezetékben a sztatikus nyomást az áramlás folyamán csökkenti. Tehát tartályból történő szállítás esetén, a sebességi energiát is veszteségként jelentkezik:

$$\Delta h_{\text{össz}} = \Delta h_{\text{pot}} + \Delta h_{\text{veszt}} \quad (3.14)$$

$$\Delta h_{\text{össz}} = (\Delta h_{\text{mag}} + \Delta h_{\text{nyom}}) + (\Delta h_{\text{seb}} + \Delta h_{\text{súrl}})$$

$$\Delta h_{\text{össz}} = h + \frac{p}{g\rho} + \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (3.15)$$

$$\Delta h_{\text{össz}} = \Delta h_{\text{veszt}} = \Delta h_{\text{seb}} + \Delta h_{\text{súrl}} \quad (3.16)$$

$$\Delta h_{\text{súrl.}} = \lambda \frac{l_{\text{össz}}}{d} \frac{\left(\frac{q_v}{d^2 \pi} \right)^2}{2g} = \lambda \frac{l_{\text{össz.}}}{d^5} \frac{8}{\pi^2 g} q_v^2 = \varphi q_v^2 \quad (3.17)$$

Sorba kapcsolt csővezetékek esetén:

$$\varphi = \frac{8\lambda}{\pi^2 g} \left(\frac{l_{össz1}}{d_1^5} + \frac{l_{össz2}}{d_2^5} + \dots + \frac{l_{összn}}{d_n^5} \right) \quad (3.18)$$

$$\Delta h_{seb.} = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(\frac{q_v}{d^2 \pi} \right)^2}{2g} = \frac{1}{d^4} \frac{8}{\pi^2 g} q_v^2 = \Psi q_v^2 \quad (3.19)$$

Sorba kapcsolt csővezetékek esetén az előzőeknek megfelelően:

$$\Psi = \frac{8}{\pi^2 g} \left(\frac{1}{d_1^4} + \frac{1}{d_2^4} + \dots + \frac{1}{d_n^4} \right) \quad (3.20)$$

Ezek alapján a berendezésünkben található különböző idomok és szelvények által okozott áramlási veszteség és a térfogatáram közötti összefüggés:

$$\Delta h_{össz} = \Delta h_{veszt} = \varphi q_v^2 + \Psi q_v^2 = (\varphi + \Psi) q_v^2 \quad (3.21)$$

amiből:

$$q_v = \sqrt{\frac{\Delta h_{össz}}{\Psi + \varphi}} \quad (3.22)$$

Példa:

- Hasonlítsuk össze az áramlási nyomásveszteségeket, ha L= 15 m hosszú és D= 3,81 cm átmérőjű kovácsoltvas csőben étolaj illetve víz áramlik. Milyen lesz az étolaj, illetve a víz áramlása esetén az áramlás jellege és mekkora lesz a Δp_{veszt} , ha

a./ $q_{w1} = 0,05 \text{ m}^3/\text{h}$

b./ $q_{w2} = 1,2 \text{ m}^3/\text{h}$

	étolaj	víz
η Pas	$5,8 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}
ρ kg/m ³	1500	1000

Megoldás:

a./

$$v = \frac{4 \cdot q_{w1}}{D^2 \cdot \pi} = \frac{4,5 \cdot 10^{-2}}{14,5 \cdot 10^{-4} \cdot 3,14 \cdot 3,6 \cdot 10^3} = 1,22 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

$$\text{Re}_{v\acute{e}z} = \frac{3,81 \cdot 10^{-2} \cdot 1,22 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3}{10^{-3}} = 465$$

$$\text{Re}_{\acute{e}tolaj} = \frac{3,81 \cdot 10^{-2} \cdot 1,22 \cdot 10^{-2} \cdot 1,5 \cdot 10^3}{0,58 \cdot 10^{-3}} = 1200$$

az áramlás tehát mindkét folyadék esetében lamináris lesz $\lambda = 64/\text{Re}$

$$\Delta p_{v\acute{z}} = \frac{1,22^2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3}{2} \left(1 + 0,137 \frac{15}{3,81 \cdot 10^{-2}} \right) = 4,25 Pa$$

$$\Delta p_{\acute{e}tolaj} = \frac{1,22^2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3}{2} \left(1 + 0,0533 \frac{15}{3,81 \cdot 10^{-2}} \right) = 2,47 Pa$$

$$\frac{\Delta p_{v\acute{z}}}{\Delta p_{\acute{e}tolaj}} = \frac{4,25}{2,47} = \frac{\eta_{v\acute{z}}}{\eta_{\acute{e}tolaj}} = \frac{1}{0,58}$$

A nyomásesések úgy aránylanak egymáshoz, mint a folyadékok viszkozitásai. Ezért a lamináris áramlást, a Δp -t túlnyomóan meghatározó viszkozitás miatt, „viszkózus” áramlásnak is nevezik.

b./

$$v = \frac{4q_{v_2}}{D^2 \pi} = 2,92 \cdot 10^{-1}$$

$$Re_{v\acute{z}} = \frac{3,81 \cdot 10^{-2} \cdot 0,292 \cdot 10^3}{10^{-3}} = 1,115 \cdot 10^4$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = 1,2 \cdot 10^{-3} \lambda = 0,033$$

$$Re_{\acute{e}tolaj} = \frac{3,81 \cdot 10^{-2} \cdot 0,292 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{0,58 \cdot 10^{-3}} = 2,88 \cdot 10^4$$

$$f = 0,027$$

Az áramlás tehát mindkét folyadék esetében turbulens lesz.

$$\Delta p_{v\acute{z}} = \frac{0,292^2 \cdot 10^3}{2} \left(1 + 0,033 \frac{15}{3,81 \cdot 10^{-2}} \right) = 597 Pa$$

$$\Delta p_{\acute{e}tolaj} = \frac{0,292^2 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{2} \left(1 + 0,027 \frac{15}{3,81 \cdot 10^{-2}} \right) = 742 Pa$$

$$\frac{\Delta p_{v\acute{z}}}{\Delta p_{\acute{e}tolaj}} = \frac{597}{742} = 0,805 \quad \frac{\rho_{v\acute{z}}}{\rho_{\acute{e}tolaj}} = \frac{1}{1,5} = 0,67$$

Tehát azonos áramlási sebességű, de különböző minőségű fluidumok áramlása esetén a nyomásesések monoton változnak a sűrűséggel, turbulens áramlás esetén, ezért ezt „fajsúlyos” áramlásnak is nevezik.

2. Mely fizikai paraméterek határozzák meg a súrlódási nyomásesést?

- a) l, d, v, ρ , η
- b) d, l, v, ρ ,
- c) v, ρ , η
- d) ρ , l, v, η
- e) l, d, v, ρ ,

(a)

3. Olajat szállítunk 4 cm-es vascsőben 1 m/s sebességgel. Milyen minimális nyomást kell fenntartani a beömlésnél?

$$D=4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad \rho=800 \text{ kg/m}^3 \quad \eta=2 \cdot 10^{-3} \text{ Pas} \quad v=1 \text{ m/s} \quad L=20 \text{ m}$$

Megoldás: $p=6,4 \cdot 10^3 \text{ Pa}$

4. Óránként 40 m^3 ásványolajat kell $D=100 \text{ mm}$ átmérőjű, 400 m hosszú csővezetéken keresztül szivattyúzni. Számítsuk ki a nyomásvesztéseket két esetben:

a./ az olaj hőfoka 15° C és b./ 50° C

$$\rho \text{ /kg/m}^3/ \quad 960 \quad 900$$

$$\eta \text{ /Pas/} \quad 3,4 \cdot 10^{-1} \quad 1,8 \cdot 10^{-1}$$

Melyik hőfokon kisebb a nyomásesés?

Megoldás: a./ $\Delta p=6,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ b./ $\Delta p=3,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

5. Egy 75 mm belső átmérőjű acélcsövön keresztül óránként 25 m^3 folyadékot kell átszivtatnunk. A folyadék sűrűsége 1200 kg/m^3 , dinamikai viszkozitása pedig $1,7 \cdot 10^{-3} \text{ Pas}$. A kezdőpont és a végpont közötti szintkülönbség 24 m . A cső hossza 112 m , a vezeték 2 szelepet és 5 derékszögű könyököt tartalmaz. Mekkora a teljesítményszükséglet, ha a szivattyútelep összehatásfoka $0,6$?

Megoldás: $P=4,16 \text{ kW}$

6. Mennyi olaj áramlik óránként egy $20 \times 30 \text{ mm}$ -es négyzet keresztmetszetű réz vezetékben, ahol a cső két végén lévő nyomáskülönbség $5 \cdot 10^4 \text{ Pa}$?

$$L=150 \text{ m} \quad \eta=8 \cdot 10^{-3} \text{ Pas} \quad \rho=800 \text{ kg/m}^3$$

Megoldás: $w=988 \text{ kg/h}$

7. Egy 20° Brix -os (20% cukortartalmú) levet szivattyúzunk egy 27° C -os nyitott tankból egy névleges átmérőjű higiénikus csövön keresztül egy második tartályba, ami magasabban helyezkedik el. A tömegáram 1 kg/s a 30 m hosszú csövön keresztül két 90° -os standard hajlattal és egy sarokszeleppel. Az ellátó tankban a folyadék szintje 3 m , és a lé a tartályból való kilépése után 12 m magasságba emelkedik a föld felett.

Számolja ki az energia szükségletét a szivattyúnak.

$$200,5 \text{ J/kg}$$

7. Áramlástechnikai gépek

A fluidumok szállítása, mozgatása az üzemi gyakorlat egyik leggyakrabban előforduló feladata. A fluidumok mozgatása jellemzően az anyag áramoltatása csővezetékben, illetve berendezésekben. A szivattyúk (illetve gázok szállítása során a ventilátorok) azok a berendezések, amelyek mozgatják a fluidumot, akár olyan módon, hogy mechanikai energiát adnak át neki, akár a nyomás növekedését idézik elő. Az áramlástechnikai gépeknek működési elvük alapján két nagy csoportját különböztetjük meg, a térfogatkiszorítás elvén működő (volumetrikus), illetve az áramlástechnikai elven működő (örvény- vagy turbó-) gépeket.

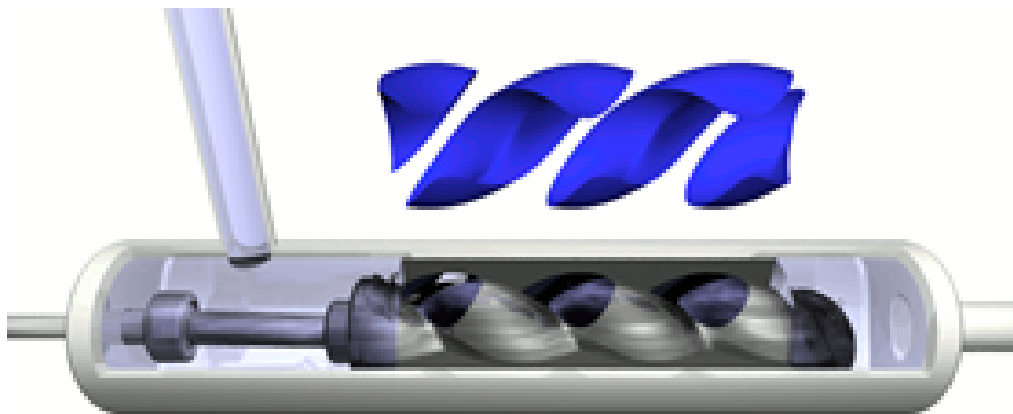
7.1. Térfogatkiszorítás elvén működő gépek

A térfogatkiszorítás elvén működő szivattyú a munkatér térfogatának változtatásával szállítja a folyadékot. A térfogat növelésekor a folyadék beáramlik a megnövekedett térbe, a térfogat csökkentésekor pedig a kiszorító elem kinyomja a folyadékot. A szállított térfogat a kiszorító elem mozgásának sebességétől függ, a térfogatáram így az elem mozgásának sebességével pontosan szabályozható. A pumpák mozgó alkatrészeit a kis súrlódási tényezővel rendelkező, mechanikailag ellenálló anyagból kell gyártani, hiszen a folyamatos működés szoros tömítéseket igényel. A pumpák fordított irányú áramoltatásra is alkalmasak a kiszorító elem mozgásirányának megfordításával.

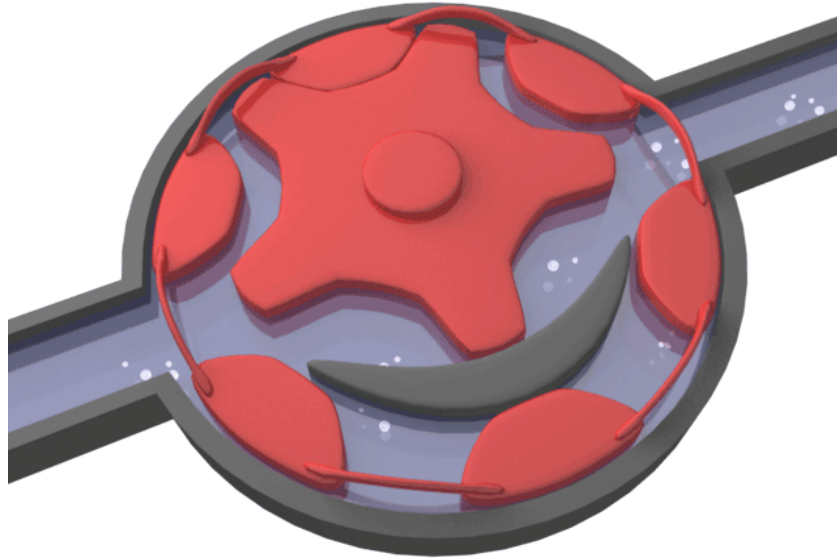
A kiszorító elem mozgása alapján megkülönböztetünk:

- dugattyús gépeket (dugattyús, membrános)
- forgó-lengőmozgást végző (szárnyszivattyú)
- forgómozgást végző (fogaskerekes, fogaskerék-, lamellás, forgó lapátos) szivattyúkat.

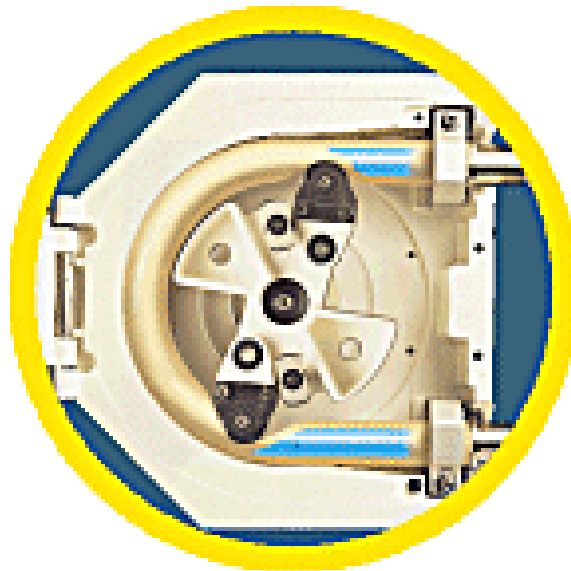
Néhány példát mutat be a következő ábra:



53. ábra: Csavarszivattyú



54. ábra: Fogaskerekes szivattyú



55. ábra: Perisztaltikus pumpa

Az 55. ábra látható szivattyúk, térfogatkiszorításos szivattyúk

7.2. Örvényáramú (centrifugál-) szivattyúk

Az örvényáramú szivattyúkat elterjedten használják víz, és kis viszkozitású Newtoni folyadékok szállítására.

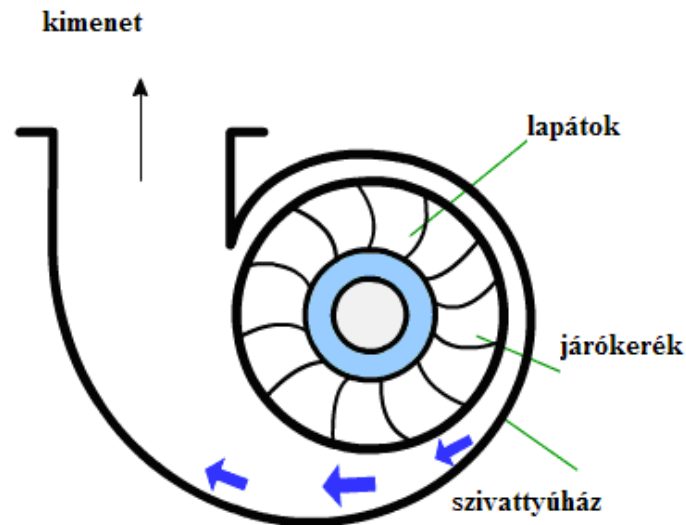
A szállított fluidum anyagi minőségétől függően megkülönböztetünk:

- folyadékok szállítására szolgáló szivattyúkat
- gázok, gőzök szállítására alkalmas ventilátorokat (kb 0,5 psi nyomáskülönbség)
- kompresszorokat (1000 psi nyomáskülönbség).

7.2.1. Az örvényáramú szivattyúk felépítése

Az örvényáramú szivattyúk két fő részből állnak: a folyadék mozgását járókerék végzi, amely egy forgó tengelyhez van rögzítve, ez általában egy csigaház formájú házban helyezkedik el.

Az örvényszivattyúban az energiaátalakítást a lapátokkal rendelkező járókerék végzi. A lapátok két forgásfelület között helyezkednek el, a közeg a lapátok közötti zárt lapcsatornában áramlik.

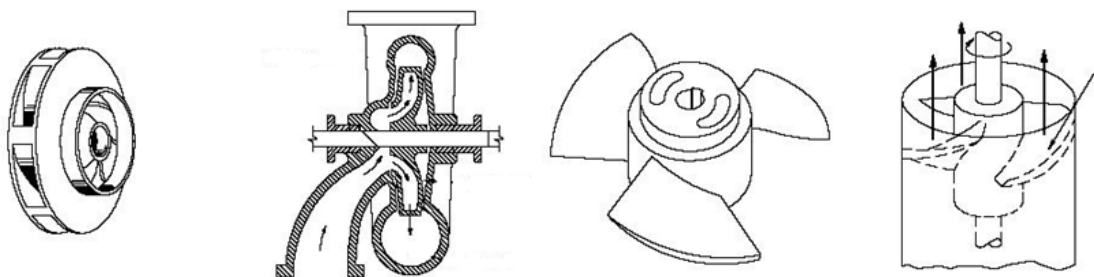


Copyright: R. Paul Singh

56. ábra: Örvényszivattyú felépítése (szívócsonk, szárnyak, ház) (animáció angol nyelven:
http://www.rpaulsingh.com/animated%20figures/fig2_21.htm)

A szivattyú tengelyét motor hajtja, ahogy a tengely forog, forgatja a tengelyhez rögzített járókereket is. A járókerék forgásával a folyadékra centrifugális erő hat, így az a bemeneti nyílás (szívócsonk) felől a járókerék külső része felé áramlik, tehát a járókerék lapátai munkát végeznek a folyadékon. Ahogy a folyadék a szívócsonk felől a járókerék külső része felé mozog, nő a lineáris áramlási sebessége, ezzel nő a kinetikus energiája is, míg mögötte nyomásesés következik be, létrejön a szívóhatás. A külső zónába, illetve a csigaházba lépve a folyadék áramlási sebessége csökken (a nagyobb áramlási keresztmetszet következtében). Ezáltal csökken a kinetikus energiája is, amely így a nyomás növelésére fordítódik. A kiáramló folyadék nyomása így nagyobb lesz, mint a szivattyúba belépő folyadék nyomása.

Kialakításától függően beszélhetünk axiális és radiális átömlésű járókerekről. Az axiális járókerék esetében a folyadék áramlása a járókerék forgástengelyével egyező irányú, radiális járókerekekben arra merőleges.



57. ábra: a. Radiális vagy centrifugális áramlás

b. Axiális áramlás

7.2.2. Örvényáramú szivattyúk jellemzése

Bár a szivattyúk működését leíró elméletek folyamatosan fejlődnek, egy adott áramló rendszerre csak számítások alapján egyelőre nem lehet szivattyút tervezni – a pontos tervezéshez kísérletekre is szükség van. Egy szivattyút is tartalmazó folyadék szállító rendszer tervezésekor két szempontot kell figyelembe venni:

- kvantitatív információval kell rendelkezni az alkalmazni kívánt szivattyúról,
- ismernünk kell a folyadék szállító rendszer (csővezetékek, tartályok, berendezések, csatlakozó elemek) energiaszükségletét.

Annak érdekében, hogy adott üzemi körülményekre tervezni lehessen a szivattyút, tapasztalati adatokra is szükség van, amelyeket a gyártó rendelkezésre bocsátja. A szivattyúról tudnunk kell, hogy adott térfogatáram mellett mennyi energiát képes közölni a folyadékkal. Ezt az információt minden esetben leolvashatjuk a szivattyú jelleggörbéjéről, amelyet a gyártó mellékel a szivattyúhoz.

A szivattyú jellemzéséhez ismernünk kell a valóságos térfogatáramot, (q_v (m^3/s)), a szivattyún ténylegesen, időegység alatt átáramló folyadék mennyisége, amely a volumetrikus veszteséggel (a járókerék és a ház közötti résben visszaáramló folyadék térfogatáramával) kisebb az elméleti térfogatáramánál.

A valóságos szállítómagasság (H) a szivattyún átáramló folyadék energiájának növekedése. Az Euler-féle turbinaegyenletben szereplő mennyiségekkel ez:

$$H = \left[\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_2 \right] - \left[\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + h_1 \right] \quad (4.1)$$

ahol v_1 , p_1 , a lineáris áramlási sebesség és a nyomás a szívócsonkon, h_1 a folyadékszint magassága a szívó oldalon, v_2 , p_2 , a lineáris áramlási sebesség és a nyomás a nyomó oldalon, h_2 a folyadékszint magassága a kifolyó oldalon.

Az örvényszivattyú által a folyadéknak átadott teljesítményt (hasznos teljesítmény (P_h , (W))) az emelőmagasság (H , (m)), a térfogatáram (q_v (m^3/s)), a gravitációs gyorsulás (g , (m/s^2)) és a sűrűség (ρ , (kg/m^3)) szorzatából számíthatjuk:

$$P_h = \rho \cdot g \cdot q_v \cdot H \quad (4.2)$$

A szivattyú által ténylegesen felvett teljesítmény:

$$P = \omega \cdot M \quad (4.3)$$

ahol ω (1/s) a tengely forgási szögsebessége, M a nyomaték (Nm).

Tekintettel arra, hogy a szivattyúban mindig vannak veszteségek, a hasznos teljesítmény mindig kisebb, mint a tengely által felvett teljesítmény, a szivattyú hatásfoka:

$$\eta = \frac{P_h}{P} = \frac{\rho \cdot g \cdot q_v \cdot H}{\omega \cdot M} \quad (4.4)$$

Példa:

Egy örvényszivattyú tesztelése során 30°C-os vizet szállítunk. A szívóoldali nyomás 5 bar, a nyomóoldalon 8 bar, a térfogatáram 15 m³/h. Számítsuk ki a szivattyú emelőmagasságát!

Megoldás:

$$p_1 = 5 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$p_2 = 8 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$\rho = 995,7 \text{ kg/m}^3$$

$$H = \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} = 30,7 \text{ m}$$

$$P_h = \rho \cdot g \cdot q_v \cdot H = 1,26 \text{ kW}$$

7.2.3. A szivattyú szívóképessége

A folyadék szállítórendszerének tervezése során figyelembe kell venni, hogy a szállítandó folyadékban nem történhet pára/gőzképződés. Zárt térben, a folyadékfelszín adott nyomásán el kell kerülni, hogy gőzök távozzanak a folyadékból. Ez a nyomás a folyadék gőznyomása; egy folyadékszállítórendszerben fontos, hogy a folyadék nyomása ne csökkenjen a folyadék gőznyomása alá. Ha ez megtörténik, a járókerék szívócsonkján kavitáció alakul ki. A folyadékszállító rendszer egészében a folyadék nyomása a szivattyú szívócsonkjában a legalacsonyabb. A gőzképződés csökkenti a szivattyú hatásfokát, a buborékok együtt mozognak a folyadékkal a járókerék széle felé, ahol megnő a nyomás, a pára gyorsan kondenzálódik. A kavitáció felismerhető a jellegzetes hangról, ahogy a buborékok kialakulnak, majd összeroppannak a járókerék felszínén, ami hosszú távon a szerkezeti elemek károsodását, kopását okozhatja. A kavitáció elkerülése érdekében tehát biztosítani kell a szívóoldalon a folyadék gőznyomásánál nagyobb nyomást. Ennek érdekében a szivattyúgyártók megadják a megkívánt belső nyomásesés értékét ($NPSH_R = \text{required net positive suction head}$, megkívánt nettó pozitív szívómagasság) a következő képlettel számítható:

$$NPSH_R = \frac{p_s - p_g}{\rho \cdot g} + \frac{v_s^2}{2g} \quad (4.5)$$

Ahol p_s a nyomás a szívócsonk középpontjában, p_g a szállított közeg gőznyomása, v_s a szívócsonkban az átlagsebesség.

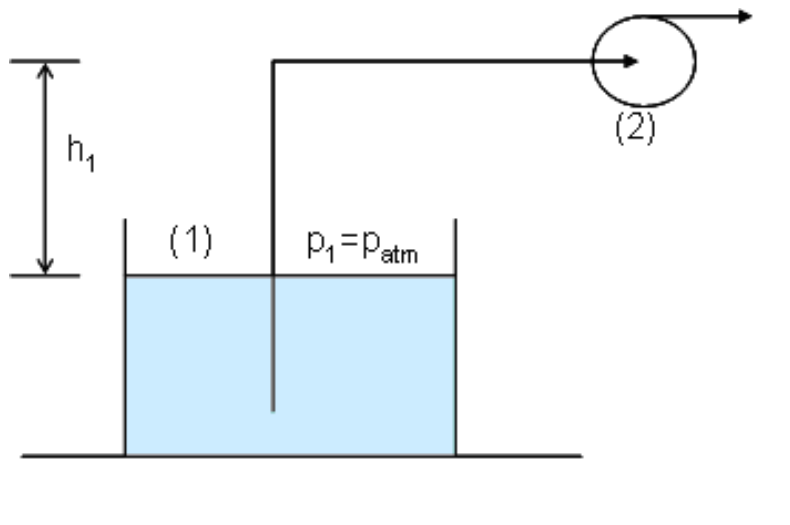
Az emelőmagasságnak tehát mindig nagyobbnak kell lennie a $NPSH_R$ értéknél. Ezek az értékek leolvashatók a szivattyúk jelleggörbéiről.

A szivattyú beépítése során biztosnak kell lennünk abban, hogy a szivattyú által elérhető szívómagasság ($NPSA_A$ (available net positive suction head, elérhető nettó pozitív szívómagasság) adott feladat során nagyobb, mint a megkívánt szívómagasság. A $NPSH_A$ értéke minden esetben függ az adott folyadékszállító rendszer kialakításától. Példaképpen a . ábrán látható rendszer esetében az (1) és (2) pont között felírható szállítómagasság:

$$\frac{p_{am}}{\rho g} - h_1 = \frac{p_{(2)}}{\rho g} + \frac{v_{(2)}^2}{2g} + h_{veszt} \quad (4.6)$$

Ebből kifejezhető

$$NPSH_A = \frac{p_{atm}}{\rho g} - h_1 - h_{veszt} - \frac{p_g}{\rho g} \quad (4.7)$$



58. ábra: A szivattyúrendszer szívóoldala

Példa:

Egy örvényszivattyút 4 m-rel egy tartály vízszintje fölé telepítünk. A szivattyú térfogatárama $0,02 \text{ m}^3/\text{s}$. A gyártó ajánlása szerint az adott térfogatáram mellett a $NPSH_R = 3 \text{ m}$. A súrlódási veszteségek elhanyagolhatóak, kivéve egy hőcserélőt, amelynek súrlódási tényezője $\lambda = 15$. A csőátmérő 10 cm, a víz hőmérséklete 30°C . Állapítsuk meg, alkalmas-e a szivattyú a feladatra.

Megoldás:

Adatok:

Csőátmérő: $d_b = 0,1 \text{ m}$

A szivattyú és a vízszint közötti magasság: $h_1 = 4 \text{ m}$

A térfogatáram: $q_v = 0,02 \text{ m}^3/\text{s}$

A súrlódási tényező: $\lambda = 15$

A folyadék hőmérséklete: $t = 30^\circ\text{C}$

A megkívánt dinamikus belső nyomásesés: $NPSH_R = 3 \text{ m}$

(1) A lineáris áramlási sebesség:

$$v = \frac{q_v}{A} = \frac{q_v}{\frac{d_b^2 \pi}{4}} = \frac{4 \cdot 0,02}{0,1^2 \cdot 3,14} = 2,55 \text{ m/s}$$

(2) A súrlódási veszteség:

$$h_{veszt} = \lambda \frac{v_s^2}{2g} = \frac{15 \cdot 2,55^2}{2 \cdot 9,81} = 4,97 \text{ m}$$

(3) Táblázatból kikeresve 30°C -on a víz gőznyomása: $p_g = 4246 \text{ Pa}$.

Ebből:

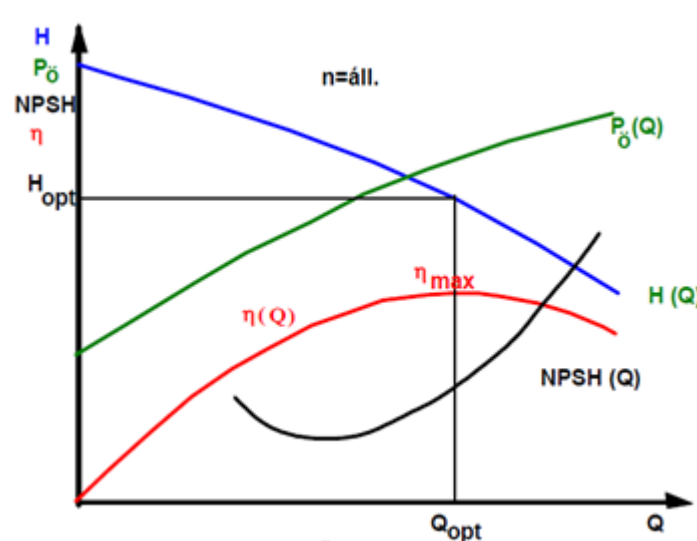
$$NPSH_A = \frac{p_{atm}}{\rho g} - h_1 - h_{veszt} - \frac{p_g}{\rho g} = \frac{(101,3 - 4,246) \cdot 10^3}{995,7 \cdot 9,81} - 4 - 4,97 = 0,97 \text{ m}$$

Mivel a kapott $NPSH_A$ kisebb az ajánlott $NPSH_R$ értéknél, így a szivattyú nem alkalmazható az adott feladatra.

7.2.4. A szivattyúk jelleggörbéi

A szivattyú folyadékszállításához is jellemző nyomások és nyomásvesztések tartoznak, hasonlóan a csővezetékben való áramlásokhoz.

A szivattyú emelőmagasságát, hatásfokát, a felvett teljesítményt ábrázolva a térfogatáram függvényében kapjuk a szivattyú jelleggörbéjét.



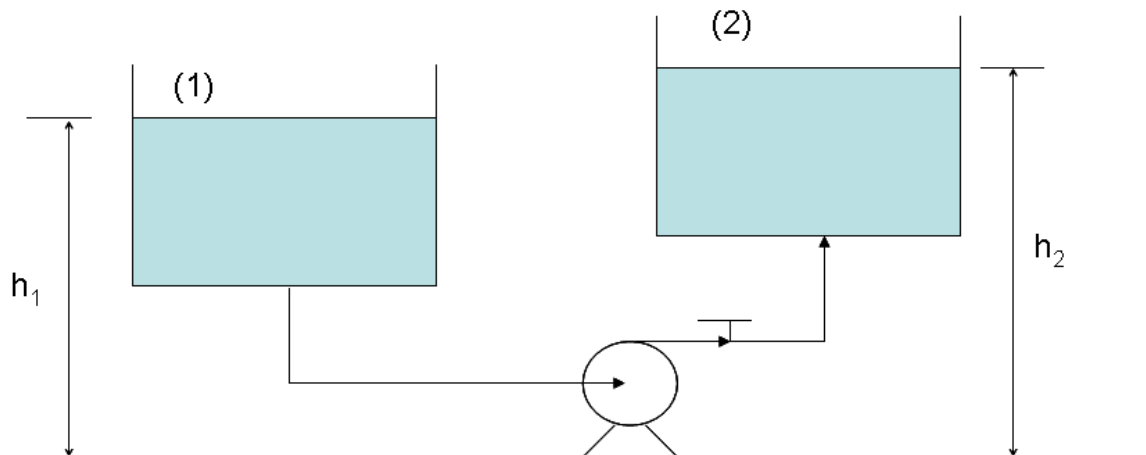
59. ábra: Örvényszivattyú jelleggörbéje

A szivattyú munkapontja a szivattyú és a hozzá kapcsolt csővezeték együttes működése során kialakuló üzemi pont, amelyet a szivattyú és a csővezeték jelleggörbéjének metszéspontja határoz meg. Eszerint a munkapont egy olyan egyensúlyi állapotot jelöl, amelyben a szivattyú éppen akkora szállítómagasságot szolgáltat, amennyit a csővezeték igényel.

7.2.5. Szivattyú kiválasztása adott folyadékszallító feladatra

A folyadékszallító rendszer csővezetékekből, szelepekből, illesztésekből, brendezésekből áll. A szivattyú beépítésének célja, hogy növelje a folyadék energiáját, ezáltal mozgassa, illetve mozgásban tartsa a folyadékot.

Példaként vizsgáljuk meg a szivattyú jellemző paramétereit a következő feladat során, mozgassuk a folyadékot (A) tartályból (B) tartályba. (A) tartályban a folyadékszint magassága h_1 , (B) tartályban h_2 .



60. ábra: Folyadék szállítása két tartály között

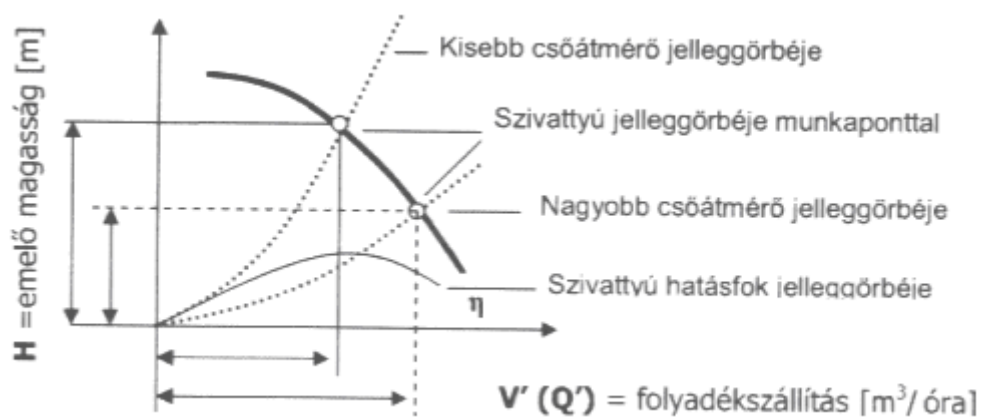
A rendszer tartalmaz csővezetékeket, szelepeket és könyököket. Az folyadék felszínének mozgási sebessége elhanyagolható, mindkét tartály légköri nyomáson van.

A rendszer emelőmagassága:

$$H = h_2 - h_1 + h_{veszt} = h_2 - h_1 + C \cdot q_v^2 \quad (4.8)$$

ahol C a folyadékszállító rendszerre jellemző állandó, amely a csővezeték veszteségeiből határozható meg. A jellemző értékek a szivattyú, illetve a csővezeték jelleggörbéiről olvashatók le.

A csővezeték jelleggörbéi emelkedő parabolák (ahogy a képletből is látható). A kisebb csőátmérőhöz meredekebb, a nagyobb csőátmérőhöz kisebb meredekségű parabola tartozik. A szivattyú jelleggörbéi a csővezetékkel ellentétben lefelé hajlanak, a sebességnövekedés azonban itt is egyzetesen növeli az áramlási ellenállást.

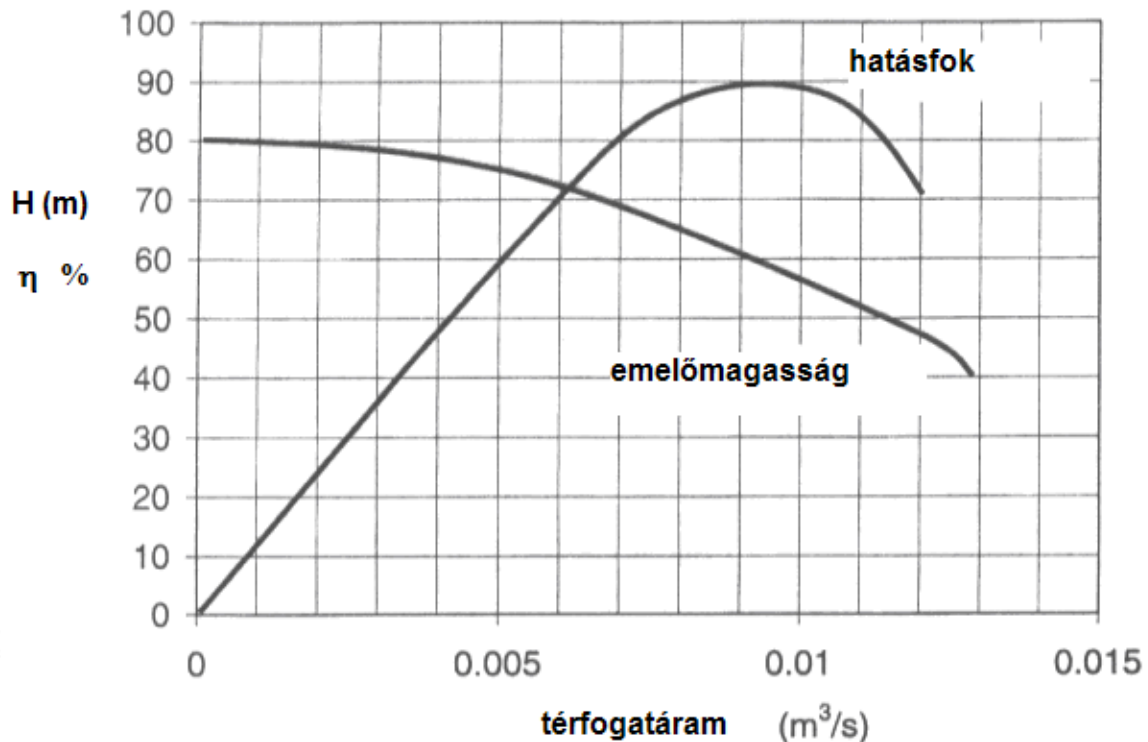


61. ábra: Szivattyú és a csővezeték jelleggörbéje

Ahhoz, hogy meghatározhassuk egy adott folyadékszállító rendszer működési paramétereit, a szállítórendszer (csővezeték) jelleggörbéjét a szivattyú jelleggörbéjére kell vetíteni. A két görbe metszéspontja adja a munkapontot, azt a térfogatáramot és emelőmagasságot, amely jellemző a szivattyúra és a csővezetékre is. A munkapont célszerűen a pumpa maximális hatásfokának közelébe esik. Abban az esetben, ha a rendszerben megnő a veszteség (pl. több illesztést tartalmaz, vagy megnő a súrlódási ellenállás) a rendszer jelleggörbéje eltolódik, új munkapont alakul ki, amelynél alacsonyabb a szivattyú hatásfoka.

Példa:

Egy örvényszivattyút szeretnénk alkalmazni víz (A) tartályból (B) tartályba történő szivattyúzására. A cső belső átmérője 4 cm, a súrlódási tényező 0,005. A cső hossza 25 m, a két tartály szintje között 5 m különbség van. A gyártó által megadott jellegörbét mutatja a **62. ábra**. A folyadék szállító rendszerre jellemző C állandó értéke 968283.



62. ábra: Szivattyú jelleggörbéje

Megoldás:

Adatok:

$$d_b = 0,04 \text{ m}$$

$$l = 25 \text{ m}$$

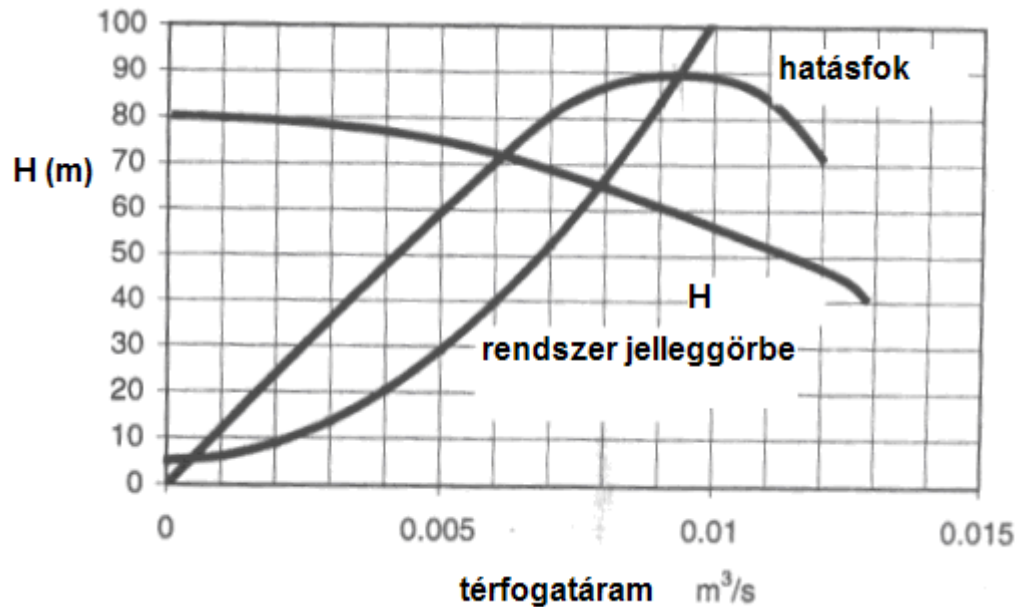
$$\lambda = 0,005$$

A csővezetékre jellemző állandó $C = 968283$

- (1) Az adatokat behelyettesítve a következő képletbe, megkapjuk a csővezeték emelőmagasságát:

$$H = h_2 - h_1 + h_{veszt} = h_2 - h_1 + C \cdot q_v^2 = 5 + 968283 \times q_v^2.$$

- (2) Az így kapott egyenletet illesztve a szivattyú jelleggörbéjére, megkapjuk a rendszer munkapontját:



63. ábra: Szivattyú jelleggörbéje

A diagramról leolvasható, hogy a munkapont a $H=65$ m-es szállítómagasságnál és $q_v=0,0078$ m³/s térfogatáramnál van, ahol a hatásfok 88%, közel a 90%-os maximumhoz.

(3) A hatásfok figyelembe vételével, a szivattyúnak szükséges

$$H' = H/\eta = 65/0,88 = 73,9 \text{ m emelőmagasság.}$$

(4) A szivattyú által felvett teljesítmény: $P = \frac{\rho \cdot g \cdot q_v \cdot H}{\eta} = 5,6 \text{ kW}$

7.2.6. Az affinitás törvénye

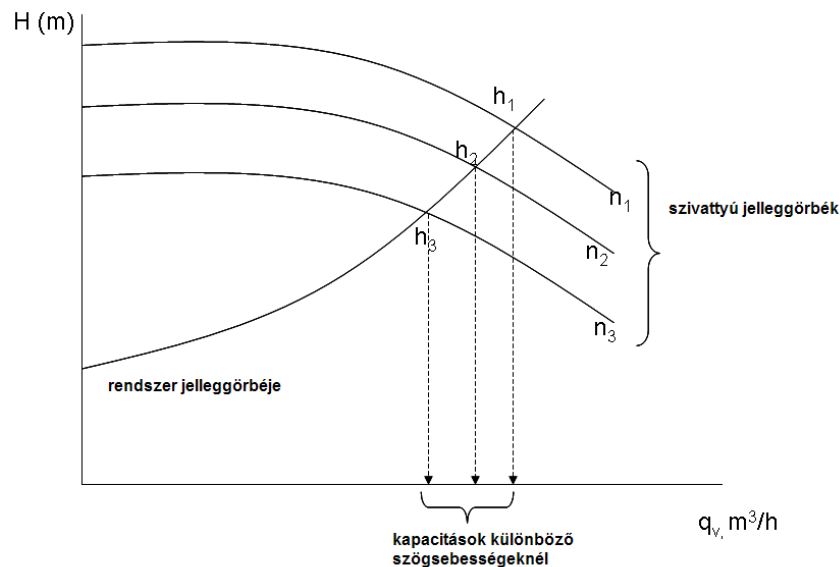
A különböző fordulatszámok működő szivattyúk jellemző paraméterei egymással megfeleltethetők a következő affinitási törvények alapján:

$$\frac{q_{v,1}}{q_{v,2}} = \frac{n_1}{n_2} \quad (4.9)$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2} \quad (4.10)$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{n_1^3}{n_2^3} \quad (4.11)$$

Az egyenletek alapján kiszámítható a fordulatszám változtatásának hatása a szivattyú jellemző paramétereire. Grafikusan ábrázolva a szivattyú az azonos hatásfokkal rendelkező pontokat az ún. kagylódiagramot kapjuk. A kagylódiagram segítségével könnyen meghatározható, hogyan alakulnak a jellemző paraméterek.



64. ábra: Kagylódiagramok

Feladatbank:

1. Az alábbi szivattyútípusok közül melyek nem tartoznak a térfogatkiszorításos szivattyúk közé?
 - a. membránszivattyú
 - b. örvényszivattyú
 - c. csavarszivattyú
 - d. vízszugárszivattyú
 - e. fogaskerekes szivattyú
 - f. perisztaltikus pumpa

Megoldás: b, d

2. Mely paraméterek határozzák meg egy szivattyú folyadéknak átadott teljesítményét?
 - a. q_v
 - b. p_g
 - c. ρ
 - d. g
 - e. d
 - f. H

Megoldás: a, c, d, f

3. A _____ felismerhető a jellegzetes hangról, ahogy a buborékok kialakulnak, majd összeroppannak a járókerék felszínén, ami hosszú távon a szerkezeti elemek károsodását, kopását okozhatja.

Megoldás: kavitáció

4. Az örvényszivattyúk esetében kialakításától függően beszélhetünk _____ és _____ átömlésű járókerékről. Az _____ járókerék esetében a folyadék áramlása a járókerék forgástengelyével egyező irányú, _____ járókerekekben arra merőleges.

Megoldás: axiális, radiális, axiális, radiális

5. A szivattyú jelleggörbéje a H-q_v diagramon
- emelkedő parabola
 - logaritmikus függvény
 - lefelé hajló görbék
 - origóból induló hatványfüggvény
 - negatív meredekségű egyenes

Megoldás: c

6. A megkívánt nettó pozitív szívómagasságot a következő képlet adja meg:

- $h_2 - h_1 + C \cdot q_v^2$
- $\frac{p_{atm}}{\rho g} - h_1 - h_{veszt} - \frac{p_g}{\rho g}$
- $\frac{p_s - p_g}{\rho \cdot g} + \frac{v_s^2}{2g}$
- $\frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g}$
- $\frac{\rho \cdot g \cdot q_v \cdot H}{\omega \cdot M}$

Megoldás: c

7. Egy örvényszivattyú a következő kondíciókkal üzemel:

$$q_v = 5 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$H = 10 \text{ m}$$

$$P = 2 \text{ kW}$$

$$n = 1750 \text{ rpm}$$

Számítsuk ki a szivattyú jellemző paramétereit, ha a szivattyú fordulatszáma 3500 rpm!

Megoldás:

A fordulatszámok aránya:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{1750}{3500} = 0,5$$

$$\frac{q_{v,1}}{q_{v,2}} = \frac{n_1}{n_2} \text{ alapján } q_{v,2} = 10 \text{ m}^3/\text{s}$$

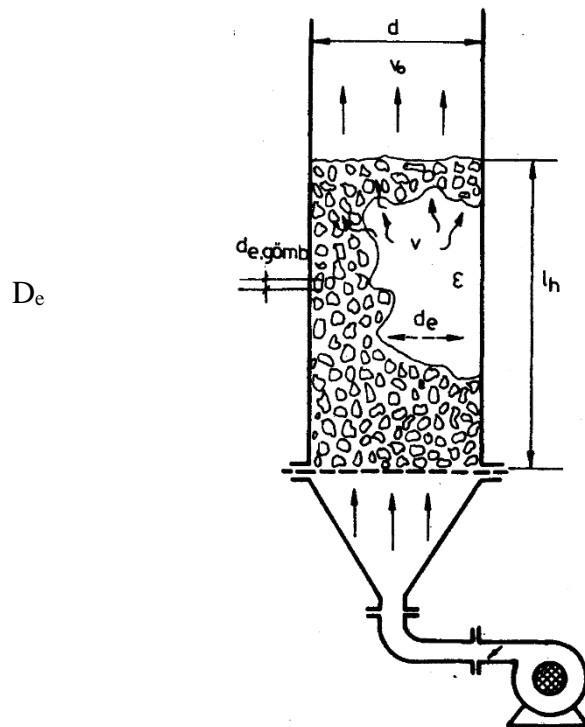
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2} \text{ alapján } h_2 = 40 \text{ m}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{n_1^3}{n_2^3} \text{ alapján } P_2 = 16 \text{ kW}$$

8. Áramlás töltött oszlopon

A gyakran találkozunk olyan készülékekkel, amelyben valamilyen töltet között folyadék vagy gáz áramlik. A töltött csövek, oszlopok feladata általában az, hogy növelje a fázisok érintkezési felületét pl. a szárítás, pörkölés, ioncsere vagy adszorpció során.

8.1. Áramlási ellenállás töltött oszlopon



65. ábra: A töltött cső és a töltet jellemzői

- L töltött szakasz hossza,
- L_0 redukált töltethossz,
- A az üres cső keresztmetszete,
- A_f a szemcsék fajlagos felülete,
- V a töltött cső térfogata = $A \cdot L$,
- V_t töltet térfogata,
- ϵ porozitás, relatív hézagterefogat ,
- d a töltött cső átmérője,
- D_e a töltött oszlop egyenértékű átmérője,
- d_e a szemcsék egyenértékű gömb-átmérője,
- v tényleges sebesség a töltet között,
- v_0 az üres oszlopra vonatkoztatott sebesség

A töltött oszlop egyenértékű átmérőjének számításakor tekintettel arra, hogy a járatok változó keresztmetszetűek, csak átlagos áramlási keresztmetszettel és nedvesített kerülettel számolhatunk. Így a levezetés mellőzésével:

$$D_e = \frac{4\varepsilon}{A_f} = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} d_e \quad (5.1)$$

Az áramlási Reynolds szám:

$$Re = \frac{D_e \cdot v \cdot \rho_2}{\eta_2} = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{d_e v \rho_2}{\eta_2} \quad (5.2)$$

ahol ρ_2 és η_2 az áramló fluidum (folyadék vagy levegő) sűrűsége és viszkozitása. A kontinuitás miatt $v = \frac{v_0}{\varepsilon}$, így

$$Re = \frac{2}{3} \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{d_e v_0 \rho_2}{\eta_2}, \quad (5.3)$$

amiből a fluidizációra jellemző módosított Re szám:

$$Re_m = \frac{d_e v_0 \rho_2}{\eta_2}. \quad (5.4)$$

A módosított Re szám már nem függ az oszlop méreteitől, csak a szemcsés halmaz tulajdonságaitól.

A töltött oszlop ellenállásának (Δp) számítására az áramlástanban kapott összefüggéssel analóg formula használható:

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D_e} \frac{v^2 \rho}{2} \quad (5.5)$$

ahol L a töltetréteg magassága, λ a súrlódási tényező.

A nyomásesés számítására vonatkozó egyenlet átalakítható az üres oszlopra vonatkozó lineáris sebesség (v_0), a szemcsék egyenértékű átmérője (d_e) valamint a redukált töltet hosszra (L_0) felírható összefüggés figyelembevételével.

$$L_0 = (1 - \varepsilon) L \quad (5.6)$$

$$\frac{\Delta p}{L_0} = \lambda \cdot \frac{3}{2} \frac{1}{\varepsilon^3} \frac{1}{d_e} \frac{v_0^2 \rho}{2} \quad (5.7)$$

Az egyenletből látható a nyomásesésnek a hézagterfogatól való nagymértékű függése.

A λ súrlódási tényező számítása tapasztalati képletek segítségével lehetséges. A lamináris-, átmeneti -, és turbulens tartományban is érvényes összefüggést Kast közöl:

$$\lambda = \frac{224}{Re} + \frac{9,1}{Re^{0,1}} \quad (5.8)$$

Blahman a Re szám különböző tartományaira adja meg a súrlódási tényező kifejezését:

$$\text{a } Re \leq 80 \text{ tartományban } \lambda = \frac{400}{Re^{0,85}}$$

$$\text{a } 80 \leq Re \leq 300 \text{ tartományban } \lambda = \frac{70}{Re^{0,45}}$$

$$\text{A } 300 \leq Re \text{ tartományban } \lambda = \frac{16,5}{Re^{0,12}}$$

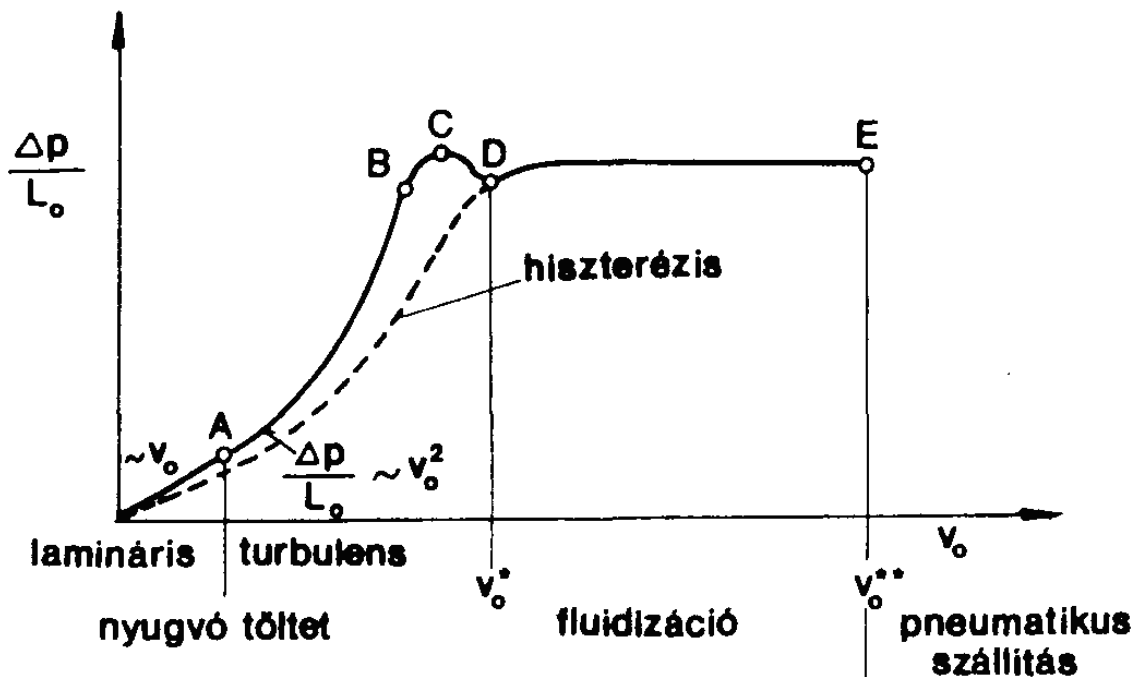
Zsavoronkov mérései szerint a lamináris tartomány $Re = 40$ értékig tart. Ebben a tartományban a súrlódási tényező értéke:

$$\lambda = \frac{400}{Re}$$

$$\text{A kritikusnál nagyobb } Re \text{ számoknál: } \lambda = \frac{16}{Re^{0,2}}.$$

8.2. Fluidizáció

Ha egy töltött csőben áramló fluidum üres oszlopra vonatkoztatott áramlási sebességét növeljük, és közben mérjük a töltet nyomásesését, akkor az alábbi görbét kapjuk:



66. ábra: Fluidizációs állapotok sebességfüggése

Ha egy gázáteresztő tálcán szemcsés szilárd anyagot helyezünk és azon fluidumot áramoltatunk keresztül, akkor, annak sebességétől függően négy jellegzetes állapot különböztethetünk meg.

Kis sebességű fluidum áramlás viszonylag csekély nyomásesést okoz. A szemcsék a helyükön maradnak és a fluidum a szilárd szemcsék közötti hézagokon keresztül áramlik. A sebesség növelésével a szemcsék megemelkednek, a töltet/ágy kezd kitágulni. Közben a nyomásesés növekszik.

Az áramlási sebesség kritikus értéke az, amikor a fluidum nyomásesése egyenlő a szemcsehalmaz archimedesi tömegével. Ekkor fluid állapot alakul ki. Az ágy már annyira kitágult, hogy a szemcsék szabadon elmozdulhatnak. A szemcsehalmaz úgy mozog, mint a viszkózus folyadékok. A fluidizáció bekövetkezésének határsebessége a minimális fluidizációs sebesség. Ilyenkor sűrű fázisú fluidizáció jön létre, amely stabil állapotba kerül, ha minden szemcse szabadon elmozdul, de a közegáram szemcséket még nem ragad magával.

Az áramló fluidum további sebességnövelése esetén az ágy erősen fellazul, egyes szemcsék kilépnek a halmazból és az ágy felett híg fázist alkotnak. Homogén sűrűségű anyag esetén a nagyobb szemcsék az alsó részben elhelyezkedő sűrűbb, a kisebbek a felső híg fázist alkotják, szétválásztás következik be. A sebesség növelését folytatva a réteg széthúzható és elérető, hogy a kisebb tömegű részecskék elhagyják a készüléket.

A sebesség további növelésével a felső határsebesség elérése után a gáz vagy folyadékáram az egész halmazt magával ragadja: pneumatikus vagy hidraulikus szállítás. Ebben az állapotban egyidejű szállítás mellett érintkeznek a szemcsék a fluidummal, a műveletek intenzifikálhatók (adszorpció, szárítás).

A nyomásesés számítására a különböző szakaszokban több empirikus és félempirikus összefüggés ismeretes, amelyek különböző kísérleti eredményeken alapulnak.

A töltött csövekben átáramló fluidum nyomásesése a töltött csövekre alkalmazott képlet értelmében először a sebességgel arányosan, majd nagyobb Re számnál a sebesség négyzetével nő (**66. ábra** A pont).

Ez az összefüggés felfelé irányuló fluidum áramban azonban csak addig érvényes, míg az így számított súrlódási nyomásesés el nem éri a töltetnek az 1 m^2 rácsfelületre eső archimedesi súlyát (B pont).

E pillanatban a részecskék megmozdulnak és kezdenek elrendeződni a legkisebb ellenállás irányában, fellazulnak. A sebesség növelésével az ellenállás tovább nő, de kisebb mértékben, sőt egy maximum. (C pont) után kissé csökken is, mivel az elrendeződés, fellazulás jobban csökkenti az ellenállást, mint ahogy a sebesség azt növeli.

A D pont után már a sebesség növelésére a részecskék elválnak egymástól és a fluidumban egyenként lebegnek, ez a pont a fluidizáció kezdő pontja.

További sebességnövelésre sem kezdődik el azonban pneumatikus szállítás, mint az első pillanatra hinnénk. Mivel ez a sebesség általános értékben nem éri el a részecskék ülepedési sebességét, hanem csak lokálisan, úgynevezett dugóhatás folytán mozdulnak meg a részecskék. Mivel a sebesség csak helyenként, (ahol az áramlási keresztmetszet a legszűkebb), éri el a részecske ülepedési sebességét és a részecske elmozdulása folytán - mivel az áramlási keresztmetszet megnő - meg is szűnik a nagy sebesség. Így ebben a sebességtartományban az egyes részecskék állandó mozgásban vannak, vertikálisan felfelé kimozdulnak, majd visszaesnek: a töltet forrásban van.

Fluidizált állapotban tehát a nyomásesés a hézagterefogat (ε) állandó növekedése miatt állandó mindaddig, amíg a fellazulás el nem éri azt a mértéket, melynél már az egyes részecskék oly távol vannak egymástól, hogy egymást nem befolyásolják és rájuk nézve már érvényes az egyedi test ülepedési végsebessége. E pillanatban megkezdődik a töltet pneumatikus szállítása (E pont).

Folyadékkal történő fluidizálás esetén a sebesség növekedésével a fellazulás és a részecskék turbulens mozgása folyamatosan halad. A folyadék és a részecskék együttes mozgása mintegy homogén fázist képez, ezért azt homogén fluidizálásnak nevezzük. Ez az állapot sokban hasonlít a gáz állapothoz: a részecskék olyan szabadon mozognak a homogén közegben, mint a gázmolekulák a gázfázisban. Homogén fluidizációt gázok alkalmazásakor ritkán lehet megvalósítani. Ilyenkor többnyire inhomogén fluidizációs réteg keletkezik.

A fluidizáció jelensége akkor kezdődik, amikor a töltet ellenállásából származó erő megegyezik a töltet archimédeszi súlyával, azaz egységnyi felületre vonatkoztatva a töltet nyomásesése egyenlő a rácsnyomással. Ezt használjuk fel a fluidizációs sebesség számítására.

A gyakorlatban a nyugvó ágy nyomásesésének számítására az ERGUN egyenlet alkalmas, ami a minimális fluidizációs sebesség eléréséig érvényes. A levezetés mellőzésével dimenzió nélküli alakban:

$$\frac{\Delta p}{\rho \cdot v_0^2} \frac{d_e}{L} \frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon} = 150 \cdot \frac{1-\varepsilon}{\text{Re}} + 1,75 \quad (5.9)$$

A helyettesítendő gázsebesség az ágy egész keretmetszetére vonatkoztatott áram. A fluidizáció minimális sebességét elméletileg abból a feltételből számíthatjuk, hogy a nyomóerő egyenlővé válik az ágy nehézségi erejével.

$$F = \Delta p \cdot A = mg = A \cdot L_0 \cdot (\rho_1 - \rho_2) \cdot g \quad (5.10)$$

A rácsnyomás:

$$\Delta p = (1-\varepsilon) L (\rho_1 - \rho_2) g = L_0 (\rho_1 - \rho_2) g \quad (5.11)$$

A nyomásesés és a rácsnyomás egyenlőségéből a módosított súrlódási tényező:

$$\frac{\Delta p}{L_0} = \lambda \cdot \frac{3}{2} \frac{1}{\varepsilon^3} \frac{1}{d_e} \frac{v_0^2 \rho_2}{2} = (\rho_1 - \rho_2) g =$$

$$\lambda_m = \frac{d_e \cdot (\rho_1 - \rho_2) g}{2 \cdot v_0^2 \rho_2} \quad (5.12)$$

Ha megszorozzuk λ_m -et a módosított Re szám négyzetével, akkor:

$$\lambda_m \text{Re}_m^2 = \frac{d^3 \cdot (\rho_1 - \rho_2) \rho_2 \cdot g}{2\eta^2} \quad (5.13)$$

Mivel a kifejezés nem tartalmazza a keresett v_0 sebességet, így a fluidum és a részecske fizikai és geometriai adatainak ismeretében az meghatározható. A meghatározott $\lambda_m \text{Re}_m^2$ -hez a $\lambda_m \text{Re}_m^2$ - Re diagramból (67) a nyugvó töltet ε értékének a fluidizáció kezdetéhez tartozó Re, a fluidizált halmaz porozitásához tartozó Re-szám, az $\varepsilon = 1$ értéknél pedig a kihordási sebességhez tartozó Re szám olvasható le. A megfelelő Re értékből a fluidizáció kezdeti sebessége, a fluidizációs áramlási sebesség és a kihordási sebesség is számítható.

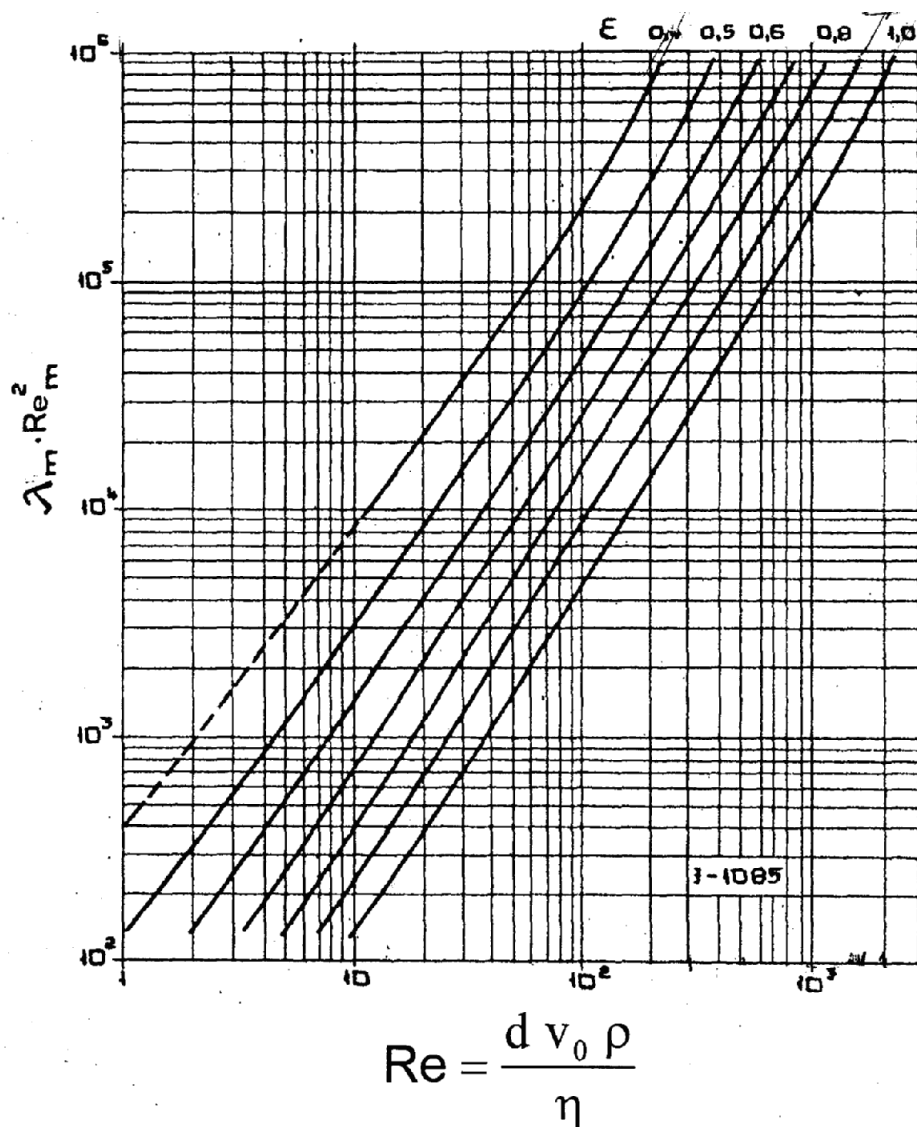
A fluidizációs eljárások előnyei és hátrányai az alábbiakban foglalhatók össze:

A fluidizáció előnyei:

1. Az esetek többségében a berendezések egyszerűek, a készülékben nincsenek mozgó alkatrészek, a készülék beruházási költsége kicsi. A berendezés jól műszerezhető, automatizálható.
2. Az egyébként szakaszos üzemű technológiák a fluidizációs eljárás segítségével gyakran folytonossá tehetők.
3. A fluidizált ágyban a hatékony keveredés következtében a hőmérséklet és a szilárd anyag elosztása sokkal egyenletesebb, mint az álló ágyban. Jobb a hőátadási tényező.

A fluidizáció hátrányai:

1. Az egyágyas fluidizációs reaktorban a fluidum és a szilárd anyag áramlása egyenáramú. Ez rendszerint kedvezőtlenül befolyásolja a folyamat hajtóerejét.
2. A fluidizáció során a készülékben komoly erózió léphet fel.
3. A szilárd anyag porzása miatt a kilépő gázt portalanítani kell.
4. A megfelelő gázsebesség biztosításához szükséges ventilációs költség nagyobb, mint más típusú reaktorok esetén.



67. ábra: Fluidizációs ellenállás meghatározása

Példa:

1. 15 cm átmérőjű oszlopban 4,4 mm átmérőjű 1600 kg/m³ sűrűségű részecskéket kell fluidizálni 1000 kg/m³ sűrűségű vizes oldattal.

Számítsuk ki a kihordási sebességet és a minimális fluidizációs sebesség mellett a nyomásesést. A szemcsék gömb alakúak, a hézagterefogat $\varepsilon = 0,4$. A minimális fluidizációs sebesség mérések szerint:

$v_o = 2,71 \cdot 10^{-2}$ m/s. A víz viszkozitása 10^{-3} Pas.

Az ülepedési (kihordási) sebesség:

$$\lambda_m \text{Re}_m^2 = \frac{d^3 \cdot \rho_2 (\rho_1 - \rho_2) \cdot g}{2 \eta_2^2} = \frac{(4,4)^3 \cdot 10^{-9} \cdot 6 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 10}{2 \cdot 10^{-6}} = 2,56 \cdot 10^5$$

diagramból $\text{Re}_m = 1,2 \cdot 10^3$

$$v = \frac{\text{Re}_m \eta_2}{d \rho_2} = \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}{4,4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3} = 2,71 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}$$

$$\frac{v}{v_o} = 10$$

A rácsnyomás 1 m magas tömörített töltetre vonatkoztatva:

$$\frac{\Delta p}{L_o} = (\rho_1 - \rho_2) \cdot g = 6 \cdot 10^2 \cdot 10 = 6 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

A nyomásesés ugyancsak 1 m magas tömörített töltetre vonatkoztatva:

$$\lambda_m = \frac{\lambda_m \text{Re}_m^2}{\text{Re}_m^2} = \frac{2,56 \cdot 10^5}{1,44 \cdot 10^4} = 17,8$$

$$\frac{\Delta p}{L_o} = 4 \lambda_m \frac{1}{d} \frac{v_o^2}{2} \rho_2 = 4 \cdot 17,8 \cdot \frac{1}{4,4 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{2,71^2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3}{2} = 6 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

2. Egy pneumatikus szárító berendezésben 100 °C-os levegővel szállítás közben szárítjuk meg a 2 mm átmérőjű 3000 kg/m³ sűrűségű, közel gömb alakú szemcséket.

Milyen térfogatáramú levegőre van szükség, ha a szemcsék betáplálása előtt az üres oszlop átmérője 200 mm és a szállítási sebesség 20 %-al nagyobb, mint a kihordási. A 100 °C-os levegő sűrűsége 0,947 kg/m³ viszkozitása $2,2 \cdot 10^{-5}$ Pas.

$$\lambda_m \text{Re}_m^2 = \frac{d^3 \cdot \rho_2 (\rho_1 - \rho_2) \cdot g}{2 \eta_2^2} = \frac{8 \cdot 10^{-9} \cdot 9,81 \cdot 0,947 \cdot 3000}{2 \cdot 2,2^2 \cdot 10^{-10}}$$

$$\lambda_m \text{Re}_m^2 = 2,32 \cdot 10^5$$

$$\text{Re}_m = 1020 \quad (\varepsilon = 1)$$

$$v = \frac{1020 \cdot 2,2 \cdot 10^{-5}}{0,947 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 11,8 \text{ m/s}$$

$$v_{\text{szállítás}} = 11,8 \cdot 1,2 = 14,2 \text{ m/s}$$

$$q_v = v \cdot A = 14,2 \cdot \frac{4,10^{-2} \cdot \pi}{4} \cdot 3,6 \cdot 10^3 \text{ m}^3 / \text{h}$$

$$q_v = 1600 \text{ m}^3 / \text{h}$$

8.3. Pneumatikus szállítás

Ha vertikálisan felfelé áramló levegőáramba szilárd részeket adagolunk és a levegő áramlási sebessége nagyobb a részecskék ülepedési sebességénél, akkor a levegőáram magával ragadja a részecskéket.

Szállítási sebesség:

$$V_{száll} = V_{lev} - v_{ü}$$

$$V_{lev} = (1,2 - 2) v_{ü}$$

A pneumatikus szállítás horizontális csővezetékben is végbemegy kellő nagy levegősebességnél: különböző hatások, így pl. a turbulensen áramló levegő gomolygása, a falról való visszaverődés, az áramlás "vitorlázó" hatása - megakadályozzák a részecskék kiülepedését.

Pneumatikus szállítást alkalmazunk darabos, kristályos anyagok, gabona magvak, növényi nyersanyagok szállításánál.

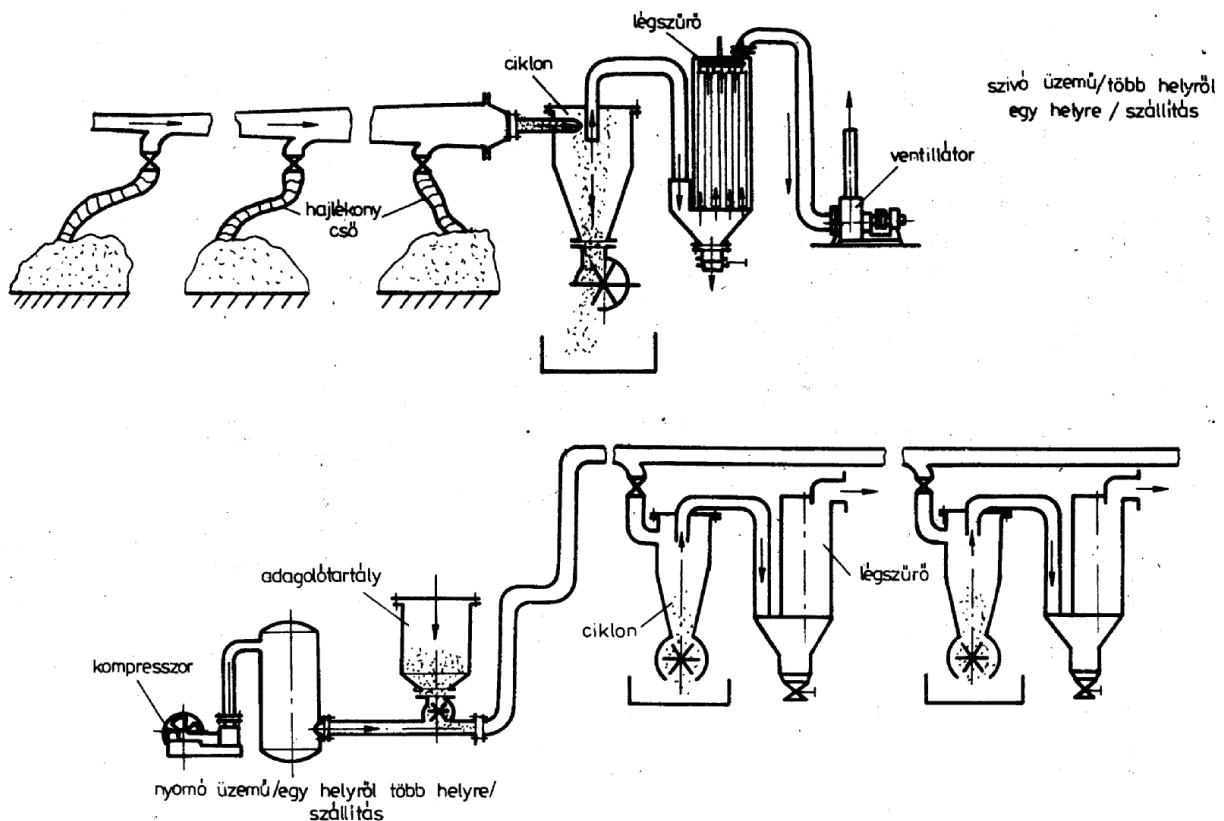
Két típusa:

Vákuumos pneumatikus szállítás

"több helyről egy helyre".

Kompresszoros pneumatikus szállítás

"egy helyről több helyre".



68. ábra: A pneumatikus szállítás típusai

8.4. Töltött oszlopok, mint reaktorok

A töltött oszlop (torony) széles körben alkalmazott berendezés gáz folyadékban történő elnyeletéséhez, vagy nem oldott gázok folyadékból történő eltávolításához, esetleg néha desztillációhoz. Átmérőjük néhány méter, magasságuk 20-30 m. A berendezés fő része a töltettel megtöltött függőleges henger. A töltet szerepét egy kisméretű, szabályos alakú, korrózióknak ellenálló részecske (porcelán, szén, fém, műanyag) tölti be. A feltöltött térben jelentős az üres tér ami a tölteten történő (gáz) átáramlást segíti, és a töltet felszínén nagy fajlagos felület kialakítása válik lehetővé. Az elnyelető folyadék felülről csorog le a töltet felületén kialakítva egy folyadékfilmet, melynek igen nagy fajlagos felületén rendkívül nagy területen játszódhat le az abszorpció. A gázt alulról vezetik be és fent távozik a berendezésből az elnyelt gázkomponens pedig alul, a folyadékban oldódva. A töltött oszlopok alkalmazásának klasszikus példája a CO₂ gáz kiválasztása az égési gázokból mésztej segítségével.

A töltött oszlopokat két fő csoportba osztjuk, melyek: a): ömlesztett vagy rendezetlen töltetes és b): rendezett töltetes oszlopok.

A gyakorlatban, ha abszorpciós kolonnák használatára kerül sor (pl. gázmosó), akkor azok leginkább rendezetlen, kerámiatöltetes oszlopok.

A rendezetlen töltetek legrégebb megoldása a koksszal töltött oszlop, ahol a kokszt biztosította az anyagátadáshoz szükséges felületet. Ezután használtak többnyire kerámiából készült golyókat ill. gyűrűket. A kerámia mint szerkezeti anyag elsősorban a korrozív gázok-gőzökkel való munka miatt volt szükséges. A töltelékek ömlesztett halmazt képeznek a kolonnában, és szabványosításuk után a hő és anyagátadási együtthatók számításokhoz szükséges paraméterek ismertek, esetleges tervezéshez felhasználhatók.

Fontos változást jelentett a töltött oszlopok működésében és ez által használatában, a rendezett töltetek megjelenése. Ezek az új töltéttípusok fém, kerámia és műanyag töltelékek. Többnyire vékony, szitaszerű lemezek speciális hajtogatásával készülnek. Készülhetnek vékony lemezből is.

Jellemző tulajdonságuk a

- rendkívül kicsiny nyomásesés, mely a kolonnák működtetésénél több szempontból is kívánatos (pl. kisebb forráshőmérséklet-emelkedés az oszlop aljában, kisebb gázkompressziós munka abszorberek esetében),
- kicsiny „hold up” vagyis folyadékviisszatartás,
- nagyon jó elválasztó képesség,
- kiemelkedően magas rugalmas működés
- nagy kapacitás.

8.5. Töltött ágyas oszlopok

A töltött ágyas oszlopokban szilárd –fluidom reakciók játszódhatnak le. Az oszlop töltete a transzportfolyamat szilárd komponensét alkotja, felületén játszódik le az anyagátadás. Reaktorok esetében gyakran alkalmazzák ezt a megoldást, valamint adszorpciós oszlopoknál, kromatográfiás oszlopoknál egyaránt.

A töltött ágyas reaktorok henger alakú, többnyire függőleges reaktorok, amelyekben a töltet részecskéi tartalmazzák a katalizátort ill. az enzimeket. A reakció a szubsztrát/ragenseket tartalmazó folyadéknak a részecskék közötti térben történő átáramlása közben játszódik le. Amikor a töltet immobilizált sejteket v. enzimeket tartalmaz, töltött ágyas bioreaktorokról beszélünk.

Egy egyszerű, Michaelis-Menten típusú bioreakciót feltételezve, és a részecskék belsejébe ill. azokból kifelé irányuló anyagtranszportot ha,tását (ellenállását) lehangyagolva az egységnyi töltetmagasságra és áramlási keresztmetszetre vonatkoztatott reakciósebesség értéke az alábbi összefüggéssel számítható ki:

$$v \frac{dc_A}{dz} = -v_{\max} \frac{c_A}{K_m + c_A} \quad (5.14)$$

Ahol v a fluidum látszólagos (teljes keresztmetszetre vonatkoztatott) áramlási sebessége, c_A a reagens koncentrációja, K_m a Michaelis-Menten állandó, v_{\max} a maximális enzimreakció sebesség.

A megkívánt töltetmagasság az előző egyenlet integrálásával nyerhető:

$$z = v \left(\frac{K_m}{v_{\max}} \ln \left(\frac{c_{Aai}}{c_{Aaf}} \right) + \frac{c_{Aai} - c_{Aaf}}{v_{\max}} \right) \quad (5.15)$$

Ahol c_{Aai} és c_{Aaf} a reagens külső és belső oldali koncentrációja. A

A reakció idő az alábbi képlettel számítható:

$$\tau = \frac{z}{v} \quad (5.16)$$

Melynek meg kell, hogy egyezzen a szakaszos üzemű és a dugó reaktorok reakció idejével. Amennyiben az anyagtranszport ellenállás nem hanyagolható el, úgy nagyobb töltetmagasságra van szükség.

Kérdések és feladatok

- Hogyan határozható meg az oszlopellenállás?
- Jellemezze az egyes fluidizációs állapotokat!
- Irja le a fluidizált állapot változásait, adja meg azok okát és következményeit.!
- Mi a gyakorlati jelentősége a $\lambda_m Re_m^2 - Re$ diagramnak.
- Töltött ágyas oszlopreaktorok töltetmagasságának meghatározása milyen paraméterek ismeretében történhet?
- Egy pneumatikus szállítóberendezés felszálló csővezetékében 60 °C-os levegővel 2000 kg/m³ sűrűségű sókristályokat akarunk szállítani, a legnagyobb kristályok átmérője 3 mm. A 60 °C-os levegő sűrűsége 1,056 kg/m³, viszkozitása $2 \cdot 10^{-5}$ Pas. Milyen sebességgel kell a levegőt átáramoltatni, ha elő van írva, hogy a szállítási sebesség 25 %-al nagyobb, mint az ülepedési sebesség?
- Árpagyöngyöt szárítunk levegővel fluidizációs szárítóban. Kiszámítandó a kezdeti fluidizációs sebesség és a rácsnyomás! Adatok: szemeseátmérő $d = 2 \text{ mm} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $\rho_1 = 1150 \text{ kg/m}^3$ Levegő adatai; $\rho_2 = 1,061 \text{ kg/m}^3$; $\varepsilon = 0,4$ m³/m³; $\eta_2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pas}$.

$$v_{sz} = 15,8 \text{ m/s}$$

$$v_o = 0,66 \text{ m/s}; \frac{\Delta p}{L_o} = 1,13 \cdot 10^4 \text{ Pa/m}$$

9. Szűrés

A szűrés olyan áramlástan művelet, amely során egy szűrőközeggel, porózus közeggel fluidumban (folyadék vagy gáz közegben) elosztatott szilárd részecskéket tartalmazó heterogén diszperz rendszerek szétválasztását végezzük. A mechanikai szétválasztó művelet hajtóereje a szűrőközeg két oldala közötti nyomáskülönbség, amelyet létrehozhatunk: gravitációs erővel, vákuummal (a szűrőréteg kilépő oldalán nyomáscsökkentéssel létrehozva), nyomással (a szűrőréteg belépő oldalán túlnyomást alkalmazva) vagy centrifugális erővel.

9.1. Szűrőközegek

Szűrőközegeknek (, ami a szűrőberendezésben van elhelyezve) nevezzük összefoglaló néven azokat az anyagokat, amelyek a rajtuk keresztül átáramló fluidumokból leválasztják a pórusméretüknél nagyobb (néhány esetben a kisebbeket is) méretű részecskéket. A szűrőközeg kiválasztása egy nagyon fontos szempont a szűrő megfelelő működéséhez, és ez lényegében a hordozója a lerakódó anyagoknak, amelyen a tényleges elválasztási művelet végbemegy.

A leggyakrabban alkalmazott szűrőközegek:

- Rácsok: fémrudak párhuzamosan elrendezve szűrőréses rácsot alkotnak. Lyukasított lemezek és dróthálók durva szűrésre (0,5 mm-nél nagyobb szilárd szemcsék visszatartására) használhatók. A rácsokat és rostákat leggyakrabban más szűrőközegek alátámasztására használják.
- Szemcsés anyagok: laza halmazát, kavics, homok vagy zeolit is használható szűrőközeggént, többnyire víz-, szennyvíztisztítások esetében.
- Szűrőszövetek: fémzáladból, természetes textilszáladból, üvegből, ill. műszáladból szövással előállított szűrőszövetek általánosan használt szűrőközegek a vegyiparban. A szövésforma erősen befolyásolja a szűrési tulajdonságokat is: pl. vászonszövés: rossz folyadékáteresztő, nagy eltömődési hajlam, sávolykötés: közepes áteresztő, közepes szemcsefogó, atlaszkötés: jó áteresztő, kicsi eltömődési hajlam.
- Szűrőpapírok: cellulóz ill. azbeszt száladból prést, rendezetlen szálad halmaz. Finom, ill. csírátlantító szűrésre használják fel őket, 50 µm-nél kisebb részecskék kiszűrésére.
- Szűrőlapok: előnyük, hogy tetszés szerinti pórusokkal készíthetők. Előállításuk vagy szemcsék anyagokból égetéssel, vagy kötőanyaggal nagy nyomáson összepréselve.
- Porózus testek: műkövek, kerámiák, fémporból szinterezett testek, pórusos műanyagok.
- Membránok: természetes vagy műanyagokból, öntéssel, húzással, elemi részecskék bombázásával előállított szűrőközegek. Kerámiából, fémekből, szénszáladból is készítenek ma már szűrőmembránokat.

A szűrőréteg készülhet vastag, szemcsés vagy szálad anyagból (pl. homokágyas szűrők), de vékony összefüggő porózus anyagból is (pl. zsákos porszűrők).

9.2. Szűrési mechanizmusok

A folyadékokban lebegő szilárd részecskék szűrése elvben három különféle mechanizmus alapján történhet a szűrőréteg minőségétől függően: a mélységi szűrés, a felületi szűrés, illetve az iszaplepeny szűrés mechanizmusa szerint.

9.2.1. Mélységi szűrés

A kapillárisoknál kisebb méretű részecskék az iránytörés, ill. a csatorna keresztmetszet változásának hatására válnak le a kapillárisok járataiban. A felületen csak jelentéktelen lepény képződik. Az igen finom szemcsék leválasztásakor adszorptív megkötés, visszatartás, valamint a kapilláris-erők jutnak szerephez. Mivel ezek a felületi kötőerők képesek a pórusokba került szilárd anyagot megkötni, adhézióknak is nevezzük a folyamatot. A gyakorlatban ilyen mechanizmus szerint működnek pl. a vízkezelésben alkalmazott homokszűrők, amelyek homokrétegen szűrik át a tisztítandó vizet, vagy a parti szűrésű kutak, amelyek a folyók mederágyán átszűrt vizet szolgáltatják. A mélységi szűrésnél gyakran alkalmaznak laza, szemcsés rétegű szűrőberendezéseket, ahol a szűrőréteg kvarchomok, zúzott mészkő, faszén vagy koksza a kezelendő oldatok kémhatásától vagy szennyezettségétől függően.

9.2.2. Felületi szűrés

Ha a szűrőréteg pórusai kisebbek, mint a leválasztandó részecskék mérete, a leválasztott részecskék elfedik a kapillárisok bejáratát. Ha a felület megtelt, valamennyi kapilláris nyílás eltömődött a szűrési folyamat leáll.

A mélységi szűrés a szűrési művelet előrehaladtával felületi szűréssé változik, mert a pórusok mérete a megkötődések miatt folyamatosan csökken.

9.2.3. Iszaplepény szűrés

A szűrőközeg kapillárisának átmérője kisebb, mint a leválasztásra váró szemcse átmérője, tehát a szitahatás érvényesül. A szűrőfelületen a szilárd anyagból mérhető vastagságú lepény képződik és továbbiakban szűrőréteggül szolgál, ezért ezt a szűrési mechanizmust lepényszűrésnek nevezzük. A lerakódó lepényszerkezet gyakran nyomásfüggő, azaz porozitása csökken a nyomással, összenyomható (pl. a borseprő). Az élelmiszeripari eljárások során leggyakrabban ez a szűrési mechanizmus fordul elő.

Szűrési segédanyagok

Összenyomható iszapot eredményező anyagok szűrésénél, ill. a kisebb részecskék leválasztása érdekében gyakran alkalmazunk szűrési segédanyagokat. Ezek segítségével a szűrési teljesítményt növelni lehet. Ilyenek például a

- kovaföld: elhalt kovamoszatok lerakódásai. Legkedvezőbb a tű alakú maradványok, ezek adják a legjobb szűrési eredményeket.
- perlit: vulkanikus jellegű kőzetek, amelyek szűrőanyaggá történő átalakítása igen precíz hőkezelést igényel.
- cellulózrostos pépek
- diatomaföld: diatomák vázának maradéka, amit a nyers diatomaföld tisztításával állítják elő.

A segédanyagok vagy a szűrés előtt alakítanak ki a szűrőfelületen egy elő-iszapréteget, melynek igen jók a szűrési tulajdonságai, vagy a szuszpenzióba keverik be őket, és együtt szűrik az alapanyaggal. A gyakorlatban a segédanyagokat kis mennyiségben adagolják, és a költségük kisebb, mint a szűrési határfokából adódó többlet. Gyakran többször használhatóak, mert moshatóak és regenerálhatóak.

9.3. Szűrőegyenletek

A szűrők jellemző paramétere a szűrési sebesség, ami azt mutatja meg, hogy a szűrő egységnyi felületén egységnyi idő alatt mekkora szűrletmennyiség (térfogatáramsűrűség) halad át.

$$v = \frac{1}{A} \frac{dV}{d\tau} \quad (6.1)$$

A térfogatáram pedig OHM törvénye alapján:

$$\text{átÁRAMló szűrlet} = \frac{\text{hajtóerő}}{\text{ellenállás}} \quad (6.2)$$

Mivel a szűrés a közegek kapillárisaiban játszódik le, így a kapillárisokban történő áramlásra a Hagen - Poiseuille egyenlet érvényes:

$$q_v = \frac{\pi \Delta p}{8 \eta l} r^4 = \frac{dV}{d\tau} = \frac{\Delta p A}{R \eta} \quad (6.3)$$

Az R ellenállás két részből tevődik össze:

- az iszaplepeny ellenállásából R_i : az iszaplepeny ellenállása egyenesen arányos a szűrlettérfogattal (V [m^3]) és fordítottan arányos a szűrőfelület nagyságával (A [m^2]). Az arányossági tényező a szürendő anyagra jellemző fajlagos lepenyellenállás (r , [m^2/kg]) és a szürendő szuszpenzió koncentrációja (c , [kg/m^3]).
- a szűrőközeg ellenállásából R_M : a szűrőközeg ellenállás értékét célszerű az iszaplepenyhez hasonló összefüggés segítségével meghatározni. Ehhez vezessük be az egyenértékű szűrlettérfogat fogalmát, ami annak a képzeletbeli szűrletnek a mennyisége, amelynek a szűrőfelületen történő átáramlása során kiülepedő iszaplepeny ellenállása megegyezik a szűrőközeg ellenállásával.

$$R_i = \frac{rc \cdot V}{A} \quad (6.4)$$

$$R_M = \frac{rc \cdot V'}{A}$$

Ahol rc a lepenyellenállás [$1/m^2$], V' pedig az egyenértékű szűrlettérfogat [m^3].

Ezen értékeket az eredeti egyenletünkbe visszahelyettesítve:

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{\Delta p A}{\eta \left(rc \frac{V}{A} + rc \frac{V'}{A} \right)} \quad (6.5)$$

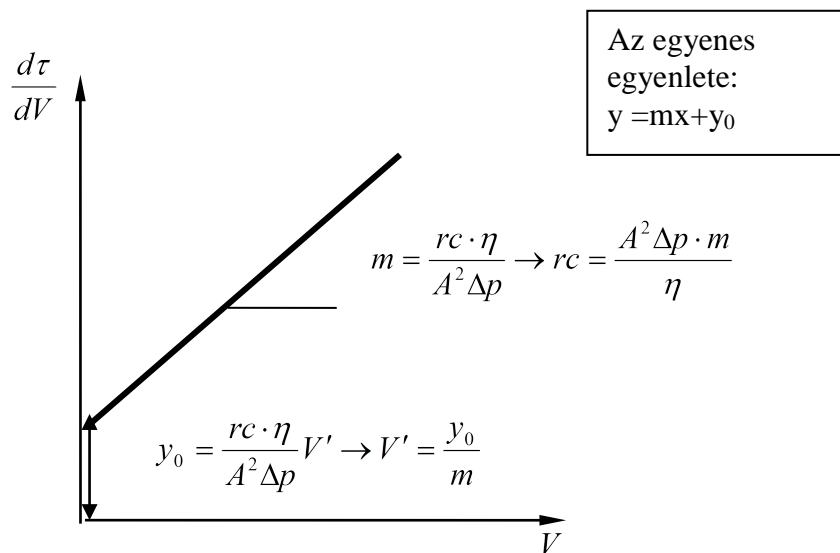
majd a reciprok értéket képezve:

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{\Delta p A^2}{\eta rc(V + V')} \quad (6.6)$$

egyenes egyenletéhez, a Darcy-féle szűrőegyenlethez jutunk:

$$\frac{d\tau}{dV} = \frac{\eta rc}{\Delta p A^2} V + \frac{\eta rc}{\Delta p A^2} V' \quad (6.7)$$

Az egyenlet egy félempirikus egyenlet, amely tartalmaz olyan állandókat, amelyek az anyagra jellemzőek, ilyen például az rc lépényellenállás, illetve V' egyenértékű szűrletterfogat. Ahhoz, hogy ezen állandók értékét az adott anyagra megállapíthassuk, méréseket kell végeznünk. Mivel a Darcy-féle szűrőegyenlet egy egyenes egyenlete, a mérési eredményeket ábrázolva, az egyenes tengelymetszetéből (y_0) és meredekségéből (m) a félempirikus állandók meghatározhatók.



69. ábra: Szűrési állandók meghatározása

Amennyiben azt szeretnénk meghatározni, hogy adott mennyiségű anyag szűréséhez mennyi időre van szükség, vagy éppen, hogy adott idő alatt mennyi anyagot szűrhetünk le, meg kell oldanunk a fenti differenciálegyenletet:

$$d\tau = \left(\frac{\eta rc}{\Delta p A^2} V + \frac{\eta rc}{\Delta p A^2} V' \right) dV \quad (6.8)$$

Integrálva:

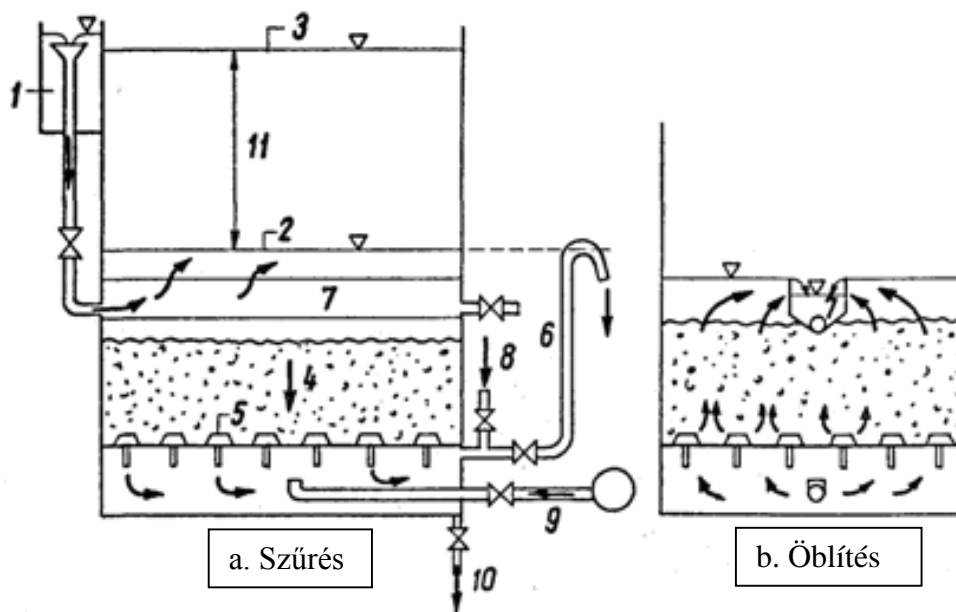
$$\int_0^{\tau} d\tau = \int_0^V \left(\frac{\eta rc}{\Delta p A^2} V \right) dV + \int_0^V \left(\frac{\eta rc}{\Delta p A^2} V' \right) dV = \frac{\eta rc}{\Delta p A^2} \int_0^V V dV + \frac{\eta rc}{\Delta p A^2} V' \int_0^V 1 dV \quad (6.9)$$

$$[\tau]_0^{\tau} = \frac{\eta rc}{\Delta p A^2} \left[\frac{V^2}{2} \right]_0^V + \frac{\eta rc}{\Delta p A^2} V' [V]_0^V \quad (6.10)$$

$$\tau = \frac{\eta rc}{2\Delta p A^2} V^2 + \frac{\eta rc}{\Delta p A^2} V V' \quad (6.11)$$

9.4. Mélységi szűrés

Az ivóvíz-előkészítés (pl. parti szűrésű víz), illetve a kolloid méretű szennyezőanyagokat tartalmazó szennyvizek tisztítása során alkalmazható a **mélységi szűrés**. A parti szűrésű vizek esetében talajon, vagy homokrétegen szűrik át a vizet, de alkalmazhatók ún. mélységi szűrők (homokszűrők), amelyek apró szemcsés anyaggal töltött oszlopok.



70. ábra: Nyitott homokszűrő működési elve. 1-vízelosztó csatorna; 2-tiszta szűrő feletti minimális vízszint; 3-eltömődött szűrő feletti maximális vízszint; 4- szűrőréteg; 5-szűrőgyertya; 6-szűrvtíz-állványcső; 7-öblítőzagy elvezető vályú (vízelosztó vályú öblítéskor); 8-öblítővíz; 9-öblítőlevegő; 10-leürítés; 11-rendelkezésre álló nyomásvesztés

Jellemző tulajdonságuk, hogy a szűrőközeg részecskéi között kialakuló csatornák átmérője általában meghaladja a vízből eltávolítandó lebegő és kolloidális szennyezés méretét. A töltet legtöbbször több rétegű, melyben felülről lefelé haladva csökkenő nagyságú és növekvő sűrűségű szűrőrétegek helyezkednek el. Alulról táplált oszlop esetén fordított a sorrend. A töltőanyag lehet antracit, homok, közúzalék, kavics stb. A részecske megkötődése a szűrőágyon két fázisra bontható:

1. a részecsketranszport a megkötődés helyéhez,
2. a szűrőanyag és a részecske közötti kötőerők létrejötte.

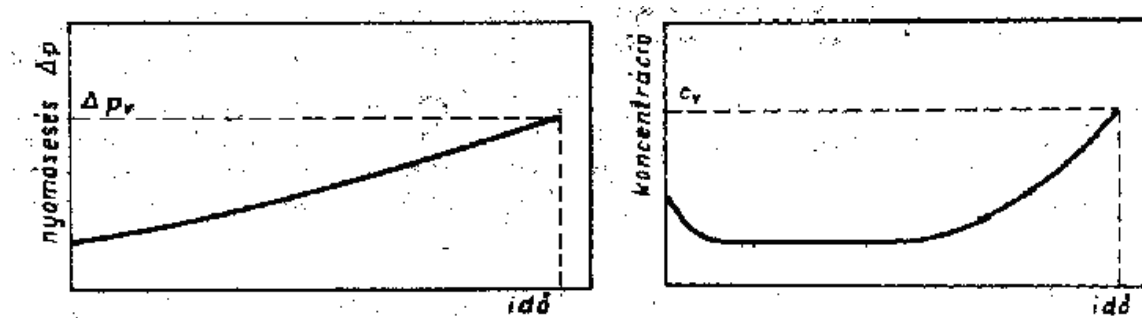
A transzportfolyamat létrejöhet

- közvetlen ütközés
- tehetetlenségi ütközés (csak nagyobb közegsebesség és laza ágy esetén)
- ülepedés
- diffúzió (csak a legkisebb részecskék).

A megkötődést befolyásoló tényezők

- van der Waals-erők
- elektromos kettős réteg kölcsönhatások
- hidrogénhíd-kötések.

A kolloidok szűrésénél a legjelentősebb szerepe az elektromos kettős réteg hatásának van. A szűrők üzemét jellemző két legfontosabb paraméter az eltömődés következtében fellépő hidraulikai nyomásesés (Δp) és az elfolyó víz koncentrációja (c). Mindkettő erősen időfüggő (71. ábra).



71. ábra: A nyomávesztés és a koncentráció változása mélységi szűrőkor

Ahogy az ábrán is látható, a mélységi szűrés csak periodikusan, regeneráló fázisok beiktatásával, megszakított üzemben valósítható meg. Az egyes szűrési szakaszok végét két feltétel határozza meg:

1. A közel lineárisan emelkedő nyomávesztés megengedhető határértéke (Δp_v).
2. Az áttörési szakaszon mérhető végső szűrletkoncentráció elérése (c_v).

A legegyszerűbb üzemvitelben a két paraméter adott idő elteltével beálló értékeit tekintjük optimumnak tisztítási és üzemviteli szempontból is. Megjegyzendő, hogy ez nem feltétlenül azonos a gazdaságilag legkedvezőbb paraméterekkel, azonban a szennyvíztisztítás során a szűrést megelőző és döntő jelentőségű művelet a víz vegyszeres előkezelése, (koagulálás, flokkulálás), illetve ennek optimalizálása. Ez egyszerűen megoldható az ún. szűrési (vagy szűrhetőségi) index mérésével.

Egy szuszpenzió akkor jól szűrhető, ha gyorsan áthalad a porózus közegen, miközben a szűrőközegen csak kismértékű eltömődést okoz. A közeg eltömődése a permeabilitás (áteresztőképesség) csökkenésében mutatkozik meg, ekkor nő a nyomávesztés, (Δp).

Abban az esetben, ha a szűrőágy állandó minőségű és burkolóméretű, a szűrési index a következő képlettel határozható meg:

$$F = \frac{c}{c_0} \frac{\Delta p}{v \tau}, \quad (6.12)$$

ahol c/c_0 arányszám, amely bármilyen, a szuszpenzió minőségét jelző mennyiségre vonatkozhat, (pl. zavarosság, vastartalom, kóliszám stb.), c a szűrlet, c_0 pedig a kiindulási szuszpenzióra jellemző mennyiség, v a lineáris áramlási sebesség (cm/s), Δp a szűrési nyomávesztés (vízoszlop cm-ben kifejezve), τ a szűrési idő. A kifejezés nevezője felfogható a bemenő paraméterek függvényének, a számláló pedig a „rendszer válasza” az előbbire.

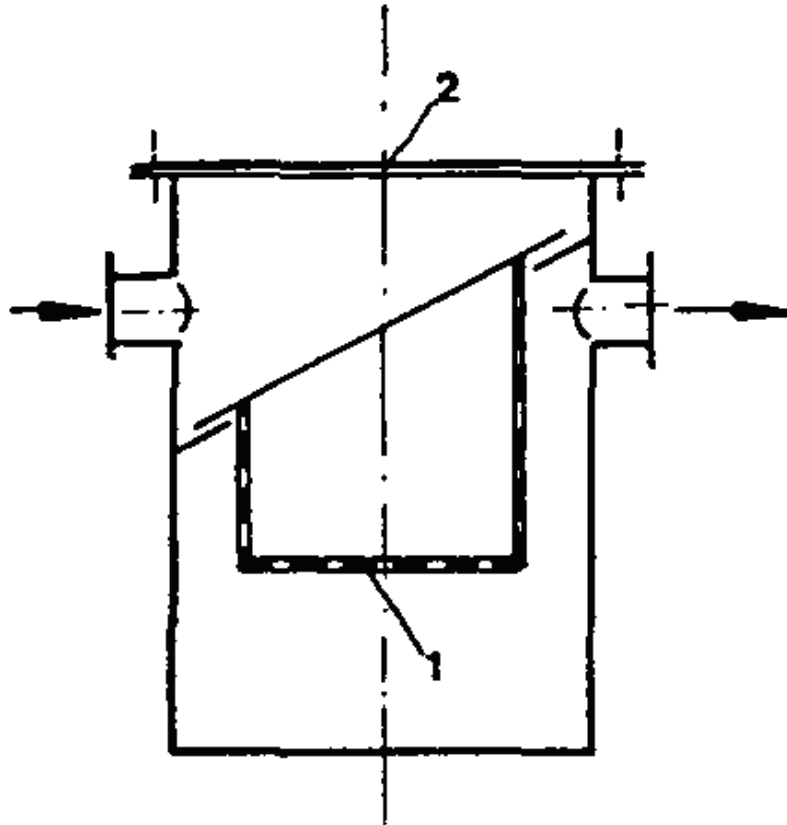
A szűrhetőség jó, ha a szűrési index kicsi, kicsi a nyomávesztés (a szűrő ellenállása (eltömődöttsége)), kicsi a szűrlet koncentrációja, és nagy a térfogatáram.

9.5. Szűrőberendezések

A szűrőberendezések kialakításánál figyelembe kell venni a szűrőközeg korrozív tulajdonságait, a szűrősnél alkalmazott hajtóerő mértékét, a szűrőréteg elhelyezését, a lepény eltávolítását és a berendezés teljesítőképességét. Az utóbbi arányos a szűrőfelület nagyságával, ezért a gyakorlatban nagy fajlagos felületű szűrőelemeket párhuzamosan kapcsolják össze.

9.5.1. Szerelvényiszűrők

Szitakosaras szűrő: szelepházhoz hasonló kialakítású edényben elhelyezett kiemelhető szűrőkosár. Ennek belső terébe lép be a szennyezett folyadék. A lerakódás a kosár belsejében képződik. Eltömődés esetén a kosár a vezetékből kiemelhető és megtisztítható. Biztonsági szűrésre szolgál, érzékeny készülékek védelmére a csőbe futó véletlen szennyeződések ellen.



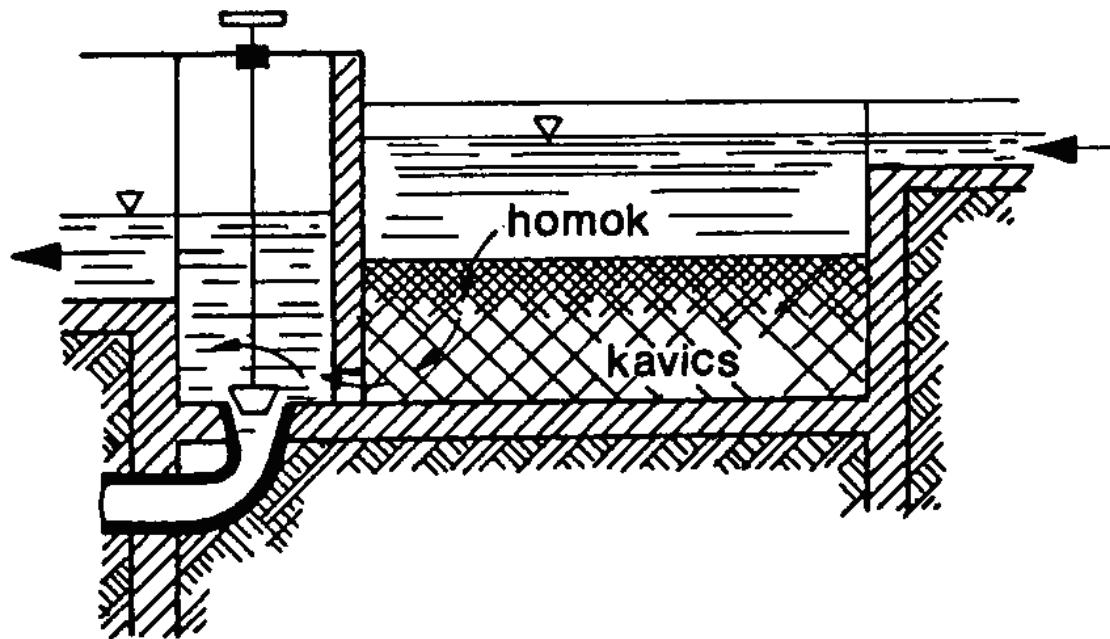
72. ábra: Csővezetékbe iktatható szitakosaras szűrő. 1 - szitakosár; 2 - fedél

Patronos szűrő: hasonló kivitelű, mint a szitakosaras szűrő, csak ebben a szennyeződés a külső felületen rakódik le.

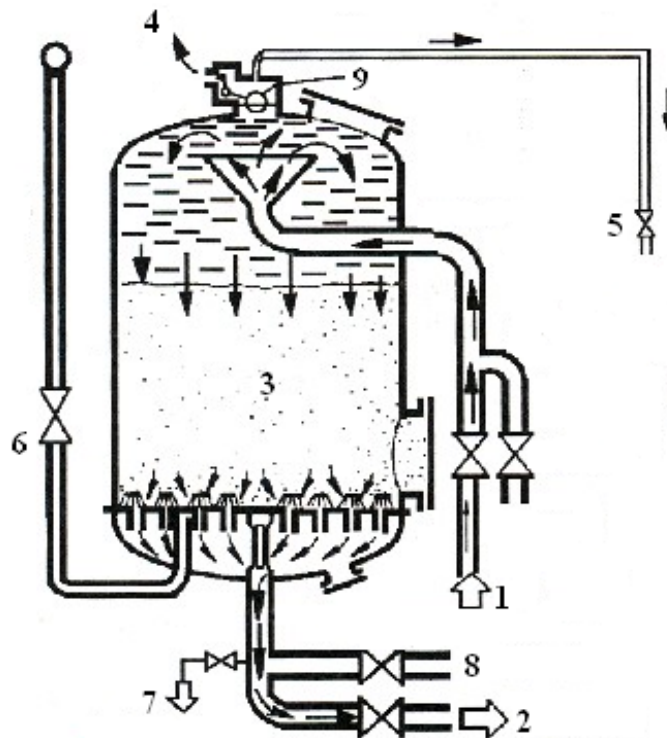
9.5.2. Szakaszos működésű szűrők

Ágyszűrők: Víz tisztításban gyakran használt szűrőtípus. A nyitott kivitelű szivárgó vízszűrő típusok általában betonból készített lapos tartályszerű építmények, amelyben a szűrőanyag adott vastagságú homok, kavics, műanyag szemcse rétege, amely a perforált fenéklemezen nyugszik (73. ábra).

A zárt kivitelű homokszűrőknél nagyobb a szűrési sebesség (ezért gyorszűrőknek is nevezik), itt a szűrőréteg 1-3m között változik (gyakran éles szemcséjű homok), ahol a készüléket légmentesen töltik meg vízzel felülről bevezetve (74. ábra). Az időszakos visszamosást tiszta vízzel a fellazítást öblítő levegővel végzik a szűréssel ellentétes irányban.



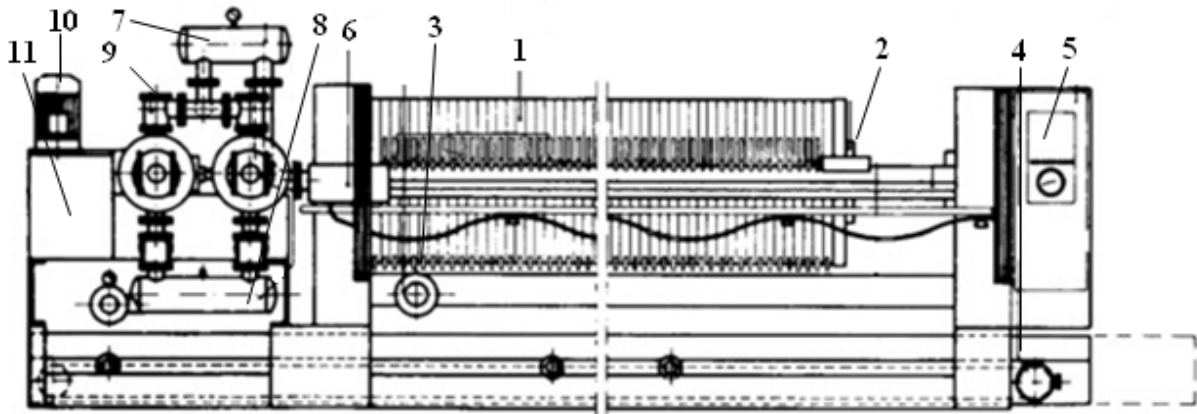
73. ábra: Kavicságyas vízszűrő



74. ábra: Zárt homokszűrő. 1 -szürendő víz; 2 -szűrt víz; 3 -homokágy; 4 -levegőkieresztő szelep; 5 -levegőbeeresztő; 6 -öblítő levegő; 7 -leürítés; 8 -öblítővíz; 9 -úszó

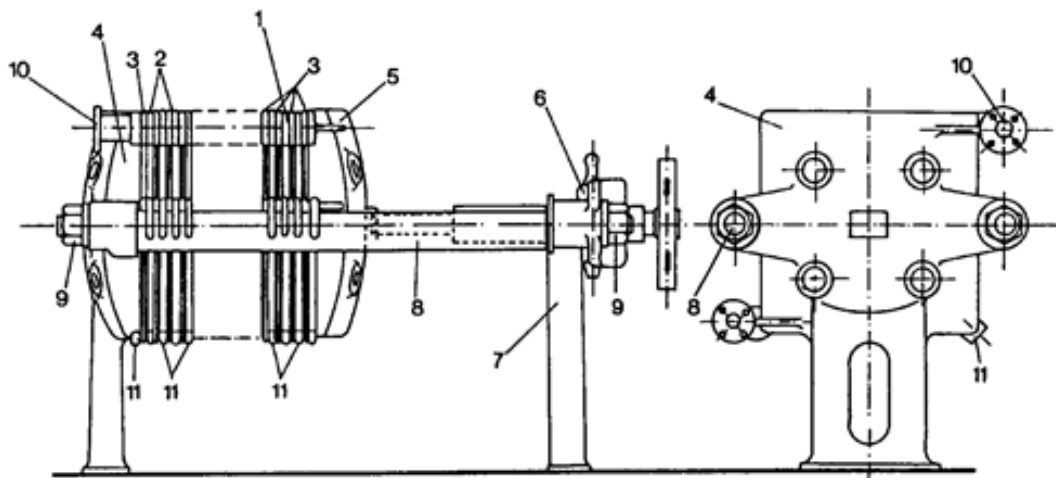
Kamrás szűrőprés: A szűrőprés több párhuzamosan kapcsolt szűrőelemből álló, szakaszosan működő szűrőkészülék. A szürendő folyadékot a szűrőelemek közé nyomják be és a szűrés ideje alatt a két végső zárólemezt vízzáró illeszkedésig nyomják össze (innen ered a szűrőprés elnevezés). Az iszaplepeny az elemek közötti üres teret tölti ki, míg az elemekre helyezett szűrőközegen átszűrődött folyadék, a szűrlet, az elemek bordái között folyik el a kifolyónyíláshoz. A kamrás szűrőprések nagy szilárdanyag-tartalmú közegek szűrésére szolgálnak. Itt rendszerint minden kamrának külön szűrletvezető csapja van. Az

élelmiszeriparban elsősorban seprők, derítési aljak értékes folyadéktartalmának kinyerésére használják. Jellemzősége, hogy a kamrákba általában középen vezetik be a szűrendő anyagot, és mivel viszonylag nagy a szilárdanyag-tartalom, a kamrák térfogata nagy. A keretek közé nagy szilárdságú műanyag vásznat helyeznek el, ez végzi a tényleges tisztítást.



75. ábra: Kamrás szűrőprés. 1- szűrőlapok, 2 - nyomólap, 3 - szűrlet kilépő, 4 - motor, 5 - kapcsolók, 6 - kamratoló, 7 - nyomó légüst, 8 - szívó légüst, 9 - visszacsapó szelep, 10 - mozgató motor, 11 - olajtároló

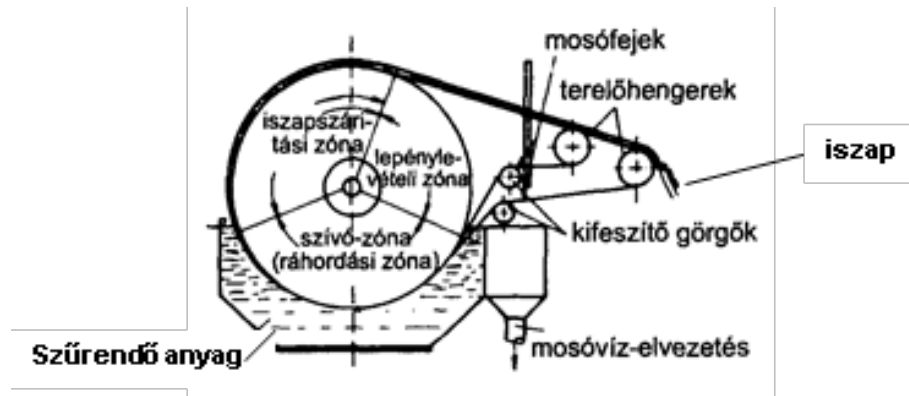
Keretes szűrőprés: Működése hasonló a kamrás szűrőpréshez, attól annyiban különbözik, hogy ebben az esetben az iszap nem kamrákban, hanem különálló üres szűrőelemekben, a keretben gyűlik össze, melyek felülete süllyesztett vagy perforált, hogy az átfolyást elősegítse.



76. ábra: Keretes szűrőprés. 1- szűrőlap, 2 - atmosó szűrőlap, 3 - keret, 4 - álló fejrész, 5 - mozgó fejrész, 6 - zárószerszög, 7 - állvány, 8 - tartórúd, 9 - anya, 10 - a szűrendő közeg, ill. a mosófolyadék bevezetése; 11 - leeresztő (csap)

9.5.3. Folyamatos működésű szűrők

A folyamatos működésű szűrők a szalagszűrők, tárcásszűrők és a legelterjedtebb forgódobos szűrők. Utóbbi kialakításánál a dob belsejében vákuum van (folyamatos vákuumszűrő), ennek hatására a folyadék átszívódik a vályúból a szűrőszöveten keresztül a dob belsejébe. A szűrőfelület mozog az iszapfeladás helyétől a szilárd anyag eltávolítás helyéig, ahol a dob külső felületére rakódott, kiszűrt iszapot egy leszedőszerkezet folyamatosan eltávolít. A legelterjedtebb folyamatos vákuumszűrő a hagyományos forgódob.



77. ábra: Vákuum-dobszűrő

Feladatok:

1. Egy 1 m^2 szűrőfelületű szakaszos szűrőn $1,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ nyomáskülönbséggel szűrnek. Szűrési konstansok:

$$rc = 6,5 \cdot 10^7 \text{ Ns/m}^4 \quad V' = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

A berendezés össze- és szétszerelési illetve mosási időszükséglete 8 perc.

a./ Mennyi az optimális szűrési idő és szűrlettérfogat?

b./ Mennyi az optimális szűrési idő, ha $V' \sim 0$ értéket tételezünk fel. /Elhanyagoljuk a szűrővászon ellenállását a szűrőlepény mellett/.

Megoldás:

$$\text{a./} \quad \tau_{opt} = \tau_{holt} + \frac{2V}{A} \sqrt{\frac{C \cdot i_{holt}}{\Delta p}} = 482 \text{ s}$$

$$V_{opt} = 0,94 \text{ m}^3$$

$$\text{b./} \quad \tau_{opt} = \tau_{holt} = 480 \text{ s}$$

2. Egy laboratóriumi szűrőberendezésen a következő adatokat mérték:

τ /min/	V /m ³
2,7	0,001
6,1	0,002
10,1	0,003
14,1	0,004

$$\Delta p = 7,466 \cdot 10^4 \text{ Pa} \quad A = 177 \text{ cm}^2$$

Mennyi idő alatt szűrhető le $2,4 \text{ m}^3$ ugyanilyen zagy egy ipari szűrőn, melyen hasonló szűrővásznat használunk?

$$A = 1,2 \text{ m}^2 \quad \Delta p = 1,765 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Megoldás: $\tau = 3,5 \text{ h}$

3. Valamely rosszul szűrődő anyaggal laboratóriumi kísérleteket végeztek nyomószűrőn, melynek felülete:

$A = 78,5 \text{ cm}^2$ volt. Az alkalmazott nyomásnál $\Delta p = 1,96 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ / a következő adatokat mérték:

τ /min/	V /cm ³ /
11,5	50
25,0	100
41,0	150
60,0	200
82,5	250
104,5	300
159,0	400
220,5	500

Napi $1,4 \text{ m}^3$ tiszta szűrlet nyeréséhez /10 óra üzemidő alatt/ hány darab keretre van szükség egy keretes szűrőpréshez, ha egy keret mérete: $540 \times 560 \text{ mm}$ és szűrőfelülete $0,3 \text{ m}^2$. /Rétegvastagság: 40 mm /.

Megoldás: 16 db üres keret, 17 db tele keret.

4. Szűrési segédanyagként alkalmazzák a következő anyagokat:

- a. homok
- b. perlit
- c. azbeszt
- d. cellulózrost pépek
- e. kovaföld

Megoldás: b, d, e

5. A következő szűrőtípusokban iszaplepény-szűrés valósul meg:

- a. szitakosaras szűrő
- b. homokszűrő
- c. keretes szűrő
- d. vákuum-dobszűrő
- e. mikroszűrő

Megoldás: a, c, d

6. A _____ során a kapillárisoknál kisebb méretű részecskék az iránytörés, ill. a csatorna keresztmetszet változásának hatására válnak le a kapillárisok járataiban. A felületen csak jelentéktelen lepény képződik.

Megoldás: mélységi szűrés

7. Az _____ annak a képzeletbeli szűrletnek a mennyisége, amelynek a szűrőfelületen történő átáramlása során kiülepedő iszaplepény ellenállása megegyezik a szűrőközeg ellenállásával.

Megoldás: egyenértékű szűrlettérfogat

8. Mit nem lehet meghatározni a Darcy-féle szűrőegyenlet segítségével?

- a. szűrési idő
- b. állandósult térfogatáram
- c. lepényellenállás
- d. egyenértékű szűrlettérfogat
- e. szűrőközeg ellenállása

9. Egy A szűrőfelületű keretes szűrőn τ idő alatt V térfogatú szűrlet áramlik át. Ha felére csökkentjük a nyomást, mekkora szűrőfelületet kell alkalmaznunk, hogy a szűrési idő ne változzon?

- a. $2A$
- b. $\sqrt{2}A$
- c. $\frac{1}{2}A$
- d. $A/\sqrt{2}$
- e. A^2

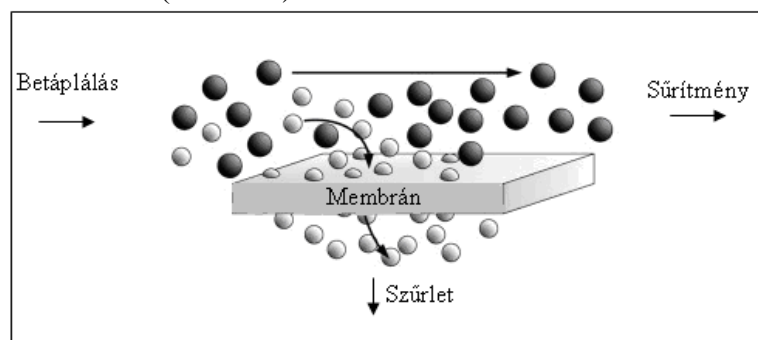
Megoldás: b

10. Membrán szeparációs műveletek

10.1. Membrános eljárások alapjai

A membrán szeparációs eljárások lényege, hogy valamilyen hajtóerő, kémiai potenciálkülönbség (pl. nyomás-, koncentráció- vagy hőmérséklet-különbség) hatására szelektív transzport megy végbe egy membránon keresztül. A művelet alapja a membrán (latin eredetű szó, jelentése hártya, héj), ami egy szelektív átteresztő képességű válaszfal, közbenső fázis, két fázis elválasztásakor aktív, vagy passzív válaszfalként résztvevője a vele érintkezésben lévő fázisok közötti anyagátvitelnek.

Alapelvük, hogy az alkalmazott szintetikus membrán a szétválasztani kívánt betáplált áramot két részre osztja a hajtóerő következtében: a membrántól függően bizonyos anyagokat visszatart, ezek alkotják a koncentrátumot vagy sűrítményt, míg másokat áttereszt, ami a permeátum vagy szűrlet lesz (78. ábra).



78. ábra: A membránszűrés elve

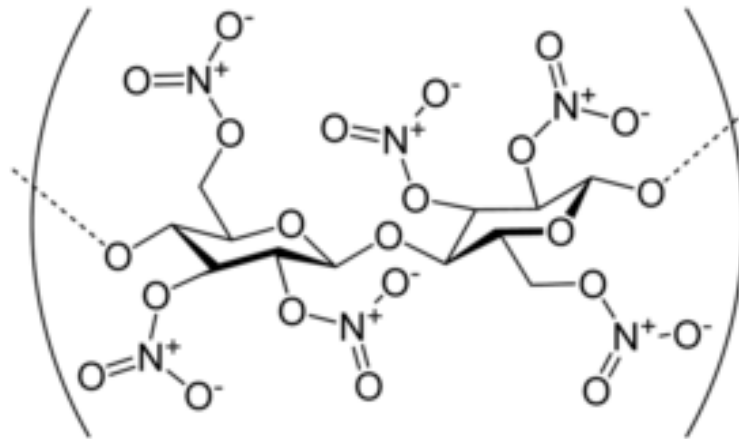
A hajtóerő vagy gradiens többféle lehet, amit a 79. ábra mutat be.

MEMBRÁN	GRADIENS			
	koncentráció	nyomás	hőmérséklet	elektromos potenciál
nem-pórusos	Pervaporáció PV	Gáz szeparáció GS	Membrán desztilláció MD	Elektrodialízis ED
	Ozmotikus desztilláció OD	Fordított ozmózis RO		
mikropórus dp≤2nm	Dialízis D	Nanoszűrés NF		
mezopórus dp=2-50nm		Ultraszűrés UF		Elektrodialízis ED
makropórus dp=50-500nm		Mikroszűrés MF		Tüzelőanyag cellák
		Membrán desztilláció MD		

79. ábra: Membrános eljárások csoportosítása

10.2. Membrános eljárások fejlődése

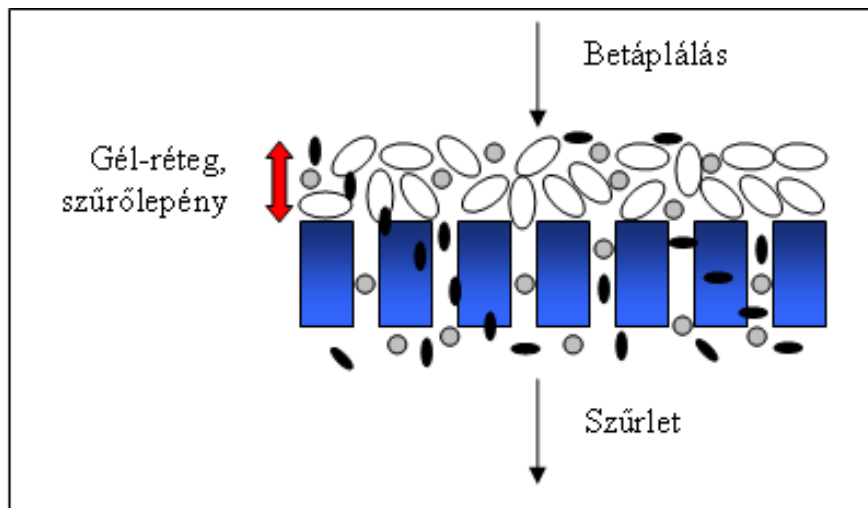
- 1748: Nollet Abbé francia szerzetes megfigyelte, hogy ha a sertés húgyhólyagjában töltött bort vízbe helyezik, akkor a borba víz kerül. Azóta számos kutató a diffúzió jelenségét természetes membránokkal (tehenek pericardiumával, halak úszóhólyagjával, békák bőrével és hagyma hártájával) vizsgálta, dialízis kísérleteket és ozmózis tanulmányozását.
- 1845: Mesterséges membránok sikeres előállítása. Schoenbein „véletlenül” szintetizált nitrocellulóz alapanyagú membránt.
- 1855: Fick ebből készített mesterséges membránt. Nitrocellulóz volt tehát az első mesterséges membránok alapanyaga (**80. ábra**), s ez az anyag jelentőségét szinte napjainkig megtartotta, hiszen a közelmúltig cellulóz-nitrátból, illetve más, szubsztituált cellulózszármazékokból készült membránok kerültek legnagyobb mennyiségben a kereskedelmi forgalomba.



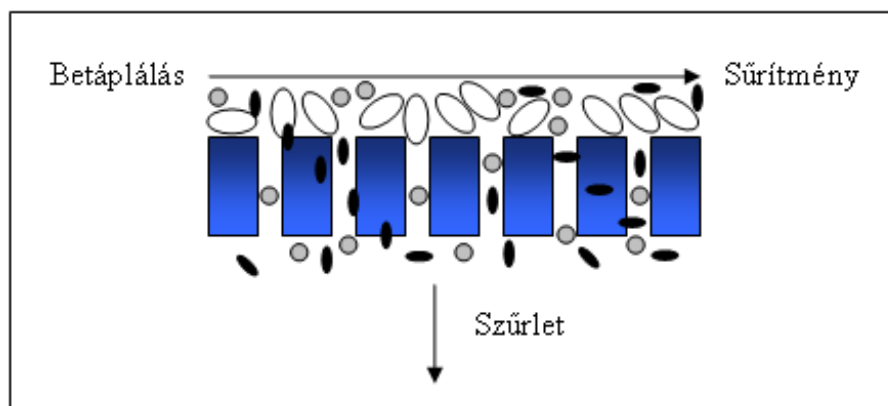
80. ábra: A nitrocellulóz (NC) képlete (v. cellulóz trinitrát)

- 1918: A kereskedelmi gyártás alapjait megeremtő szabadalmi bejelentés a magyar származású kémiai Nobel-díjas, Zsigmondy Richárdtól. A membránok, a membrántechnika fejlődése felgyorsult a II. Világháborút követő hidegháborús időszakban, főként a bakteriológiai fegyverek kifejlesztése miatt.

A membrán szeparációs műveletek során a hagyományos szűrési eljárással ellentétben a betáplált folyadékot nem a szűrőközegre merőlegesen (**81. ábra**), hanem a membránnal párhuzamosan (cross-flow) áramoltatják, miközben a szürendő anyag komponenseinek egy része a hajtóerő hatására áthalad a membránon (**82. ábra**).



81. ábra: A hagyományos szűrési eljárás elve



82. ábra: A keresztáramú membránszűrés elve

10.3. Membránok jellemzése

Az első alapanyagok, melyeket membránok gyártásához használtak a cellulóz észterei voltak. Bár ezek a membránok viszonylag szűk pH (3-7) és hőmérséklet (max. 35-40°C) intervallum mellett voltak használhatóak, széles körben elterjedtek, mert az adott feladathoz szükséges pórusmérettel tudták előállítani, de kiszorultak a piacról a sokkal előnyösebb hőmérséklet- és pH tűrő, poliszulfon alapanyagból készített membránok megjelenésével.

A kereskedelmi forgalomban eleinte izotrópos membránok terjedtek el, melyekben a pórusnyílások a membrán mindkét oldalán azonos méretűek, majd később jelentek meg az anizotrópos membránok, melyeknél a pórusnyílások átmérője különböző a membránok két oldalán és a szűrlet oldal felé növekednek.

A legújabb fejlesztések eredményeként a membránok felépítése gyakran réteges, ahol az első réteg egy maximum 0,5 - 1,0 μm vastagságú film, ez követi egy porózus polimer támasztó réteg (50-100 μm), majd egy megfelelő mechanikai szilárdsággal rendelkező hordozó réteg (100 μm). A leválasztott részecske méretét mindig a membrán legfelső, betáplálás oldalán kialakított film tulajdonságai határozzák meg.

A szervesetlen alapanyagú hordozó anyagok felületén kialakított ún. kompozit membránok (ezüst, acél, üveg, cirkónium oxid) kifejlesztésével tovább szélesedett a membrán szeparációs eljárások felhasználási területe, hiszen mind mechanikai szilárdságukat, mind sav-, lúg- és hőmérséklet-állóságukat tekintve minden feltételt kielégítenek.

A teljesség kedvéért meg kell említenünk a folyadék membránokat is. A folyadék membránok működési elve többféle csoportjuk ellenére azonos, a transzportálódó anyagnak a két különböző folyadék fázisra jellemző, eltérő diffúziós és megoszlási hányadosán alapul. Ismerünk duzzasztott-, hordozós és felületi folyadék membránokat.

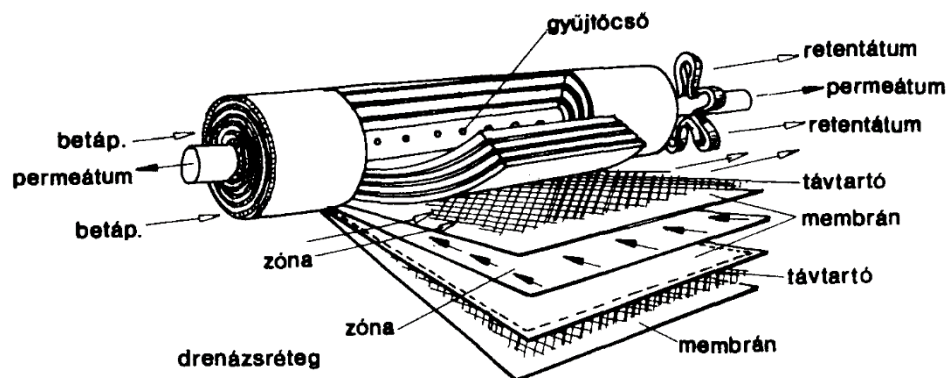
A membránok pórusméretének jellemzésére a vágási értéket (cut off) alkalmazzák. A vágási érték Daltonban kifejezett, globuláris fehérjére vonatkoztatott móltömegérték, amelyet a membrán az anyagtranszport során 90 %-ban visszatart. Dimenziója: Dalton; [Da]. Nagy leválasztási dalton értékek helyett elterjedten alkalmazzák a μm -rel történő jelölést is.

A membránok előállítás módja éppen olyan változatos, mint az alapanyagaik. A membránok készülhetnek öntéssel olvadákból vagy oldatukból, extrudálással, sajtolással, kilugzással, temikus kicsapással, lézersugárral, vagy elemi részecskékkel történő bombázással.

10.4. A membrán konfigurációk

Lapmembránok: A méretre és formára szabott membrán lapokat porózus lapok és távtartók választják el egymástól. Ezek különleges bordázata és kiképzése teszi lehetővé az optimális áramlási viszonyok kialakítását. A lapmembránok előnye, hogy viszonylag kis térfogatba nagy membránfelület építhető be, hátrányuk viszont az, hogy nagy szárazanyag-, ill. kolloid terhelés esetén a megfelelő áramlási viszonyokat nehéz tartani, a membránok eltömődésre hajlamosak. Ez a konstrukció mind a keresztáramú (cross-flow), mind a hagyományos (dead-end) szűréshez alkalmas.

Spiráltekeres modulok: a lapmembránoknak, a nagyobb fajlagos szűrőfelület elérése érdekében, továbbfejlesztett változatai (83. ábra). A modulok ugyanis a síkmembránokat és a közük helyezett távtartó és szűrletelvezető rétegeket egy perforált cső köré tekerik fel. A szűrendő anyagot a tekercs egyik végén táplálják be, a szűrletet a perforált csövön, a sűrítményt a tekercs másik végén távozik. Mivel a konstrukció relatíve nagy keresztáramú áramlási sebesség kialakulását teszi lehetővé, ezért a membránok eltömődési hajlama közepes.



83. ábra: Spiráltekeres modul

Csőmembrán modulok: a membránokat 12-20 mm átmérőjű hordozócsövekben helyezik el. A csőmembrán modulok nagy előnye, hogy bennük közel turbulens áramlás hozható létre, így nagy szárazanyag tartalmú és viszkózus folyadékok szűrésére is alkalmasak, könnyen tisztíthatók. Hátrányuk viszont a kisebb fajlagos szűrőfelület, a nagy helyigény.

Üreges szál (kapillár) modulok: a csőmembránoktól alapvetően a membráncsövek átmérőjében különböznek, ami 0,8-1,5 mm-ig változhat. További különbség még, hogy ezek a modulok nem tartalmaznak tartó vagy hordozó réteget, hanem a speciálisan kialakított csőfal struktúrája adja a szükséges mechanikai stabilitást.

A szálmembránok falvastagsága 120-180 μm közötti érték és kb. 250-1000 db alkot egy-egy modult. Ez az elrendezés ötvözi a spiráltekeres-, valamint a csőmodul előnyeit.

10.5. Nyomáskülönbségen alapuló membrános eljárások

A legfontosabb membrán szeparációs műveletek és gyakori alkalmazásai:

Nyomáskülönbségen alapuló membrános eljárások:

Mikroszűrés	[MF]	sterilszűrés, tisztítás, szétválasztás
Ultraszűrés	[UF]	sűrítés, szétválasztás, tisztítás
Nanoszűrés	[NF]	sűrítés, tisztítás, kivonás
Fordított ozmózis	[RO]	sűrítés, vízeltávolítás, sóatlanítás, tisztítás
Pervaporáció, Gőzpermeáció	[PV]	azeotrop elegyek szétválasztása víz eltávolítása szerves anyagokból szerves anyagok eltávolítása vízből és gázból
Membrán desztilláció	[MD]	sóatlanítás, folyadékok szétválasztása
Elektrodialízis	[ED]	ionok oldatokból történő eltávolítása
Dialízis	[D]	polimer oldatok tisztítása
Hemodialízis		művese

Az egyes membránszűrés típusokat az általuk leválasztott részecskék, ill. az alkalmazott nyomás alapján osztályozhatjuk.

megnevezés	jellemző nyomás (bar)	leválasztási tartomány (μm)
hagyományos szűrés	1-4	10 - 100
mikroszűrés	2-6	0,1 - 10
ultraszűrés	2-10	$0,5 - 5 \cdot 10^{-3}$
nanoszűrés	6-40	$10^{-2} - 10^{-3}$
fordított ozmózis	8-70	$5 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-4}$

84. ábra: Nyomáskülönbségen alapuló membrános eljárások típusai

10.5.1. Mikroszűrés

Klasszikus szűrés művelet, a szitahatás érvényesül, mechanikus leválasztás történik. A membrán pórusmérete a meghatározó szeparációs faktor.

Az átáramlott anyagmennyiséget (fluxus, J) egy egyszerű, kapilláris áramlási modell segítségével írhatjuk le, amely modell a kapillárisokon keresztül történő lamináris áramlások Hagen - Poiseuille egyenlettel leírható összefüggésén alapul. Ezt a modellt a porózus membránok többségénél használhatjuk kielégítő megközelítéssel, különösen azoknál az eseteknél, ahol a szűrő vagy szitahatás az alapvetően meghatározó szétválasztási elv.

$$J = \frac{dV}{d\tau} = \frac{\Delta p}{\eta(R_M + rc)} \frac{A}{V} \quad [7. 1.]$$

V	szűrlet mennyiség	[m^3]
τ	idő	[s]
Δp	nyomás	[Pa]
A	szűrőfelület	[m^2]
R_M	közegellenállás	
r	fajlagos lepényellenállás	
c	szuszpenzió koncentrációja	

Turbulens tartománynál azonban pontosabb ha az alábbi összefüggésekkel számolunk:

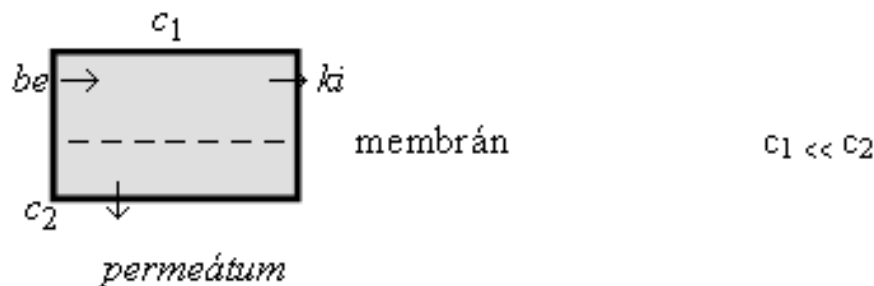
$$J = \frac{dV}{d\tau} = \frac{\Delta p A}{\eta(R_M + a(V/A)^b)} \quad [7.2.]$$

$$J = \frac{dV}{d\tau} = \frac{\Delta p A}{\eta(R_M + \exp V/A)} \quad [7.3.]$$

- a eltömődési koefficiens
b eltömődési konstans

10.5.2. Ultraszűrés és nanoszűrés

Az UF és NF folyamat kettős tulajdonságának bizonyítására álljon itt De Filippi modellje:



85. ábra: A membránszűrés általános modellje

Vizsgáljuk meg az 85. ábra látható modell térfogatáramát. A membrán az oldószerre nézve átjárható, az oldott anyag molekuláinak csak elenyésző része juthat át. Így $c_2 < c_1$ vagyis a betáplált oldat koncentrációja lényegesen nagyobb a permeátum koncentrációjánál. A membrán két oldalán mért koncentrációváltozás időben állandó és elhanyagolhatóan kicsi. Ilyen feltételek mellett a térfogatáram értéke:

$$J = K_M (p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2) \quad [7.4.]$$

- K_M membrán permeabilitás
 p_1 betáplálási nyomás
 p_2 kitáplálási nyomás
 π_1 betáplált oldat ozmózis nyomása
 π_2 kitáplált oldat ozmózis nyomása.

Ez a termodinamikai alapokon álló összefüggés kifejezi azt a tényt, hogy a kémiai potenciálok különbsége a membrántranszport hajtóereje.

Vizsgáljuk meg azt az esetet is, amikor az oldott anyag 1000 Da vagy még nagyobb molekulatömeggel rendelkező, töltés nélküli molekula. Ebben az esetben, mivel a membrán a kis molekulatömegű komponensekre nézve szabadon átjárható, a membrán két oldalán mért ozmotikus nyomáskülönbség elhanyagolhatóan kicsi az alkalmazott nyomás értékéhez képest. Amennyiben nincs semmilyen folyadékfázisú anyagátadási ellenállás, a térfogatáram nagyságát az alkalmazott nyomáskülönbség határozza meg:

$$J = K_M (p_1 - p_2) \quad [7.5.]$$

Ez az összefüggés régóta ismert a kutatók előtt, ám ha az oldott anyag koncentrációját növeljük, a várt eredménytől eltérően azt tapasztaljuk, hogy a nyomás növelésével nem nő lineárisan az átbocsátott anyag mennyisége, legfeljebb csak az igen alacsony térfogatáram értékeknél. A térfogatáram értéke minden esetben kisebb lesz, mint az azonos nyomáskülönbséggel áramoltatott tiszta oldószernél mért érték.

A fentiekből két megállapítást tehetünk:

UF esetében az oldatok térfogatáram értéke minden esetben kisebb, mint a tiszta oldószerekkel mért értékek, és az oldatok térfogatárama független az alkalmazott nyomáskülönbségtől, ezért más mechanizmusok hatását is fel kell tételeznünk. Minden keresztáramú szűrési folyamatnál, amelynél kolloidok vagy makromolekulák szerepelnek egy ún. második membrán, melyet gyakran dinamikus membránnak neveznek, képződik az elsődleges membrán felszínén. Ezek a képződő membránok három csoportra oszthatók:

1. típusú dinamikus membrán:

Az oldószert membránon keresztül történő átáramlása miatt a falnál megnő az oldat koncentrációja (c_w) és folyamatosan növekszik mindaddig amíg el nem éri a gél-képződési (gél-kialakulási) koncentráció szintjét (c_g). Az oldal belsejében mérhető koncentráció értéke: c_b . Egyensúlyi állapot esetében ez a koncentráció különbség, mely a membrán felülete és az oldat belseje között ily módon kialakul egy ellentétes irányú diffúzióknak lesz a hajtóereje. Természetesen a két áramlás kiegyenlíti egymást:

$$J_c - D \frac{dc}{dx} = 0 \quad [7. 6.]$$

Olyan membránt feltételezve, ahol rendkívül éles az elválasztás, azaz c_2 a permeátumban mérhető koncentráció rendkívül kicsi, a fenti egyenlet integrálása után a következőt kapjuk:

$$J = \frac{D}{\sigma} \ln \frac{c_w}{c_b} \quad [7. 7.]$$

σ azt a távolságot jelöli, amely után a membránnál mért koncentráció érték eléri az oldatra jellemző c_b koncentrációt. A c_w/c_b hányados adja meg a koncentráció polarizáció értékét. Turbulens áramlásnál σ -t definiálhatjuk, mint az anyagátadási határreteg vastagságát és D/σ értéke az anyagátadási koefficiens: k

$$J = k \cdot \ln \frac{c_w}{c_b} \quad [7. 8.]$$

A fenti egyenlet általános érvényű minden membrántranszport folyamatra, amelynél az oldott anyag nem jut keresztül a membránon.

Az UF műveletére alkalmazva az egyenletet, olyan speciális esettel állunk szemben, ahol a térfogatáram értéke viszonylag nagy, ami egy viszonylag nagy értékű koncentráció hányadost jelent. Megfelelően nagy térfogatáram értéknél, a membrán felületénél kialakult koncentráció érték eléri azt a határértéket, ahol az oldott anyag membránon történő kiüledéséről beszélünk. Ilyen körülmények között c_w a térfogatáramtól független állandó érték. Mivel állandósult viszonyok esetén c_w és az áramlási viszonyok állandók, így az anyagátadási koefficiens is állandó, vagyis a térfogatáram állandó, az alkalmazott nyomás értékektől független érték.

Amennyiben tehát a koncentráció hányados állandó, úgy a térfogatáram értékét az anyagátadási koefficiens fogja meghatározni. Ebből következik, hogy az oldat tulajdonságai és az áramlási viszonyok nagy jelentőséggel rendelkeznek az ultraszűrés műveletnél.

Ismert ugyanis az anyagátadási koefficiens és az előbb említett paraméterek összefüggése. Például turbulens áramlás esetén:

$$Sh = Nu_{II} = \frac{k \cdot d}{D} = const. Sc^{0,33} Re^{0,9} \quad [7. 9.]$$

ahol d az áramlás jellemző hossza, Schmidt szám pedig a kinematikai viszkozitás és a diffúziós együttható hányadosa.

Ezzel magyarázható tehát az oldatok ultraszűrés műveleténél a magas térfogatáram értékeknél tapasztalható nyomástól független állandó térfogatáram érték, valamint az áramlási viszonyok befolyásoló szerepe.

2. típusú dinamikus membrán:

A 2. típusú dinamikus membrán kialakulása elsősorban olyan esetekben fordul elő, amikor kolloidális szuszpenziókat mérünk olyan membránon keresztül amelynél a pórusméret esetleg egy nagyságrenddel is nagyobb a leválasztandó anyagok méreténél. Még nincs tisztázva, hogy a kolloidot alkotó anyagok hogyan halmozódnak fel a pórusok fölött a nagy méretbeli különbség ellenére, de tény, hogy a pórusok fölött egy kolloid réteg képződik, mely olyan sűrű lehet, amely már befolyásolhatja az oldott molekulák membránon keresztül történő áthaladását, vagyis visszatartja azokat.

Ezen szűrőréteg kialakulását bizonyítja az a tény is, hogy ilyen esetekben a szűrés műveletét leíró matematikai összefüggés is változik az időben, mígnem elérjük az iszaplepeny szűrésnél ismert klasszikus szűrőegyenletet:

$$J = \frac{K}{2(V + V_f)} \quad [7. 10.]$$

ahol V_f egyenértékű szűrlettérfogat, K a Ruth konstans:

$$K = 2PA^2 / \eta cr \quad [7. 11.]$$

P a nyomás, A a szűrőfelület, η a viszkozitás, c a kolloid koncentráció, r a fajlagos lepenyellenállás.

3. típusú dinamikus membrán:

Ez a típus akkor alakul ki, amikor közel esik egymáshoz a membrán pórusmérete és valamelyik leválasztandó komponens mérete. Amennyiben a molekula elég flexibilis, behatolhat a pórus belsejébe, ám ott valamilyen interakciós hatás eredményeként megakad, nem áramlik keresztül. Ahogy növekszik az elfoglalt pórusok száma, úgy változik a permeátum térfogatáram értéke. Keresztáramú szűrés esetében ritkán találkozunk a 3. típusú dinamikus réteg képződésével.

10.5.3. Fordított ozmózis

A fordított ozmózisnál (reverz ozmózis, RO vagy hiperszűrés) az alkalmazott membrán féligáteresztő, szelektív hártvaként működik, amely csak a vizet engedi áthaladni az ionokat visszatartja. Az RO-nál, az UF és MF-vel szemben, az adszorpciós és az oldékonysági tulajdonságok is szerepet játszanak a mechanikus szétválasztáson túl.

Az RO térfogatáramát leíró egyenlet az UF egyenletéhez hasonló, ám a nyomáskülönbségen és az ellenállási tényezőn (R_f) kívül figyelembe kell venni az ozmotikus nyomáskülönbséget (π) a membrán két oldala között és az ozmotikus ellenállási tényezőt (R_o):

$$J = \frac{P}{R_f} + \frac{\pi}{R_o} \quad [7. 12.]$$

Az ozmózisnyomás-különbséggel mért kémiai ellenállás membrán két oldala között meglévő kémiai potenciálkülönbségből (koncentráció különbségből) származik. Nagysága a koncentráció gradiens nagyságától függ. A membrán és az oldószer tulajdonságait az R_f foglalja magába. A fordított ozmózis és bizonyos nanoszűrési műveletek leírására két modellt is találhatunk a szakirodalomban.

Az első, az ún. oldat-diffúziós modell, amely feltételezi az oldószer és az oldott anyag oldhatóságát, molekuláris diffúziós képességét a membrán anyagán keresztül. Mivel mind az oldhatóság, mind a különböző molekulák diffúziós állandója eltérő különböző közegekre vonatkoztatva, így ez a modell jól magyarázza az RO és NF membránoknak az oldat különböző komponenseire vonatkozó szelektivitását.

A második modell a Sourijan által felállított kedvezményes oldódásos - kapillár áramlási modell, amely a membrántranszport lejátszódásánál két mechanizmust feltételez. Feltételezi, hogy a pórusos membránok olyan kémiai tulajdonsággal rendelkeznek, hogy vagy előnyben részesítik a víz szorpcióját, vagy az oldott anyag taszítását. Egy preferált multimolekuláris határréteg alakul ki a membrán - oldat érintkezésénél. A határréteget alkotó víz, nyomás hatására átáramlik a membránok kapillárisain.

A maximális elválasztás és permeabilitás biztosításához a membránnál, az oldattal érintkező felületén lévő film infinitezimális vékony rétegében, a kialakult vízréteg vastagságának kétszeresével jellemezhető kritikus pórusméretet kell fenntartani. A film - oldat érintkezési ponttól távolabb, membrán belsejében kapilláris áramlás jelentkezik. A kapcsolódó pórusok átmérője itt már nagyobb, így a permeátum áramlási ellenállása kisebb. Ezen mechanizmusból levonható legfontosabb következtetés, hogy a műveletet a felületi folyamat szabályozza, vagyis a szűrés meghatározó paramétere a kémiai kölcsönhatás a felület és az oldat között.

Bár a scanning elektronmikroszkópos felvételeken nem mutatható ki a pórusok megléte a felületi filmben vagy az RO membránokban, a napjainkban alkalmazott RO membránok mégis nagyon szorosan megfelelnek ennek a modellnek.

Művelet	Hajtóerő	Anyagtranszport mechanizmusa		Áthatoló komponens
Pervaporáció PV	gőznyomás különbség	diffúzió	membrán szétválaszt	oldott anyag
Membrán desztilláció MD	hőmérséklet különbség	diffúzió	kontaktor	oldószer
Ozmotikus desztilláció OD	vízaktivitás különbség			oldószer
Membrán abszorpció MAB	koncentráció különbség			oldott anyag
Membrán extrakció MEX	koncentráció különbség			oldott anyag

86. ábra: Membrános műveletek

10.6. További membrános eljárások

10.6.1. Pervaporáció

A pervaporáció és a gőzpermeáció folyékony elegyek, víztartalmú szerves oldószerkegyek, jellemzően azeotropos elegyek szétválasztására szolgáló műveletek.

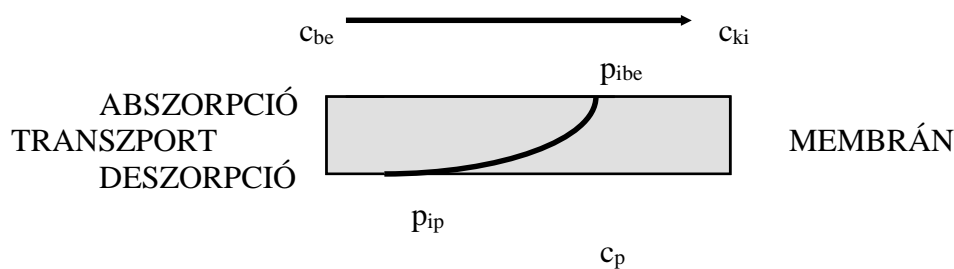
Az alkalmazott membrán nem pórusos szerkezetű hidrofil vagy organofil karakterű polimer. A folyamat hajtóereje a membrán két oldalán kialakuló, a transzportált komponensre vonatkoztatott parciális nyomáskülönbség.

Az egyensúlyi rendszer megbontásával - az egyik komponens gőzének elvezetésével - a szétválasztás elvégezhető, tisztán víz, ill. tisztán alkohol nyerhető ki, vagyis két áramra válik szét az eredeti folyadékegy.

A pervaporáció mechanizmusa

A membrán a folyadék eleggyel, a gőzpermeációnál az elegy gőzével érintkezik, a betáplált elegy komponensei abszorbeálódnak a membrán felületén (**87. ábra**). A membrán szelektivitásának megfelelő, azaz hidrofil vagy organofil komponens átdiffundál a membrán anyagán és a folyadék - gőz halmazállapot változás is a membrán belsejében játszódik le. A membrán permeátum oldalán deszorpcióval gőzként távozik a transzportálódott komponens.

A membrán elválasztási folyamatot ebben az esetben egy szorpciós-diffúziós modellel közelíthető meg.



87. ábra: A pervaporáció általános modellje

A membrántranszport hajtóerejét ($p_{ibe} - p_{ip}$, vagyis az i komponens parciális nyomáskülönbségét a membrán két oldala között) úgy biztosíthatjuk, hogy a membrán permeátumoldala felől, az összes inert gázt vákuumszivattyúval eltávolítjuk.

Mivel az i komponens túlnyomó része átdiffundál a membránon és egy kondenzátor segítségével leválasztásra kerül, így a készülék kimeneténél mért, i komponensre vonatkoztatott c_{ki} koncentráció lényegesen kisebb a betáplált oldat koncentrációjánál (c_{be}).

Az ipari méretekben is alkalmazható pervaporációs membránok és berendezések a közelmúlt fejlesztésének eredményei. Rendkívül jó üzemi eredmények mutatkoznak a pervaporációs technika alkalmazása mellett az etanol víztelenítésénél, pl. 5%-os víztartalmú etanolból 0,5%-os víztartalmú állítható elő.

Pervaporációs eljárás előnyei:

- energiatakarékos művelet, kb. ötszörös energia megtakarítást jelent a hagyományos azeotróp desztillációval szemben,
- környezetbarát művelet, nem igényel idegen szerves vegyület, mint segédanyag alkalmazását.

10.7. Membrán-szeparációs eljárások alkalmazási lehetőségei a vegyiparban

A membrán szeparációs eljárások rendkívül sokféle, szerteágazó és egyre bővülő felhasználási lehetőségei közül néhányat felsorolunk:

Mikroszűrés:

- oldatok sterilizése hőközlés nélkül,
- oldatok szilárdanyag mentesítése,

Ultraszűrés, nanoszűrés:

- elektroforetikus fém-festékek visszanyerése (a primer festékek vizes diszperzióból történő visszanyerése),
- olaj-víz emulziók kezelése (használt fűróolajok, hűtő- és kenő emulziók besűrítése, így a keletkező szennyvíz mennyisége jelentősen csökken),
- biotechnológiai felhasználások (sejtek, enzimek szeparálása, visszanyerése fermentléből, pirogén anyagok eltávolítása, rögzített enzimes fermentációk),
- víz- és szennyvízkezelés (ipari-, technológiai víz visszaforgatási lehetősége a technológiába),

- latex emulziók kezelése (koncentrálás a porlasztásos szárítás előtt, visszatöményítés és visszaforgatás a technológiába, sók eltávolítása),
- textilipari szennyvizek kezelése (detergensok, színezőanyagok, festékek eltávolítása),
- papíripari szennyvizek, szulfitos lúgok kezelése (újrahasznosítása),

Fordított ozmózis:

- fémsó szeparálás,
- ivóvíz nitrátmentesítés,
- brackvíz, bányavíz sótalanítása,
- ultratiszta vizek (elektronikai ipar, gyógyszeripar számára),
- kazán- és hűtővizek kezelése,

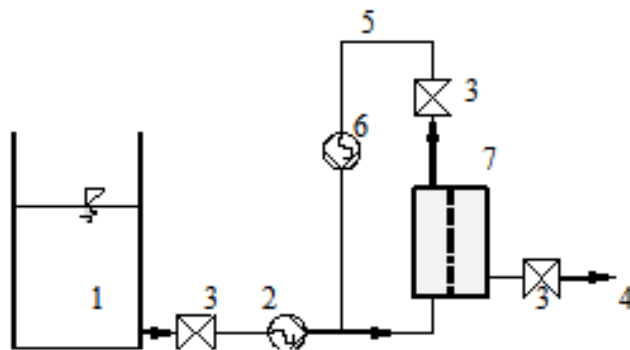
Pervaporáció:

- alkohol - víz szétválasztás,
- szerves oldószer víztelenítés,
- ecetsav víztelenítés.

10.8. Membrán szeparációs berendezések

Alapvetően minden membránszűrő berendezés felépítése megegyezik (**88. ábra**). Főbb elemei a tárolóartály (1), a betápláló szivattyú (2), a nyomást szabályozó szelepek (3), szűrlet- (4, 5) és koncentrátum elvezető, keringető szivattyú (6) modul, illetve sorban vagy párhuzamosan elhelyezett modulok (7) és a legtöbb esetben, a membrán védelme érdekében, a berendezésen megtalálható egy kb. 100 µm-es előszűrő is.

Lényeges eltérést a modult alkotó membrán minőségében (MF, UF, NF és RO) és a modul konfigurációjában (síklap, spiráltekercs, csöves és kapillár) tapasztalhatunk.



88. ábra: Membránszűrő berendezések sémája

1 - tárolóartály, 2 - betápláló szivattyú, 3 - szabályozó szelepek, 4 - szűrlet elvezetés, 5 - koncentrátum elvezetés, 6 - keringető szivattyú, 7 - szűrőmodulok

Mikroszűrő berendezések:

A mikroszűrő berendezések túlnyomó többsége úgynevezett gyertyás (patronos, cartridge) szűrőmodult tartalmaz. A jobb helykihasználás miatt ugyanis a sík membránokat hajtogatva (pliszírozva) helyezik el egy perforált mag körül, amely egyben a szűrlet elvezetésére is szolgál. Ezeknél a berendezéseknél a hagyományos szűrési elvet (dead-end) alkalmazzák: a szűrő anyag kívülről befelé áramlik a patronban. Találkozhatunk üreges szál, illetve csőmembránokból felépített modulokkal is a mikroszűrők között, de elterjedésük még nem általános.

Ultraszűrő berendezések:

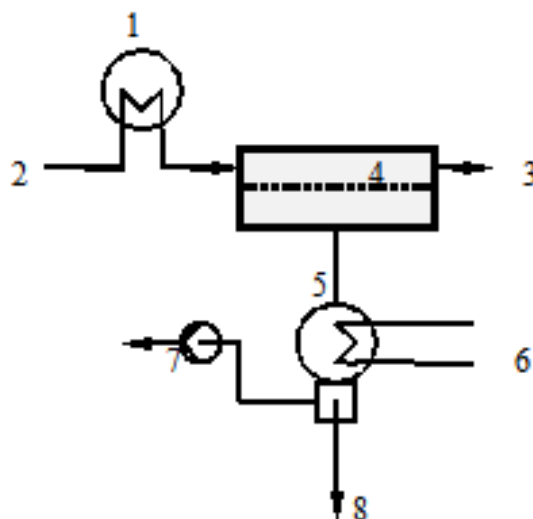
Az ultraszűrő berendezéseknél valamennyi membránkonfiguráció megtalálható, ennek megfelelően változik a berendezés felépítése. A keresztáramú szűrés miatt egy beépített keringető szivattyú juttatja vissza a szűrőn átáramlott sűrítményt a betápláló vezetékbe. A modulok be- és kivezető oldalain elhelyezett szelepek segítségével szabályozható a membrán két oldala között kialakuló nyomáskülönbség.

Fordított ozmózis:

A berendezéseknél megtalálhatjuk az összes konfigurációt. Mivel a művelet igen magas nyomáson játszódik le, számítanunk kell az anyag felmelegedésére, ami káros hatásokat eredményezhet. Ezen bomlási, minőségcsökkentő változások elkerülése érdekében a berendezéseknél az RO modulok elé hőcserélőt építenek be.

Pervaporációs készülékek:

A pervaporációs berendezések fontos elemei a membránt tartalmazó modulokon kívül a hőcserélők, melyek a betáplált oldat megfelelő hőmérsékletre történő felfűtését, illetve a távozó gőz-permeátum lekondenzálását végzik el. Lényeges elem még a vákuum szivattyú is, hiszen a parciális nyomásban kifejezett membránon keresztüli hajtóerőt úgy tartják fenn, hogy a permeátum részről az összes inert gázt vákuum szivattyúval távolítják el.



89. ábra: Pervaporációs készülék elvi felépítése

1 - hőcserélő, 2 - betáplált oldószerkelet, 3 - visszamaradt anyag, 4 - membrán modul, 5 - permeátum (gőz), 6- kondenzátor, 7 - vákuumszivattyú, 8 - permeátum (folyadék)

A membránszűrés előnyei:

- Jó minőségű végtermék, kitűnően eltávolítja az olyan kolloidokat és részecskéket, amelyek potenciális zavarosító tényezők.
- Nincs hőbomlás, hőkárosodás, a folyamat a termék számára a legkedvezőbb hőmérsékleten mehet végbe.
- Energia megtakarítás, hiszen a fázisátmenethez szükséges energia lényegesen nagyobb, mint az áramoltatáshoz szükséges elektromos energia
- Nem, vagy csak csökkentett mennyiségben van adalék-anyagra szükség.
- Gyors üzemmód, kicsiny tárolási kapacitást igényel

Ajánlott irodalom:

Membránszűrés:

- 1) Advanced Membrane Technology and Applications, Norman N. Li, Anthony G. Fane, W. S. Winston Ho, T. Matsuura, A John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2008, ISBN 978-0-471-73167-2
- 2) Membranes for Industrial Wastewater Recovery and Re-use, Simon Judd, Bruce Jefferson, Elsevier Ltd., 2003, ISBN 1 85617 389 5
- 3) Perry's Chemical Engineers' Handbook, 8th edition, Don W. Green, Robert H. Perry, McGraw-Hill, 2008, ISBN 978-0-07-142294-9, 20-36 – 20-71

Feladatok:

I. Többszörös választás:

1. A nyomáskülönbségen alapuló membrános eljárásokhoz tartozik:

- a) Mikroszűrés
- b) Pervaporáció
- c) Nanoszűrés
- d) Ozmotikus desztilláció
- e) Ultraszűrés

(megoldás: **10.5:** a, c, e)

2. A membrán szeparációs berendezések minden esetben tartalmaznak:

- a) szivattyút
- b) membrán modult
- c) szabályzó szelepeket
- d) térfogatáram mérőt
- e) hőcserélőt

(megoldás: **10.8:** a, b, c)

II. Egyszerű választás:

1. Melyik membrános eljáráshoz szükséges a legmagasabb nyomás biztosítása?

- a) Mikroszűrés
- b) Fordított ozmózis
- c) Nanoszűrés
- d) Pervaporáció
- e) Ultraszűrés

(megoldás: **10.5:** b)

2. Mire használható a pervaporáció?

- a) kazán- és hűtővizek kezelésére,
- b) latex emulziók kezelésére,
- c) alkohol- víz szétválasztására,
- d) papíripari szennyvizek kezelésére,
- e) oldatok sterilizálására

(megoldás: **10.7:** c)

III. Kiegészítő feladatok:

1. A membrán szeparációs eljárások lényege, hogy valamilyen _____ hatására szelektív transzport megy végbe egy membránon keresztül.

(megoldás: **10.1:** hajtóerő)

2. A membrános eljárások alapja a membrán, ami egy _____ válaszfal, közbenső fázis, két fázis elválasztásakor aktív, vagy passzív válaszfalként résztvevője a vele érintkezésben lévő fázisok közötti anyagátvitelnek.

(megoldás: **10.1:** szelektív áteresztő képességű)

IV. Számolási feladatok:

1. Adja meg egy ultraszűrő membrán visszatartását kémiai oxigénigényre, ha a szűrletben mért KOI érték 815 mg/L, míg a kezdeti tejipari szennyvíz KOI-ja 2540 mg/L.

Megoldás:
$$R = \left(1 - \frac{c_{\text{perm}}}{c_{\text{feed}}}\right) \cdot 100\% \quad R = (1 - 815\text{mg/L} / 2540\text{mg/L}) \cdot 100 = 67,91\%$$

2. Adja meg egy nanoszűrő membrán fehérje visszatartását, ha a szűrletben mért koncentráció értéke 0,005 %, míg a kezdeti savóban 0,49%.

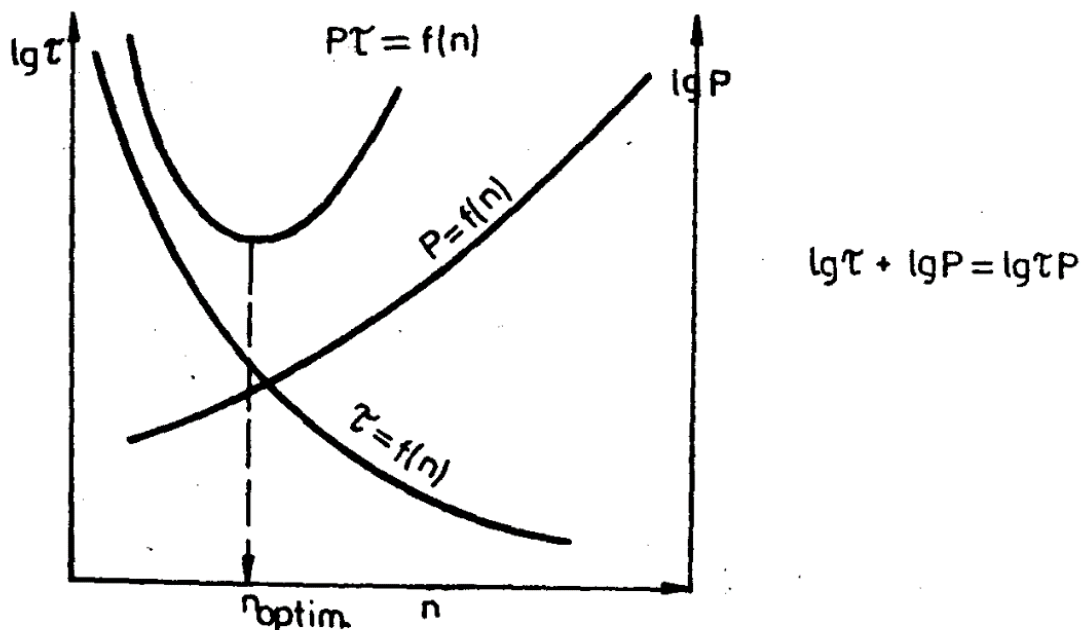
Megoldás:
$$R = \left(1 - \frac{c_{\text{perm}}}{c_{\text{feed}}}\right) \cdot 100\% \quad R = (1 - 0,005\% / 0,49\%) \cdot 100 = 98,99\%$$

11. Fluidumok keverése

A keverés célja, hogy két vagy több, egymástól eltérő tulajdonságú anyagot a készülékben egyenletesen eloszlassunk, vagyis az egyik komponensnek másikban történő diszpergálása, eloszlása kényszerített áramoltatás útján. A keverés eredménye a rendszer inhomogenitásainak (koncentráció, hőmérséklet, vezetőképesség) megszüntetése.

11.1. A keverés teljesítményszükséglete

A folyadékok keverése során cél, hogy a homogén állapotot minél rövidebb idő alatt érjük el. Ez elérhető a turbulencia fokozásával, így a fordulatszám növelésével, megfelelő geometriai kialakítással, pl. torlóelemek beépítésével. (Ez utóbbi alkalmazása megakadályozza a keverő és a folyadék együtt mozgását is, ami növeli a keverési időt.) Figyelembe kell azonban venni, hogy a fordulatszám növelése jelentős energiát igényel. Adott keverő esetében a keverési idő, a fordulatszám és a keverő teljesítményszükséglete összefüggő paraméterek, feladatunk az optimális fordulatszám meghatározása, a lehető legkisebb idő, és teljesítményszükséglet árán. (90. ábra)



90. ábra: Folyadékkeverők optimális fordulatszáma.

Annak meghatározása, hogy mekkora egy folyadékkeverő teljesítményszükséglete, meglehetősen összetett feladat. A tapasztalatok alapján a teljesítményszükségletet befolyásolják a keverőedény, illetve a keverőlapátok geometriai paraméterei, a fordulatszám, a folyadék sűrűsége, viszkozitása. Az ezen paraméterek közötti összefüggést a dimenzióanalízis módszerével határozhatjuk meg.

Kísérleti tapasztalatok alapján a keverés teljesítményszükségletét meghatározó paramétereket az alábbi függvénykapcsolatba rendezhetjük:

$$P = f(d, b, D, H, n, \rho, \eta, g) \quad (8.1)$$

P	teljesítmény szükséglet [kg m ² /s ³]
d	keverő átmérője [m]
b	keverőlapát szélessége [m]
D	tartály átmérője [m]
H	folyadéknívó magassága [m]
n	keverő fordulatszáma [1/s]
ρ	folyadék sűrűsége [kg/m ³]
η	folyadék viszkozitása [kg/ms]
g	nehézségi gyorsulás [m/s ²]

A kijelölt függvényt dimenzió analízisnek alávetve a következő dimenzió nélküli kifejezésekből álló függvényt kapjuk:

$$\frac{P}{d^5 n^3 \rho} = \text{const} \cdot \text{Re}_{kev.}^{-m} \text{Fr}_{kev.}^{-n} = \text{Eu}_{kev} = \text{Ne}$$

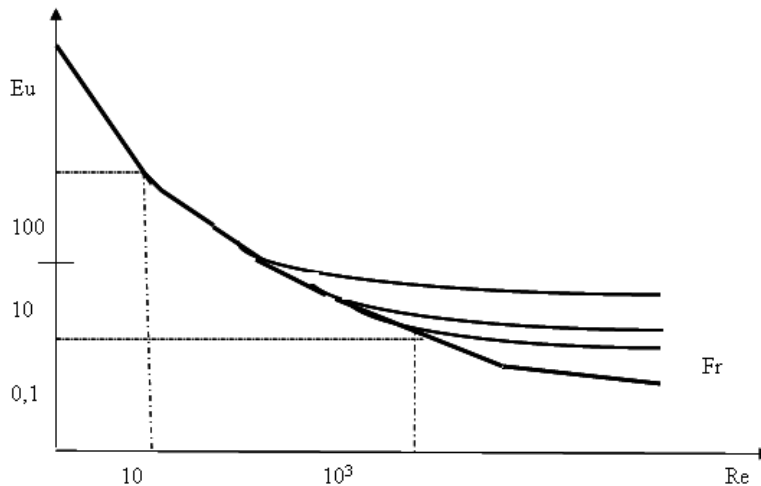
A $\frac{P}{d^5 n^3 \rho}$ kifejezés dimenzió nélküli, és teljesítmény tényezőnek, és keverési Euler számnak vagy Newton számnak nevezik.

Az m, n hatványkitevők és a konstans meghatározására kísérleteket kell végezni.

A mérési adatokat log Eu - log Re diagramban szokás ábrázolni. A kísérleti adatok szerint, ha tölcsér nem éri el a keverőt és így a keverő nem diszpergál levegőt a folyadékba, a Froude kritérium kitevője n = 0. (A tölcsérképződés több hátránnyal jár: a levegőbeszívás miatt jelentősen csökken a keverés hatékonysága, ha a keverő kibukik a folyadékból, a tengelyére nagy hajlító erő hat, amelynek nagysága a csavaró erő 6-7 szeresét is elérheti.) Ezt figyelembe véve az egyenlet a következő formára egyszerűsödik.

$$\text{Eu}_{kev} = \text{const} \cdot \text{Re}^{-m} \quad (8.2.)$$

Ha az Eu számot a Re szám függvényében log-log koordináta rendszerben ábrázoljuk a görbének a Re számtól függő három szakaszát különböztethetjük meg (**91. ábra**)



91. ábra: Eu-Re diagram logaritmikus léptékben

Lamináris tartományban $Re < 10$ értékek esetén a Re szám kitevője minden keverőre $m=1$.

$$Eu \cdot Re = const \cdot \frac{P}{d^3 n^2 \eta} \quad (8.3)$$

Tehát a lamináris tartományban a keverő teljesítményszükséglete a fluidum viszkozitásával egyenesen arányos és független a folyadék sűrűségétől. A konstans értéke a keverő típusának és a geometriai arányoknak a függvénye.

A lamináris tartomány határa szintén függ a keverő típusától. A tartály falához közel működő keverőknél a lamináris tartomány $Re < 100$. Ilyen keverők a horgony-, a rácsos-, az ujjas-, a kalodás-, valamint a szalag- és csigás-szalagkeverők. Ezeknek a keverőknek a teljesítményfelvételét elsősorban a tartályfal és a keverő éle közötti rés nagysága (e) valamint a keverő él hossza (L) határozza meg.

A konstans értéke a következő képlettel számítható:

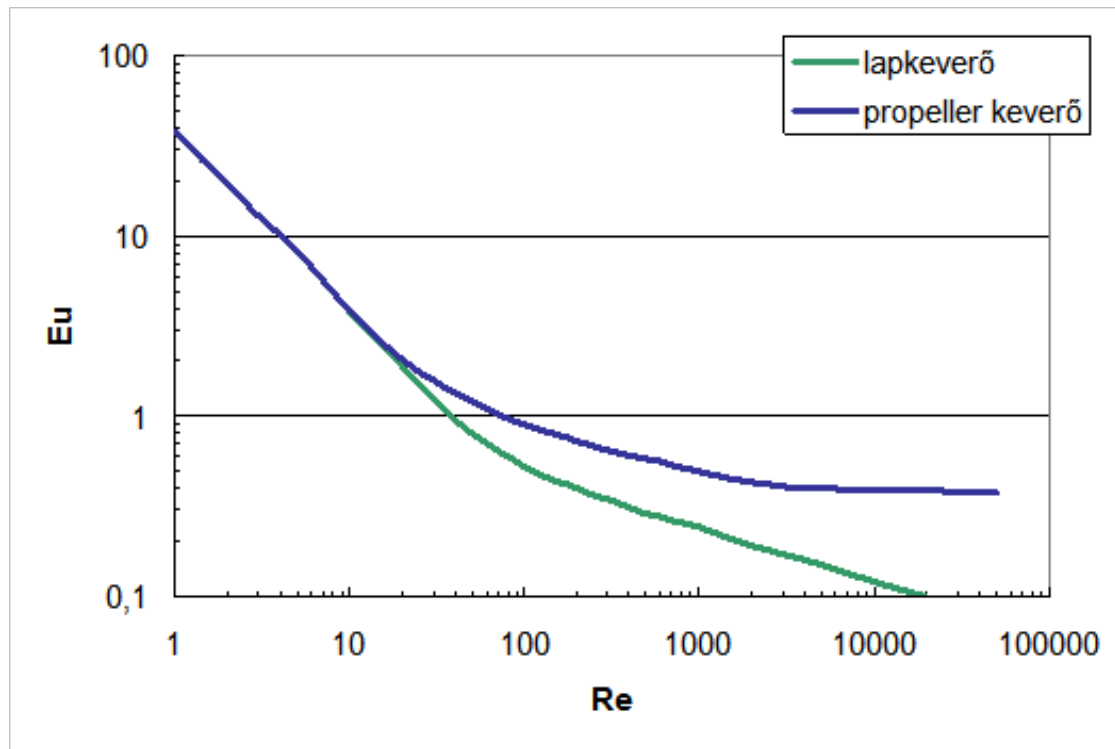
$$const = A \frac{L}{d} \left(\frac{D}{e} \right)^{0,45} \quad (8.4.)$$

ahol A a keverő típusra jellemző konstans, és $e = \frac{D-d}{2}$.

Átmeneti tartományban $10 < Re < 10^3$ értékek esetén a görbe nem ill. csak közelítőleg és igen bonyolult összefüggéssel írható le. Ezért célszerűbb ebben a tartományban a Eu-Re összefüggést grafikusán megadni.

Turbulens tartományban $Re > 1000$ értékek esetén, ütközőlemez nélküli tartály esetén a Re-szám kitevője $m=0,2$. Ütköző lemezekkel ellátott tartály esetén a keverő teljesítményfelvétele megemelkedik és turbulens tartományba az Eu szám függetlenné válik a Re számtól, $m=0$ és ez esetben:

$$P = const \cdot d^5 n^3 \rho \quad (8.5)$$



92. ábra: Különböző keverők Eu-Re diagramja

Példa:

Folyadék összekeverését propellerkeverős edényben végezzük. Az edény átmérője 1200 mm, a keverőlapát átmérője: 400 mm, fordulatszáma 250 1/min. A folyadéksűrűség: 1350 kg/m³, kinematikai viszkozitás: 1,25·10⁻⁵ m²/s. Kiszámítandó a Reynolds szám, az Euler szám valamint a teljesítmény szükséglet.

Megoldás:

$$Re = \frac{nd^2}{\nu}$$

$$n = 250 \text{ min}^{-1} = 4,17 \text{ s}^{-1}$$

$$Re = \frac{nd^2}{\nu} = \frac{4,17 \cdot 0,4^2}{1,25 \cdot 10^{-5}} = 5,3 \cdot 10^4$$

A nomogram megfelelő görbéről olvassuk le, az ehhez a ponthoz tartozó Eu számot.

$$Eu = 0,36$$

Így a teljesítmény:

$$P = Eu \cdot \rho \cdot n^3 \cdot d^5$$

$$P = 0,36 \cdot 1350 \cdot 4,17^3 \cdot 0,4^5 = 360,85 \text{ W}$$

Indító teljesítmény Kaszatkín képletével:

$$P_{ind} = 0,134 \cdot Re^{0,22} \cdot P$$

$$P_{ind} = 0,134 \cdot 5,3^{0,22} \cdot 10^{0,88} \cdot 360,85 = 533 \text{ W}$$

11.2. Keverőberendezések csoportosítása

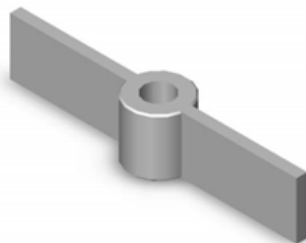
Jellemző folyadékkeverési feladatok: gáz diszpergálása folyadékban, szilárd anyag lebegtetése, oldása folyadékban, nem elegyedő folyadékok keverése, hőátvitel javítása keveréssel.

A folyadékok keverése megoldható mechanikus- általában forgó – keverővel, gázbuborékolatással, a folyadék szivattyús keringetésével. A mechanikus keverők között a leggyakoribbak a forgómozgást végző keverők valamilyen edényben elhelyezve.

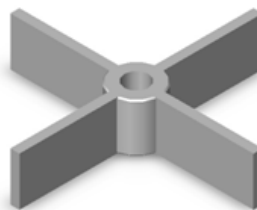
Lapkeverők: a keverő átmérője a tartály átmérőjének kb. fele. Alacsony fordulatszámon működnek, 20 - 100 1/min, így a fluidumot elsősorban vízszintes irányú, radiális áramlásra kényszerítik. A keverőből radiális irányban kiáramló folyadék beleütközik a tartály falába és felfelé ill. lefelé áramlik. Így tehát létrejön egy vertikális áramlás, vagyis igen intenzív a tartály fala mentén a *tangenciális áramlás*.

A lapát alakja szerint megkülönböztethetünk:

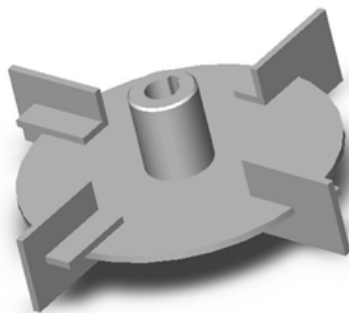
- lapkeverő
- karos keverő
- ferde lapátú karos keverő
- horgony keverő
- ujjkeverő
- kalodás keverő



2 karú lapkeverő



4 karú lapkeverő



Rushton turbina

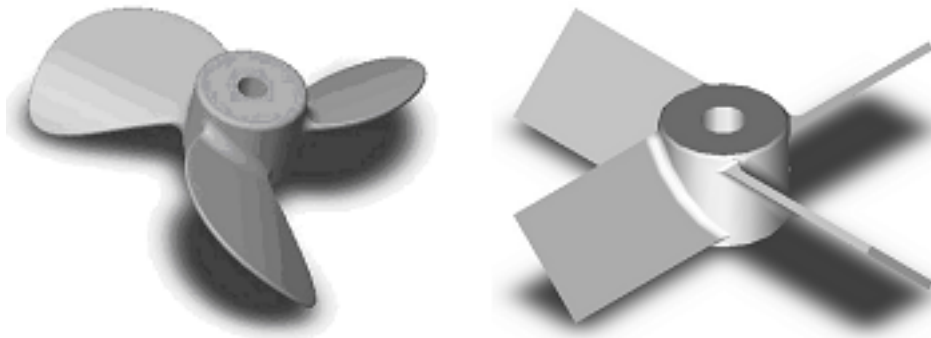


horgonykeverő

93. ábra: Radiális áramlást biztosító keverőtípusok (P. Csiszar engedélyével)

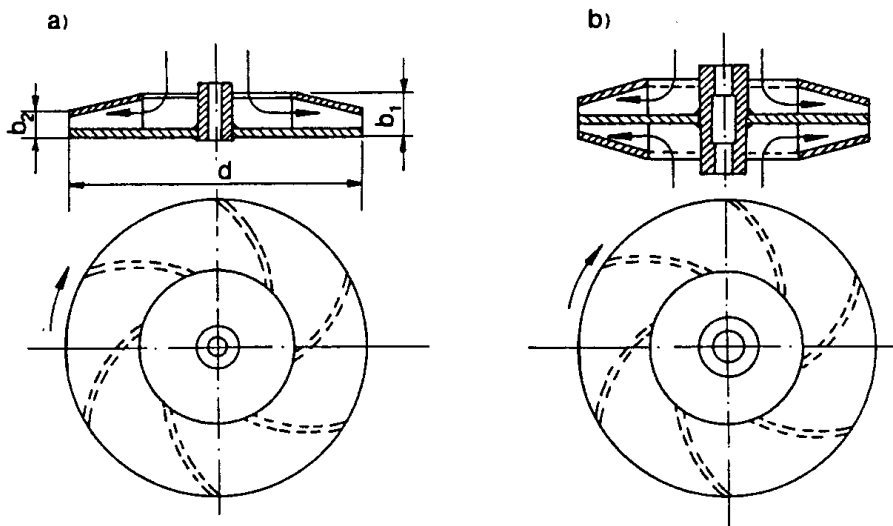
A propeller keverők szárnylapátjai mértani csavarfelületek, keverésre 2, 3, ritkán 6 szárnyú propellerekett használnak. Viszonylag nagy fordulatszámmal (150-1600 1/min) működnek. A propeller keverő igen erős *axiális áramlást* idéz elő. Akkor használják, ha a keverési feladat megoldásához nagy folyadék tömeget kell megmozgatni, pl. szuszpenzió készítés, oldás kis viszkozitású folyadékok esetén. A tölcserképződés megakadályozására 2 - 6 db ütközőlemez

szokás a tartály falán elhelyezni. Kisebb tartályokat excentrikus elhelyezésű, függőleges tengelyű propellerkeverőkkel kevertethetünk.



94. ábra: Propellerkeverő a. háromszárnyú b. négyszárnyú (P. Csiszar engedélyével)

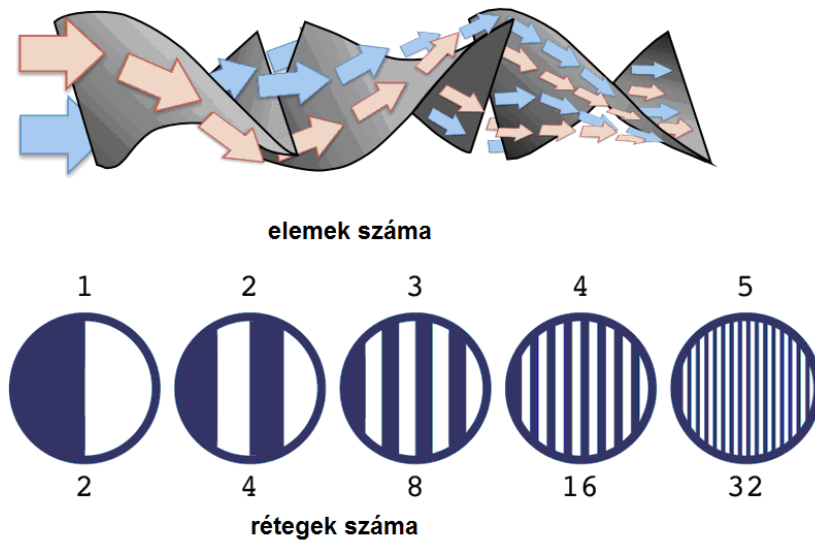
Turbina keverő: a keverőelemet az agyra, vagy tárcsára felszerelt lapátok alkotják. A lapátokat, vagy sugár-irányban, vagy valamilyen görbe mentén helyezik el, esetleg ferde lapátozást alkalmaznak. A turbinakeverő a centrifugál szivattyú járókerékéhez hasonlóan működik, a tengelyirányban oda áramló folyadékot a lapátok felgyorsítják. A turbinakeverőkkel nagy nyíróerőket lehet létrehozni, ezért előnyösen alkalmazhatók diszpergáláshoz, emulgeálásokoz. Fordulatszámuk: 50 - 1800 1/min.



95. ábra: Zárt turbókeverő a - egyszeres beömlésű, b - kettős beömlésű

A sztatikus keverők forgó-mozgó alkatrész nélküli, csőbe sorozatban beépített, merev terelő lemezes szerkezetek. A bevezetett két részáramot a terelő lemezek két vagy több részre osztják. Az elemek kialakítása olyan, hogy a felosztás következtében előálló újabb részáramok összefolyásuk után vékonyodó rétegben egymás mellett maradnak. Az elemek számát növelve elméletileg tetszőleges térfogati eloszlást lehet elérni.

A sztatikus keverőket főleg viszkózus folyadékok keverésére használják, de porkeverésre is alkalmazhatók. A legismertebb a Kenics-féle sztatikus keverő. A keverőcső belsejében felváltva jobb és bal menetű csavarfelületek helyezkednek el. A kapcsolódó élek 90°-kal elvannak forgatva. Egy elem hossza kb. a csőátmérő másfélszerese.



96. ábra: Sztatikus (Kenics-) keverő a - működési elvi vázlat, b - elkeverés rétegei

Keveréssel a folyadékok és hőátadó felületük közötti hőcsere javítható. Kis és közepes viszkozitású folyadékoknál gyors forgású keverőket alkalmaznak, amelyek a folyadékot átkeverik és a hőátadó felület mellett is élénk folyadékmozgást hoznak létre. Az élénk keverés a folyadék körbeforgását és tölcséres folyadékfelszínt hoz létre. Ha a tölcsér a keverőt eléri, az levegőt kever a folyadékba, ami rontja a hőátvitelt. Elkerülésére torlólapokat kell alkalmazni, ami viszont a keverés energia igényét növeli.

Viszkózus anyagoknál a hőátadó felület közelében kívánatos növelni a folyadékmozgást. Ezt a fal mellett haladó lassú járású keverővel biztosítják (kalodás, horgony, szalagos keverő). A szalagos keverő a folyadék függőleges átkeverését is biztosítja.

Kis viszkozitású folyadék szivattyús keringtetéssel jól keverhető. Így biztosítható egy tartályban a folyadék egyenletes hőmérséklete, koncentrációja.

11.3. Gyorskeverés

A szennyvíztisztítás gyakorlatában elterjedten alkalmazott eljárások a koagulálás, flokkulálás, amely során vegyszerek adagolásával érik el, hogy a szennyezőanyagok könnyen ülepedhető formába kerüljenek. A derítoszerek alkalmazásakor meghatározó szerepe van a mechanikai körülményeknek is. A vegyszerek adagolásakor a vegyszert és a tisztítandó vizet igen gyorsan össze kell keverni. Ez egyrészt a vegyszer homogén eloszlását biztosítja, másrészt azt, hogy a vegyszerek még aktív, reakcióképes állapotukban (pl. a polihidroxidok) reagáljanak a lebegőanyag-részecskékkal. A gyors vegyszerbekeverést követően a primer aggregátumok további ütköztetését, a pehelyméret növelését lassú keveréssel kell elősegíteni. A keverési sebességek (a folyadékban kialakuló sebességgradiens) optimális megválasztása mellett az alkalmazott keverési időt is optimálni kell. (A keverési idő növelése ugyanis az aggregátum képződés mellett az aggregátumok aprítását is eredményezheti.)

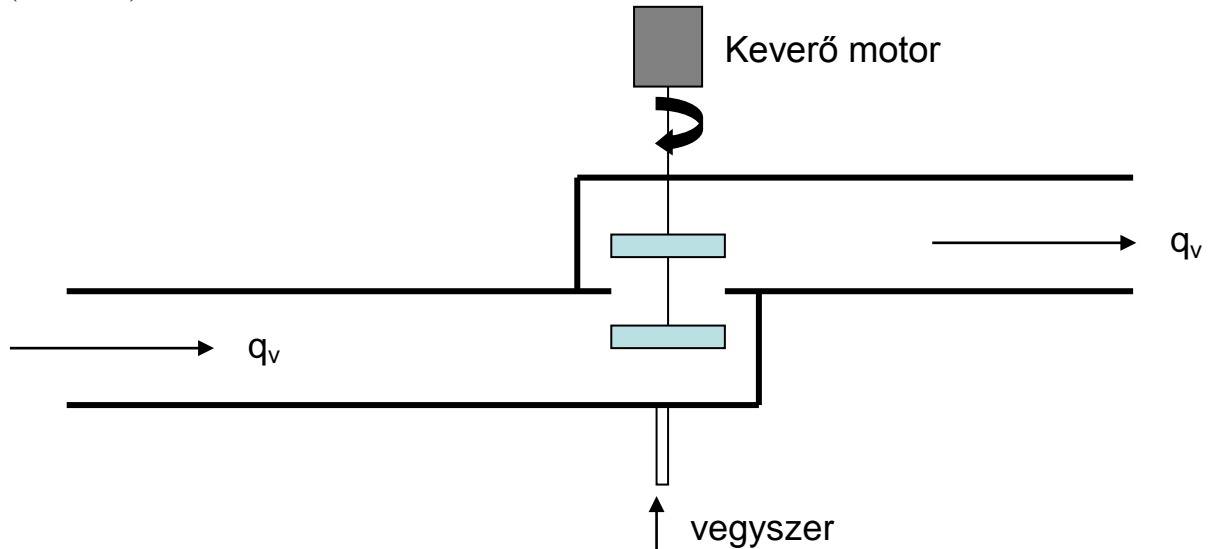
A gyorskeverőben kialakuló sebességgradiens a folyadék viszkozitásának, illetve a folyadék térfogategységének átadott teljesítmény függvénye:

$$\frac{dv}{dx} = \sqrt{\frac{P}{\eta \cdot V}} \quad (8.6)$$

ahol P a teljesítményszükséglet (W), η a dinamikai viszkozitás (Pa s), V pedig a keverendő folyadék térfogata.

A gyorskeverés történhet mechanikai úton, pneumatikus, vagy ütközőelemekkel ellátott statikus gyorskeverő berendezésekben. A berendezés típusától függetlenül azonos keverési intenzitás esetén a keverés teljesítményszükséglete is azonos lesz.

A folyamatos, in-line rendszerű keverés kompakt, egyre leterjedtebben alkalmazott módszer (97. ábra)



97. ábra: In-line gyorskeverő rendszer

A gyorskeverésre a legelterjedtebb módszer a mechanikai keverés, amely megbízható, üzembiztos, és rendkívül rugalmasan működtethető. A gyorskeverő berendezésekben rendszerint függőleges tengelyű rotációs keverőelemeket használnak, mint pl. turbinalapátok, lapkeverők, propellerek.

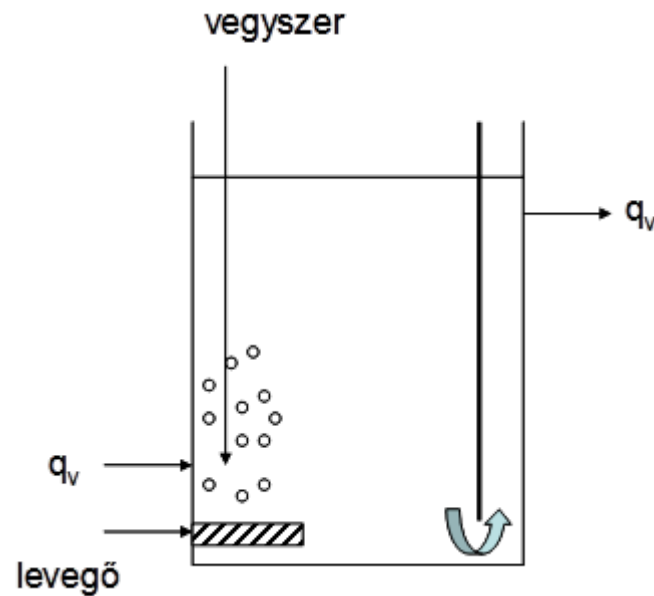
A mechanikai keverőberendezések működését nem befolyásolja az áramlási sebesség változása, kicsi a súrlódási veszteségük is. A berendezésekben a tartózkodási idő általában 20 és 60 sec között változik, bár vannak olyan keverőedények, amelyekben csak 10 s, és olyanok is, amelyekben akár 2-5 perc is lehet a tartózkodási idő. A kis tartózkodási idők nagy sebességgradiens (700-1000 1/s) alkalmazásával érhetők el, amely nagy keverési teljesítményt igényel. A jellemző tartózkodási időket és sebességgradiens értékeket foglalja össze a **3. táblázat**.

3. táblázat: Jellemző tartózkodási idők mechanikai gyorskeverő berendezésekben

Tartózkodási idő (s)	Sebességgradiens (1/s)
20	1000
30	900
40	800
50 <	700

Az egyszerű keverőedények általában kör vagy négyzet alaprajzúak, amelyekben a folyadék mélysége 1-1,2× nagyobb a keverőedény szélességénél vagy átmérőjénél. Az edény esetenként terelő peremmel rendelkezik, ennek alkalmazása előnyös, mivel minimalizálja az örvényképződést, illetve megakadályozza a folyadék együtt mozgását a keverőlapátokkal.

A pneumatikus keverőberendezések egy tartályból és egy levegőztető egységből állnak (98. ábra).



98. ábra: Pneumatikus gyorskeverő felépítése

A pneumatikus gyorskeverőkben a tartózkodási idő és a sebességgradiensek a mechnaikus gyorskeverőkhöz hasonló nagyságrendben vannak. A sebességgradiens a levegő áramlási sebességének változtatásával változtatható. A keverő méretezésekor a kívánt sebességgradiens ismeretében meghatározható a keverő teljesítményszükséglete:

$$P = C_1 q_{v, \text{levegő}} \log\left(\frac{h + C_2}{C_2}\right) \quad (8.7)$$

Ahol $C_1=3904$, $C_2=10,4$, h a buborékoltató elem és a folyadékfelszín magasságának különbsége, amennyiben $q_{v, \text{levegő}}$ a levegő térfogatárama (m^3/min) egységekben.

Példa:

Egy négyzet alaprajzú gyorskeverő berendezésben a folyadék mélysége (H) 1,25-szöröse a szélességének (D). A tartályt 7570 m³/nap térfogatáramra kell tervezni, a sebességgradiens 790 1/s, a tartózkodási idő 40 s, a hőmérséklet 10°C. Határozzuk meg a keverőedény méreteit, a teljesítményszükségletet, és a szükséges levegő térfogatáramát, ha tudjuk, hogy a buborékoltató egység a tartály aljától 15 cm-es magasságban helyezkedik el!

Megoldás:

(1) A keverőedényben a folyadék térfogata a tartózkodási idő ismeretében számítható:

$$q_v = \frac{V}{\tau_{tart}} \rightarrow V = q_v \cdot \tau_{tart} = \frac{7570 \text{ m}^3 / \text{nap} \cdot 40 \text{ s}}{86400 \text{ s} / \text{nap}} = 3,5 \text{ m}^3$$

(2) Az edény dimenziói:

$$V = D \cdot D \cdot H = D \cdot D \cdot 1,25D = 1,25D^3$$

$$D = \sqrt[3]{3,5 / 1,25} = 1,41 \text{ m}$$

$$H = 1,25D = 1,76 \text{ m}$$

Tehát amennyiben az edény szélessége 1,41 m, a magasságának legalább 1,76 m-nek kell lennie.

(3) A teljesítményszükséglet a (8.6) képlet alapján számítható:

$$P = \eta \cdot V \cdot \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = 1,31 \cdot 10^{-3} \text{ Pas} \cdot 3,5 \text{ m}^3 \cdot 790^2 \text{ 1/s}^2 = 2863 \text{ W}$$

(4) A teljesítményszükséglet ismeretében (8.7. egyenlet) a szükséges levegő térfogatáram a következő képlettel számítható:

$$q_{v, \text{levegő}} = \frac{P}{3904} \frac{1}{\lg \frac{h + 10,4}{10,4}},$$

Ahol h a buborékoltató egység távolsága a folyadékszint tetejétől:
 $h = H - 0,15 = 1,76 - 0,15 = 1,61 \text{ m}$

Ebből

$$q_{v, \text{levegő}} = \frac{2863}{3904} \frac{1}{\lg \frac{1,61 + 10,4}{10,4}} = 11,73 \text{ m}^3 / \text{min}$$

Feladatok:

1. Egy 30cm átmérőjű hatlapátos vezetőkerekes turbina keverővel 60/min fordulatszámmal víznek tekinthető fermentlevet keverünk $\eta=0,8$
Milyen teljesítményű motora van szükség?

Megoldás:

A keverési Re szám

$$Re_k = \frac{9 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 10^3}{10^{-3}} = 9 \cdot 10^4$$

A keverési Eu szám a diagramból

$$Eu_k = 1,15$$

A teljesítmény

$$P = Eu \cdot \rho \cdot n^3 \cdot d^5$$

$$P = 1,15 \cdot 1000 \cdot 1^3 \cdot 0,3^5 / 0,8 = 349,3W$$

2. Mekkora maximális átmérőjű keverőlapátot használhatunk még fordulatszám csökkentés nélkül, ha a motor teljesítménye 0,5 kW. Az anyag sűrűsége 1200 kg/m^3 , viszkozitása 10^{-2} Pas , $n=480/\text{min}$.

A keverőre a következő összefüggés érvényes

$$Eu_k = \frac{6}{Re^{0,18}}$$

Megoldás:

$$\frac{P}{d^5 \cdot n^3 \cdot \rho} = 6 \left(\frac{d^2 n \rho}{\eta} \right)^{-0,18}$$

$$d^{5-0,36} = d^{4,64} = \frac{P}{6n^{2,82} \rho^{0,82} \eta^{0,18}} = \frac{500}{6,8^{2,82} 1200^{0,82} (10^{-2})^{0,18}} = 1,63 \cdot 10^{-3}$$

$$d = (0,00163)^{\frac{1}{4,64}} = 0,25m$$

3. A keverésre a következő dimenzió nélküli számok jellemzőek:

- Re
- Pr
- Gr
- Eu
- Fr

Megoldás: a, d, e

4. A következő keverőtípusok közül válassza ki a mechanikus keverőket!

- karos keverő
- turbókeverő
- pneumatikus gyorskeverő
- ütközőelemes gyorskeverő
- propellerkeverő

Megoldás: a, b, e

5. A folyadékkeverők _____ a következő paraméterektől függ: a keverőedény és a lapátok geometriai paraméterei, a fordulatszám, a folyadék sűrűsége, viszkozitása.

Megoldás: teljesítményszükséglete

6. A _____ forgó-mozgó alkatrész nélküli, csőbe sorozatban beépített, merev terelő lemezes szerkezetek.

Megoldás: sztatikus keverők

7. A következő képletek közül melyik nem írja le helyesen egy folyadékkeverő teljesítményszükségletét?

a. $P = Eu \cdot \rho \cdot n^3 \cdot d^5$

b. $P = \eta \cdot V \cdot \left(\frac{dv}{dx}\right)^2$

c. $P = C_1 q_{v, levegő} \log\left(\frac{h + C_2}{C_2}\right)$

d. $P = const \cdot Re_{kev.}^{-m} Fr_{kev.}^{-n}$

e. $P = 6 \cdot \rho \cdot n^3 \cdot d^5 \cdot Re^{-0,18}$

Megoldás: d

8. Mekkora tartózkodási idő jellemző egy gyorskeverő berendezésben?

- a. 3 s
- b. 30 s
- c. 30 min
- d. 3 óra
- e. 0,3 óra

Megoldás: b

12. Az ülepítés hidrodinamikája

Az ülepítés: két nem elegyedő folyadék vagy fluidum - szilárd anyag szétválasztási művelete a sűrűségkülönbségük alapján a gravitációs erő segítségével.

Sok esetben a művelet meggyorsítása érdekében a gravitációs gyorsulás helyett a centrifugális gyorsulást (ω^2) alkalmazzák, vagy elektrosztatikus erőterben végzik el a műveletet.

A gravitációs ülepítés gyakori a környezetmérnöki műveletekben, legfontosabb terület a kémiai tisztítási eljárással kicsapatott pelyhek eltávolítása.

A vízkezelésnél ezen kívül az alábbi területen kerül alkalmazásra:

- Felszíni vizek előülepítése a homokszűrés előtt,
- Koaguláltatás és flotálást követő ülepítés,
- Koaguláltatás és flotálást követően a mésztejes lágyítás előtt.
- Vas vagy magnézium eltávolítást követő ülepítés

Szennyvízkezelésnél alkalmazott ülepítések:

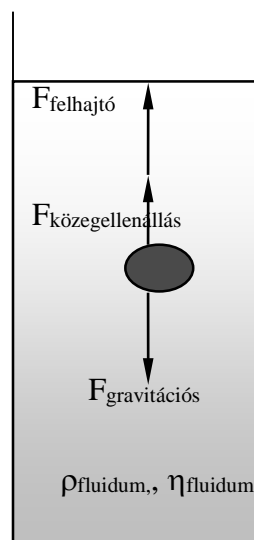
- Hordalék, iszap, kőpor, homok eltávolítás.
- Szuszpendált részecskék eltávolítása az előtisztításnál.
- Végztisztítóknál a biológiai pelyhek eltávolítása

A gravitációs ülepedés hajtóereje limitált, kicsiny érték, ezért ott célszerű alkalmazni, ahol:

- viszonylag nagy az ülepedési sebesség, mert d elég nagy és a sűrűségkülönbség is jelentős: pl. Porkamrák, homokszemcsék, sár, föld, héjrészecskék, magok kiülepítése,
- olyan nagymennyiségű fluidumot kell tisztítani, ami más módon nagyon költséges lenne : szennyvizek, mosóvizek.

12.1. Részecske ülepedése gravitációs erőterben

A szemcse fizikai jellemzőitől (alak, méret, sűrűség) függően ülepedni vagy lebegni fog. Az érvényességi határ az a legkisebb részecske méret, amelyet nem befolyásol a Brown f. hőmozgás.



99. ábra: Fluidumban mozgó részecskére ható erők

Ha egy részecske nulla sebességről indulva kezd ülepedni, vagyis a súlyerő nagyobb min a közegellenállási erő, a részecske gyorsul. Ez a sebesség növekedés mindaddig tart, ameddig a részecske olyan sebességre gyorsul, hogy a súlyerővel a közegellenállási erő egyensúlyt tart, tehát az ülepedő részecske akkor ülepszik állandó sebességgel, ha a ráható erők eredője nulla:

$$F_{grav} - F_{felhajtó} = F_{súly} = F_{közeggell} \quad (9.1)$$

Tegyük fel, hogy .

1. A szemcse gömb alakú: ülepedés szempontjából egyenértékű szemcseátmérő a vizsgált szemcsével azonos sebességgel ülepedő gömb átmérője.
2. A szemcse nem forog.
3. Az alapközeg áll, vagy laminárisan áramlik.
4. A szemcsék egymásra nem hatnak. (Max konc. 4 g/l)
Polidiszperz rendszerekben a nagyobb szemcsék zavarják a kisebbeket, amelyek viszont gátolják a nagyobbak mozgását, sőt agglomerálódhatnak.

A szemcsék körüli áramlás jellegét a Reynolds szám határozza meg:

$$Re = \frac{v_{ülep} d_e \rho_{közeg}}{\eta} \quad (9.2)$$

Ahol, $v_{ülep}$ – az ülepedési sebesség [m/s],

d_e – az ülepedő részecske egyenértékű gömbátmérője [m]

$\rho_{közeg}$ – a közeg sűrűsége [kg/m^3],

η – a közeg viszkozitása [Pas]

Mozgó test közegellenállását meghatározhatjuk az alábbi összefüggéssel:

$$F_k = C_{Eu} \cdot A \cdot \rho \frac{v^2}{2}$$

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} \quad (9.3)$$

$$C_{Eu} = \frac{F_k}{\frac{A}{v^2 \rho}} \cong \frac{\Delta p}{v^2 \rho} = \lambda_{ü}$$

ahol F_k az ellenállási erő, C_{Eu} a közegellenállási tényező, A a körüláramlott testnek a mozgás irányára merőleges vetülete, ρ a közeg sűrűsége, $\lambda_{ü}$ a súrlódási együttható.

Turbulens áramlás esetén az egyensúlyt tartó súly- és közegellenállási erő:

$$F_{grav} - F_{felhajtó} = V_{szemcse} \rho_{szemcse} g - V_{szemcse} \rho_{közeg} g = F_{súrlódási}$$

$$\frac{d^3 \pi}{6} g(\rho_1 - \rho_2) = \lambda_{ii} \frac{d^2 \pi}{4} \frac{v^2 \rho}{2} \quad (9.4)$$

ahol ρ_1 a szemcse, ρ_2 pedig a közeg sűrűsége.

Ebből az ülepedő test sebességét kifejezve:

$$v_{ii} = \sqrt{\frac{4dg(\rho_1 - \rho_2)}{3\lambda_{ii}\rho_2}} \quad (9.5)$$

lamináris áramlásnál a Stokes törvény alapján ($F_{súrl} = 3\pi\eta v_{ii}d$):

$$\frac{d^3 \pi}{6} g(\rho_1 - \rho_2) = 3\pi\eta v_{ii}d \quad (9.6)$$

$$v_{ii} = \frac{d^2(\rho_1 - \rho_2)g}{18\eta} \quad (9.7)$$

átmeneti tartományban pedig:

$$v_{ii} = \lambda_{ii}g(\rho_1 - \rho_2)^{2/3}d \quad (9.8)$$

Fluidumban mozgó testek esetén az alábbi intervallumuknál húzzuk meg a választóvonalat:

$$\text{Re} < 0,6 \quad \text{STOKES tartomány} \quad \lambda_{ii} = \frac{24}{\text{Re}}$$

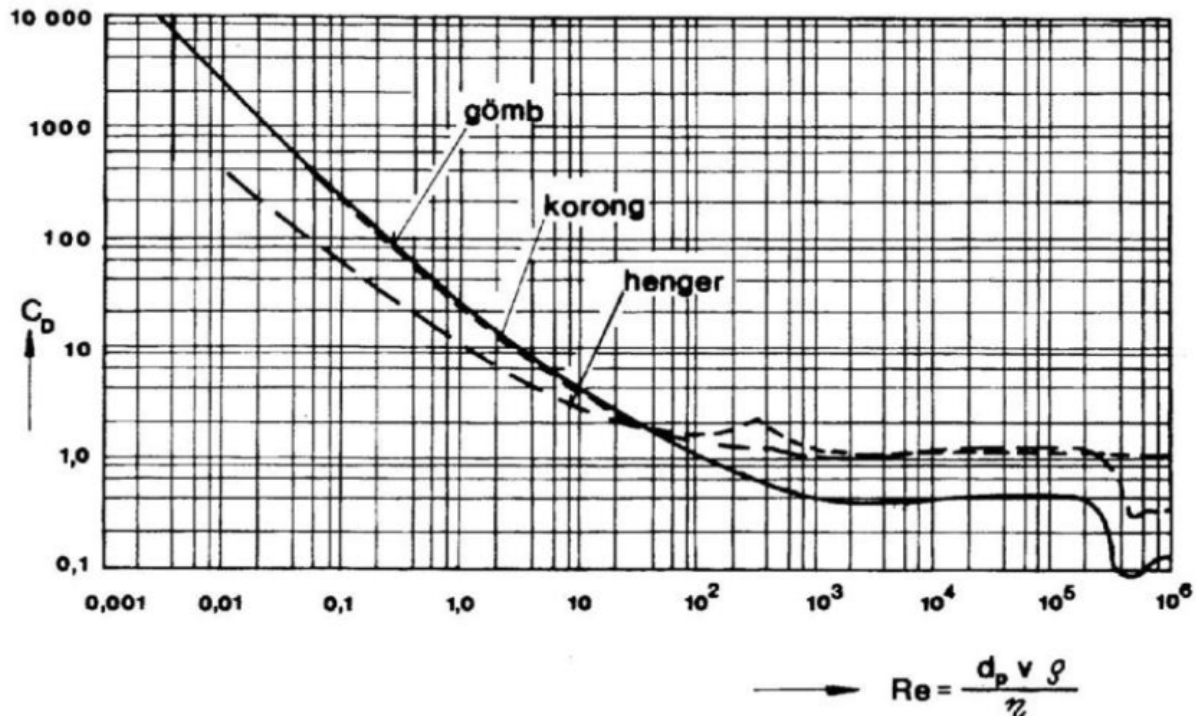
A lamináris Stokes tartományban az áramvonalak a részecske előtt és után szimmetrikusak, a folyadék áramlása a testtől elég távol létezik csak. A részecskék között csak súrlódás van, az áramlási örvényképződések, leválások szerepe elhanyagolható.

$$0,6 < \text{Re} < 600 \quad \text{ALLEN tartomány} \quad \lambda_{ii} = \frac{18,5}{\text{Re}^{0,6}}$$

Az átmeneti Allen tartományban test mögötti holtterben az örvény cirkulációja szimmetrikus és szabályos. A lamináris réteg vékonyodik.

$$600 < \text{Re} \quad \text{NEWTON tartomány} \quad \lambda_{ii} \approx 0,44$$

A turbulens Newton tartományban a test mögötti örvény mindjobban leszakad a testről, szabálytalanná válik. A lamináris réteg egész vékony a test környezetében. Az ellenállástényező állandónak vehető, mert örvénylések, leválások hatása a meghatározó, súrlódás hatása kisebb.



100. ábra: Az ülepedési ellenállási tényező a Re és az alakú tényező függvényében

Turbulens tartományban a különböző alakú részecskék ellenállása jelentősen eltér egymástól. Csak a szabályos gömb alakú részecskék ellenállási tényezője tekinthető 0,44-nek. A szabálytalan alakú részecskék sebességének meghatározása esetében turbulens- és átmeneti tartományban korrekcióra van szükség, azaz nem alkalmazhatjuk a gömbre meghatározott λ_{ii} értékeket, hiszen a közegellenállási tényező λ_{ii} két részből tevődik össze: az egyik része az áramlási leválások, örvényképződések okozta veszteségek, amelyet erősen meghatároz a részecske alakja, a másik a test és a fluidum közötti súrlódó erők eredője.

Az ülepedési sebesség számítása azonban csak lamináris esetben kézenfekvő, ahol az ülepedési sebesség nem függ a súrlódási tényezőtől, turbulens és átmeneti tartományban azonban iterálni kell, hiszen λ_{ii} értékének kiszámításához ismerni kell a Re számot, ahhoz pedig a sebességet.

Az iteráció megkerülésére a KÁRMÁN féle módszert alkalmazzuk:

Mindazon fizikai jelenségekre, amelyekben a sebességet gravitációs erő idézi elő, a dimenzió nélküli csoportok olyan kombinációja lesz érvényes, melyben a sebesség explicit módon nem szerepel az összefüggésben. Ilyen dimenzió nélküli szám a Galilei és az Archimedesi szám:

$$\frac{Re^2}{Fr} = \frac{gd^3}{v^2} = Ga, \quad (9.9)$$

ahol v a kinematikai viszkozitás, d pedig a részecske átmérője.

$$Ga \frac{\Delta\rho}{\rho} = Ar = \frac{d^3 g (\rho_1 - \rho_2) \rho_2}{\eta^2} \quad (9.10)$$

Ha a turbulens ülepedési sebesség számolóképletét négyzetre emeljük és a sebességet a Re-számmal kifejezve helyettesítjük be, és ezek után a $\lambda_{\ddot{u}}\text{Re}_{\ddot{u}}^2$ -re rendezzük, akkor az Archimedesi kritériumhoz jutunk:

$$\lambda_{\ddot{u}} \text{Re}_{\ddot{u}}^2 = \frac{4 d^3 g (\rho_1 - \rho_2) \rho_2}{3 \eta^2} = \frac{4}{3} Ar \quad (9.11)$$

Mivel az Archimedesi szám csak méretet és anyagi jellemzőket tartalmaz (sebesség nincs benne), az összefüggés közvetlen függvénykapcsolatot hoz létre az ülepedési sebesség és az ülepedő részecske átmérője között.

Lamináris tartományban:
$$\frac{24}{\text{Re}} \text{Re}^2 = \frac{4}{3} Ar \quad (9.12)$$

$$\text{Re} = \frac{Ar}{18} \quad (9.13)$$

tehát, ha az Archimedesi szám kisebb, mint 3,6 akkor az áramlás lamináris.

Az Archimedesi hasonlósági kritériumot akkor használják, ha a szemcseméret és az anyagi jellemzők ismertek. A függvénykapcsolat ismeretében a Re szám meghatározható és ebből a $v_{\ddot{u}}$ ülepedési sebesség kiszámítható.

Az Archimedesi kritérium mintájára meghatározható a Ljascsenkó kritérium melyben csak sebesség fordul elő, az ülepedő részecske mérete nem.

$$Ly = \frac{\text{Re}^3}{Ar} = \frac{\rho_2^2 v^3}{g(\rho_1 - \rho_2)\eta} \quad (9.14)$$

A Ljascsenkó kritériumot akkor használjuk, ha az ülepedési sebesség ismert. A függvénykapcsolat segítségével $v_{\ddot{u}}$ ismeretében a Re szám meghatározható, és ebből d , szemcse hidrodinamikai jellemző mérete számítható.

$$\boxed{\frac{\lambda_{\ddot{u}}}{\text{Re}_{\ddot{u}}} = \frac{4 g (\rho_1 - \rho_2) \eta}{3 \rho_2^2 v^3} = \frac{4}{3} \frac{1}{Ly}} \quad (9.15)$$

A Ly és az Ar számok ismeretében az ülepedési Re szám nomogram segítségével meghatározható, így lehetőség nyílik a súrlódási tényező, illetve az ülepedési sebesség vagy a szemcse hidrodinamikai méretének számítására

Ha a szemcse nem gömb alakú, az összefüggések az ellenállás-tényező módosított alakjával (f) érvényesek, ekkor az ülepedési sebesség lamináris tartományban:

$$v_{\ddot{z}} = f \frac{d^2 (\rho_1 - \rho_2) g}{18 \eta} \quad (9.16)$$

$$f = 0,843 \lg \frac{\Psi}{0,065}$$

Turbulens és átmeneti tartományban:

$$v_{ii} \cong \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\Delta\rho}{\rho} g d \frac{1}{\lambda_{ii}}}$$

$$\text{ha } 0,6 \leq \text{Re} \leq 8 \quad \text{akkor } \lambda_{ii} = (1,0795 - 0,9921\Psi)\sqrt{\text{Re}} \quad (9.17)$$

$$\text{ha } 8 \leq \text{Re} \leq 300 \quad \text{akkor } \lambda_{ii} = 3,70 - 3,40\Psi$$

$$\text{ha } 300 \leq \text{Re} \leq 2500 \quad \text{akkor } \lambda_{ii} = 3,46 - 3,18\Psi$$

Az összefüggésben Ψ az alak tényező (szfericitás), a gömbtől való eltérés mértéke, ($\Psi = A_{\text{gömb}} / A_{\text{szabálytalan test}}$), f pedig a korrekciós alakfaktor.

4. táblázat: Korrekciós alakfaktorok (f)

$\lambda_{ii}\text{Re}^2$	f				$\lambda_{ii}/\text{Re}_{ii}$
	lekerekített	sarkos	hosszúkás	lapos	
20 400	0,80	0,68	0,61	0,45	$6 \cdot 10^{-3}$
25 500	0,79	0,67	0,59	0,44	$4 \cdot 10^{-3}$
51 000	0,79	0,67	0,59	0,43	$2,5 \cdot 10^{-3}$
127 500	0,75	0,65	0,56	0,42	$8 \cdot 10^{-4}$
255 000	0,75	0,64	0,56	0,40	$6 \cdot 10^{-4}$
510 000	0,74	0,63	0,56	0,39	$3 \cdot 10^{-4}$

A sűrűségkülönbségük alapján hidrodinamikai úton választhatók el a különféle szemcsék. Az ülepités az azonos sebességgel ülepedő szemcséket egy frakcióba gyűjti. Ha a kiindulási halmaz azonos sűrűségű, az ülepités nagyság szerinti frakcionálását, ha a szemcsenagyság állandó, sűrűség szerinti osztályozást tesz lehetővé.

12.2. Több szemcse egyidejű ülepedése gravitációs erőterben

Az iparban sohasem egyetlen szemcse mozog a fluidumban, hanem szemcsék halmaza. Az egy szemcsére levezetett alapvető fizikai törvény módosul a szemcsék kölcsönhatásainak eredményeként. Ha a fluidumban sok szemcse van jelen, a szemcsék egymásra is hatnak, akadályozzák egymást a szabad mozgásban, gátolják egymás ülepedését, csökken az ülepedési sebességük. Ilyenkor gátolt ülepedésről beszélünk. A gátolt ülepedés lassúbb, mint az egyetlen szemcsére számított ülepedési sebesség.

Két szemcse ülepedése esetén a fluidum áramlásához szükséges szabad keresztmetszet a szemcsék között csökken, a sebesség növekszik, ez növeli a sűrűdést, hatására a szemcsék forgásba jönnek és egymáshoz közelednek.

Több szemcse együttes ülepedése esetén különböző időpontokban egymás után három ülepedési helyzet figyelhető meg:

1. híg szuszpenzióban a szilárd részecskék egyenletesen oszlanak szét
2. alul már kiülepedtek a szemcsék, felül már a letisztult folyadék, középen sűrű zagy,
3. alul összegyűlt iszap, felette a kitisztult folyadék.

Ebben az esetben a szemcsehalmaz ülepedésekor változik a koncentráció, csökken az ülepedési sebesség. Ha nagy a koncentráció, a fluidum bezáródik a szemcsék közötti térbe, és onnan nem tud távozni, az ülepedés végén laza iszapot eredményez.

A halmaz és az egyetlen szemcse ülepedési sebességének viszonya dimenzió nélküli mennyiség, amely a szuszpenzió sűrűségének növekedésével csökken. A tapasztalatok alapján 4 tf%-nál nagyobb koncentrációjú szuszpenziók esetében már számolni kell a gátolt ülepedéssel. A kisebb méretű szemcsék ($d = 0,2$ mm) ülepedési sebessége nagyobb mértékben csökken a koncentráció növekedésével, mint a nagyobb ($d = 0,3$ mm) szemcséké.

12.2.1. Ülepedés nem végtelen térben

Az ülepedés törvények szigorúan csak egy részecskére vonatkoznak, mely végtelen térfogatú folyadékban ülepedik. Ha a folyadék térfogata nem végtelen, számolni kell a falhatással. Ennek lényege, ha a részecske d átmérője nem hanyagolható el az edény D átmérőjéhez képest, akkor, $v_{\text{ü}}$ mellett figyelembe kell venni a kiszorított folyadék visszaáramlási sebességét (v_{fl}) és így a részecske relatív ülepedési sebessége (v_r):

$$v_r = v_{\text{ü}} - v_{\text{fl}}$$

A falhatást figyelembe vevő relatív ülepedési sebességet leíró közelítő képletek:

$$v_r = \frac{v_{\text{ü}}}{1 + 2,4 \frac{d}{D}} \quad \text{Landenburg} \quad (9.18)$$

$$v_r = v_{\text{ü}} \left(1 - \frac{d}{D}\right)^{2,25} \quad \text{Francis} \quad (9.19)$$

ahol d a részecske átmérője, D az edény átmérője.

A falhatás mellett a szomszédos testek kölcsönhatásával is számolni kell. Az ülepedő részecskék közötti tér leszűkül, mégpedig a szuszpenzió sűrűségével arányosan. Az ülepedő szemcsék által kiszorított folyadék visszafelé áramlása csökkenti a relatív ülepedési sebességet. Mivel a szuszpenzió koncentrációjának meghatározó szerepe van az ülepedési sebesség alakulásában, a számítások során a látszólagos viszkozitás és a folyadék sűrűsége is korrekcióra szorul. Az ülepedési sebességek számításánál a szuszpenzió sűrűségét és viszkozitását a következő képletekkel számíthatjuk:

$$\rho_{\text{szuszp}} = V_{\text{sz}} \cdot \rho_r + (1 - V_{\text{sz}}) \rho_{\text{fl}}$$

$$\eta_{\text{szuszp}} = \eta_{\text{fl}} (1 + 2,4 \cdot V_{\text{sz}})$$

ahol V_{sz} a szuszpendált részecskék térfogatának aránya a szuszpenzióban.

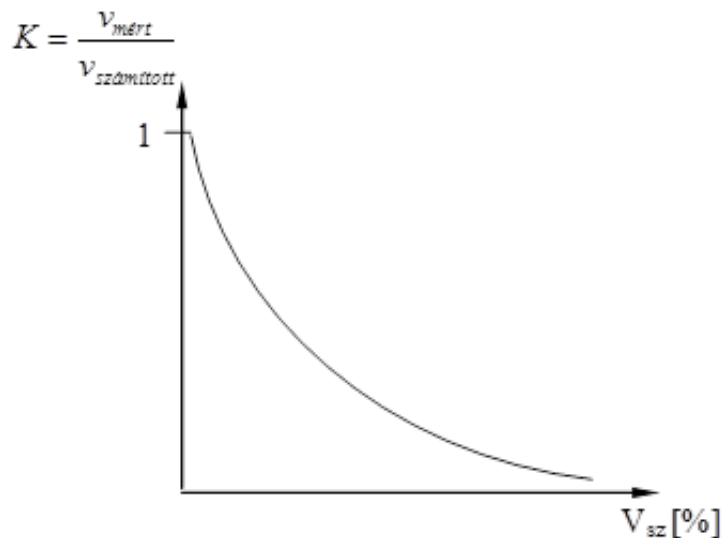
A szuszpenzió koncentrációját a következőképpen számítjuk:

$$V_{\text{sz}} \% = \frac{\text{szuszpendált részecskék térfogata}}{\text{egész szuszpenzió térfogata}} 100\% \quad (9.20)$$

A K sebesség korrekció faktor:

$$K = \frac{v_{\text{mért}}}{v_{\text{számított}}} \quad (9.21)$$

a mért és a számított adatok közötti eltérés mértékéről ad felvilágosítást. A $K=f(V\%)$ függvény segítségével meghatározhatjuk a tényleges ülepedési sebességet, amely ismeretében számítható egy ülepitő tényleges teljesítménye.

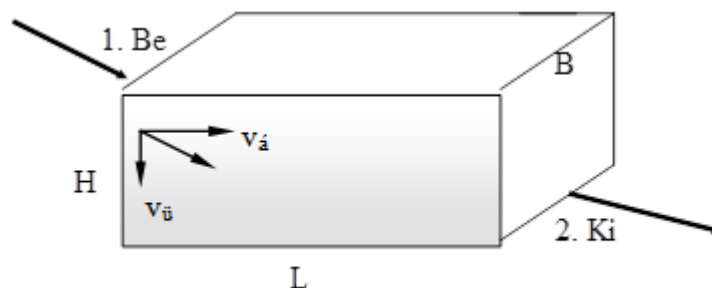


101. ábra: A korrekciós tényező szuszpenzió sűrűségének függvényében

12.3. Ülepítő berendezések

Az ülepitő berendezések esetében az a cél, hogy az anyagunk minél rövidebb idő alatt minél nagyobb mennyiségű anyag kiülepíthető legyen, vagyis az ülepitő teljesítményét elsősorban az ülepedési sebesség határozza meg. Annál eredményesebb az ülepités, minél rövidebb az ülepedési úthossz, illetve minél nagyobb az ülepitő felület.

Az ülepitők kapacitásán azt a térfogatáramot értjük, amely mellett a kívánt sebességgel ülepedő részecskék kiülepednek. Vizsgáljuk meg, hogy mi szabja meg egy porkamra kapacitását! Legyen a porkamra hosszúsága L, szélessége B, magassága H



102. ábra: Porkamra

Az 1. pontban belépő részecske sebessége megegyezik az áramló fluidum lineáris áramlási sebességével:

$$v_a = \frac{q_v}{A} = \frac{q_v}{H \cdot B} \quad (9.22)$$

A részecske tartózkodási ideje a porkamrában: $\tau_a = \frac{L}{v_a}$.

Ha a részecske $v_{\ddot{u}}$ sebességgel ülepszik, az ülepedésének ideje: $\tau_{\ddot{u}} = \frac{H}{v_{\ddot{u}}}$

Ahhoz, hogy kamra 1. (legfelső) pontjánál belépő részecske is kiülepedjen, mielőtt a kamrát elhagyná a 2. pontban, az ülepedési időnek rövidebbnek kell lennie, mint a tartózkodási idő:

$$\tau_a \geq \tau_{\ddot{u}}$$

mivel $\tau_a = L/v_a \geq H/v_{\ddot{u}} = \tau_{\ddot{u}}$

Behelyettesítve:

$$\frac{L \cdot H \cdot B}{q_v} = \frac{H}{v_{\ddot{u}}}$$

$$q_v = v_{\ddot{u}} \cdot L \cdot B, \quad (9.23)$$

vagyis az ülepitő kapacitása független az ülepitő magasságától, és egyenesen arányos az ülepitő alapterületével. Az ülepitő magasságától a kiülepedett részecskék mérete függ.

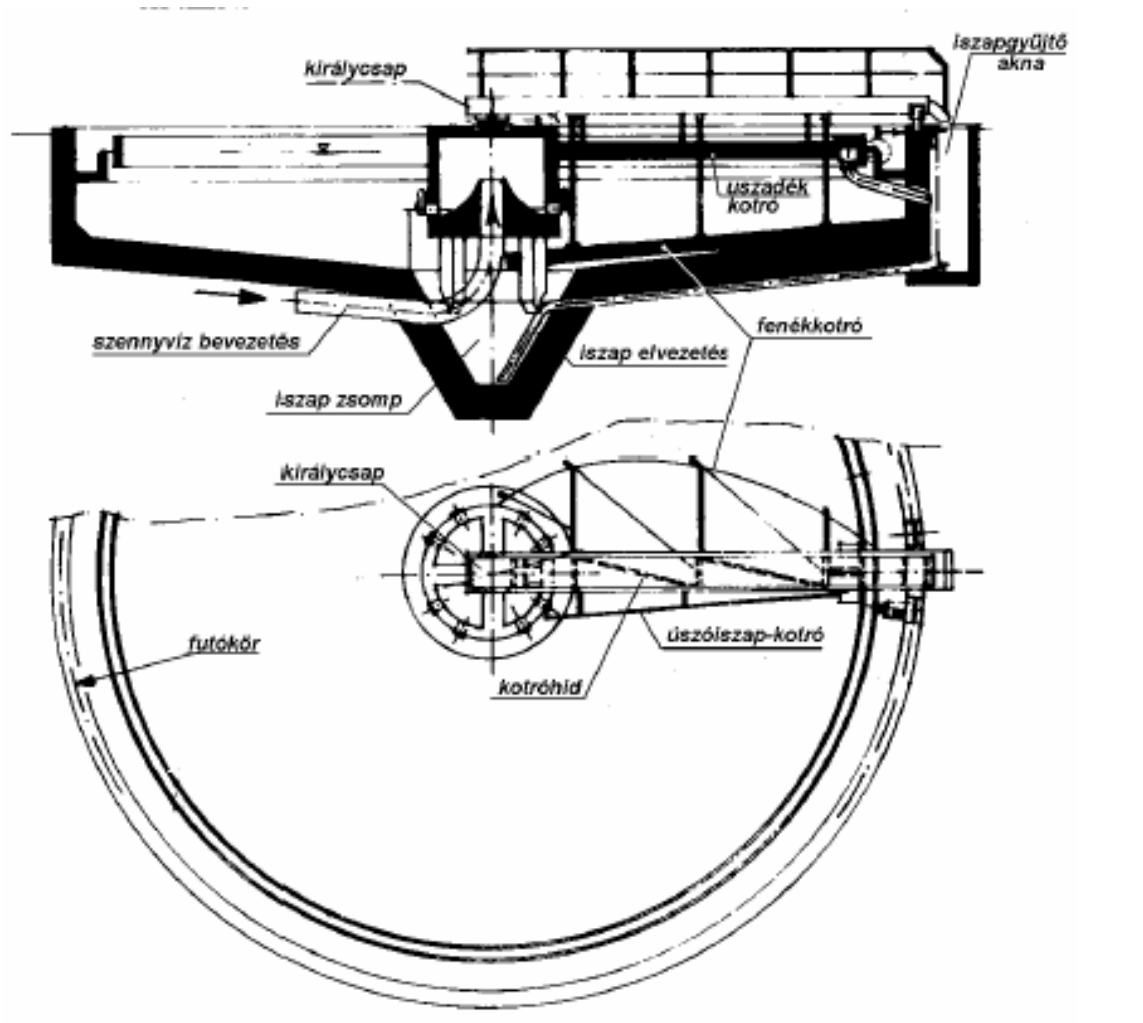
Ebből következően az ülepitő felület általában az

$$A_{\ddot{u}} = \frac{q_v}{v_{\ddot{u}}} \quad (9.24)$$

összefüggéssel számolható, ahol q_v az ülepitendő folyadék térfogatárama, $v_{\ddot{u}}$ pedig az ülepedési sebesség.

Az ülepitő berendezések összehasonlítására és méretezésére alkalmas jellemző a fajlagos ülepitő felület ($A_{f,\ddot{u}}$), amely azt adja meg, hogy az adott berendezésben mekkora ülepitő felület szükséges egységnyi tömegű szuszpenzió leválasztásához egységnyi idő alatt.

Az ülepitő tartályok nagy átmérőjű, lapos tartályok. Klasszikusnak számít a Dorr ülepitő kád (**103. ábra**). A zagyot a sűrű és a tiszta folyadék határán tápláljuk be, a tiszta folyadékot felül, a zagyot alul vezetjük el. A folyadék az ülepitőben sugárirányban áramlik, az alsó kúpos részen kaparószerkezet sodorja az iszapot az elvétel helyére. Az ülepitő felület a tartályba helyezett lemezekkel növelhető, az ülepedési út és idő csökkenthető, gyorsabb a szétválás.



103. ábra: Dorr ülepitő

Ha a folyadék vagy a gáz, amelyben az ülepedés történik, maga is áramlik, a szemcsék ülepedési sebességének különbözősége miatt az ülepitő berendezésben áramlásos osztályozás is megvalósítható. Az ülepedő szemcse a gravitáció hatására ülepszik, illetve a folyadék saját áramlási irányában magával ragadja. A szemcse pályáját a két sebesség eredő vektora határozza meg. A lassabban ülepedő szemcsék távolabbra kerülnek, így könnyen elválaszthatók a gyorsabban ülepedő részecskéktől. Alkalmazzák kőfogók esetében, pl. a cukorrépa, burgonya úsztatásos beszállításakor.

Példa:

1. Milyen hosszúra tervezzük az üzem 0,5 m magas, 1 m széles porleválasztó kamráját, ha a levegő térfogatárama 2500 m³/h, sűrűsége: 1,2045 kg/m³, viszkozitása: 18,19 · 10⁻⁶ Pas. A leválasztandó legkisebb részecskeméret 0,02 mm, sűrűsége: 1600 kg/m³

$$\tau_a = L / v_a \geq H / v_{ü} = \tau_{ü}$$

$$L = v_a H / v_{ü} = 35,57 \text{ m}$$

$$v_a = q_v / A = q_v / Hb = 2500/3600 / 0,5 \cdot 1 = 1,38 \text{ m/s}$$

$$Ar = d^3 \rho^2 g \Delta \rho / \eta^2 \rho = 0,4656 \text{ lamináris}$$

$$Re = Ar/18 = 0,0258$$

$$v_{ü} = Re \eta / d \rho = 0,01952$$

2. Határozzuk meg a 20°C-os levegőben eső, 30 μm átmérőjű porszemcsék sebességét. Ismert fizikai adatok: levegő viszkozitása: 18×10^{-6} Pas, sűrűsége: 1,19 kg/m³. Az ülepedő por sűrűsége: 3050 kg/m³.

Mivel az ülepedő részecske méretét ismerjük, így az Ar kiszámítható:

$$\lambda_{ii} \text{Re}_{ii}^2 = \frac{4 d^3 g (\rho_1 - \rho_2) \rho_2}{3 \eta^2} = \frac{4}{3} Ar$$

$$\lambda_z \text{Re}_z^2 = \frac{4 (30 \cdot 10^{-6})^3 g (3050 - 1,19) 1,19}{3 (18 \cdot 10^{-6})^2} = 4,021$$

Nomogramról leolvasva Re_{ii} értéke: 0,16, így a sebesség:

$$v_{ii} = \frac{\text{Re} \cdot \eta}{d \cdot \rho_{lev}} = \frac{0,16 \cdot 18 \cdot 10^{-6}}{30 \cdot 10^{-6} \cdot 1,19} = 0,083 \frac{m}{s}$$

3. Az előző feladat adataival számolva mekkora annak a szemcsének az átmérője amelyik még laminárisan esik?

Gyakorlatilag lamináris tartománynak tekinthető minden olyan ülepedés, melynél $\text{Re} = 1$, így:

$$\text{Re}_{\max} = \frac{d_{\max} v \rho}{\eta}$$

v ülepedési sebesség tehát az alábbi képletekkel írható fel:

$$v = \frac{\text{Re} \eta}{d_{\max} \rho} = \frac{d_{\max}^2 \Delta \rho g}{18 \eta}$$

A maximális szemcseméretet kifejezve:

$$d_{\max} = \sqrt[3]{\frac{18 \eta^2 \text{Re}}{\Delta \rho \rho g}} = \sqrt[3]{\frac{18 \cdot 18^2 \cdot 10^{-12} \cdot 1}{3050 \cdot 1,19 \cdot 9,81}} = 54,7 \cdot 10^{-6} m$$

4. A 4 m/s sebességgel felfelé áramló 20 °C-os füstgáz milyen méretű szálló-hamu szemcséket tud lebegésben tartani? A füstgáz sűrűsége 0,748 kg/m³, kinematikai viszkozitása: $32,8 \times 10^{-6}$ m²/s, a hamu sűrűsége pedig: 2230 kg/m³.

Azok a hamurészecskék lebegnek a füstgázban, melyek ülepedési sebessége megegyezik a gáz áramlási sebességével. Felírhatjuk tehát: $v_{gáz} = v_{ühamu}$

Az ülepedési sebesség ismeretében a Ly szám és a nomogram segítségével a részecske jellemző mérete (d_c) meghatározható:

$$\lambda_z / \text{Re}_z = \frac{4}{3} \frac{g(\rho_1 - \rho_2)\eta}{\rho_2^2 v^3} = 1 / Ly$$

$$\lambda_z / \text{Re}_z = \frac{4}{3} \frac{9,81(2230 - 0,748)43,8 \cdot 10^{-6}}{0,748^2 4^3} = 1,4988 \cdot 10^{-2}$$

A nomogramról leolvasott Re érték 60, így a részecske mérete:

$$d_{\max} = \frac{\text{Re} \cdot \nu}{v} = \frac{60 \cdot 32,8 \cdot 10^{-6}}{4} = 4,92 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

12.4. Flotálás

Az anyagok nedvesíthetősége különböző. Vannak könnyen nedvesíthető hidrofil és nehezen nedvesíthető vagy hidrofób anyagok. A nedvesíthetőség mértéke a három fázis határfelületén kialakuló szöggel jellemezhető:



104. ábra: Hidrofil és hidrofób anyagok nedvesítési szögei

Ha a folyadékban gázbuborékokat diszpergálunk, akkor a hidrofób tulajdonságú anyagok (pl. szilárd részecskék, olajcseppek) a buborékokhoz tapadva felúsztathatók. A felúszó buborékokból hab képződik és ez a szemcséket is tartalmazó hab a folyadékról lefölközhető.

A flotálást különböző adalékokkal segítik elő:

Habképzők: a légbuborékok diszpergált állapotban tartását a képződő hab stabilitását segítik. Ezek a víz felületi feszültséget csökkentik.

Gyűjtő reagensek: a hidrofób jelleg növelésével hatnak. Ilyen anyagok petróleum, zsírsavak.

Módosító reagensek: elsősorban pH szabályozók.

A flotálást ércek dúsítására már a múlt században is alkalmazták. Magyarországon galenit és szén dúsítására alkalmazzák. Az utóbbi időben a szennyvíz technológiákban a jelentősége növekedett, mert a szennyező anyagok jelentős része annyira hidrofób, hogy adalékok nélkül is flotálható. A flotálás eredményesen alkalmazható az olajkiválás elősegítésére. A légbuborékok hatására az apró olajcseppek felúszási sebessége sokszorosára növelhető.

A flotálást elterjedten alkalmazzák pl. húsipari, tejipari, konzervipari baromfiipari szennyvizek tisztítása során..

Leggyakrabban alkalmazott berendezés típusok:

Légbefúvós flotálók: Buborékképzés perforált, porózus anyagokkal vagy keveréssel.

Oldott levegős flotálók: A 4 - 6 bar nyomáson telített folyadékot atmoszférikus nyomásra expandáltatva a levegő buborékok kiválnak.

Elektroflotálás: 5-10V-os egyenárammal, elektrolízissal bontják a vizet, a felszálló buborékok hidrogén és oxigén molekulák. Energia igénye: 0,5-0,7 kWh/m³.

12.5. Centrifugálás

Példa:

1. Csöves centrifuga alkalmazása esetén számítsuk ki az 70S ülepedési állandóval rendelkező riboszómák (E.coliból (0,02 μm)) tényleges ülepedési sebességét 20 °C-os víz esetében. A fordulatszám. 30 000 1/min, a tengelytől való távolság: 10 cm. Az ülepedési sebesség:

$$v_{ii} = Sr\omega^2 = 70 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot (2\pi \cdot 500)^2 = 6,9 \cdot 10^{-4} \text{ cms}^{-1}$$

2. 3600 percenkénti fordulattal rendelkező csöves centrifugával sós oldatból E.colit választunk le. Határozzuk meg a végső ülepedési sebességét a baktériumoknak melyek a tengelytől 10 cm távolságra helyezkednek el. A sós lé sűrűsége: 1000 kgm⁻³. az E. coli mérete kb. 0,8x2 μm, térfogata 1μm³-nyinek vehető, sűrűsége 1,1 gcm⁻³, egyenértékű gömbátmérője: 1,25 μm.

az ülepedési sebesség számítható az alábbi összefüggéssel:

$$v_{ii} = \frac{d^2(\rho_r - \rho_{fl})}{18\eta} r\omega^2 = \frac{(1,25 \cdot 10^{-4})^2 (1100 - 1000)}{18 \cdot 10^{-4}} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ ms}^{-1}$$

a részecskék szétválasztása érdekében alkalmazható, megengedhető/elérhető legnagyobb sebesség kiszámítása a következők alapján történhet:

a szuszpenzió a berendezés alján kerül betáplálásra q_v térfogatárammal, a megtisztított folyadék pedig felül távozik. A részecskék sugár irányú ülepedési sebességét az alábbi összefüggésből számíthatjuk.

$$v_{ii} = \frac{dr}{d\tau} = v_g \frac{r\omega^2}{g} = \frac{d^2(\rho_r - \rho_{fl})}{18\eta} r\omega^2$$

amikor a centrifuga forgó tengelyétől való távolsága a folyadék felszínnek (r₁) és a forgó dob palástjának (r₂), akkor a tengelyirányú folyadéksebesség (L a centrifuga dob/cső hossza) az alábbi képlettel számolható:

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{q_v}{A} = \frac{q_v}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}$$

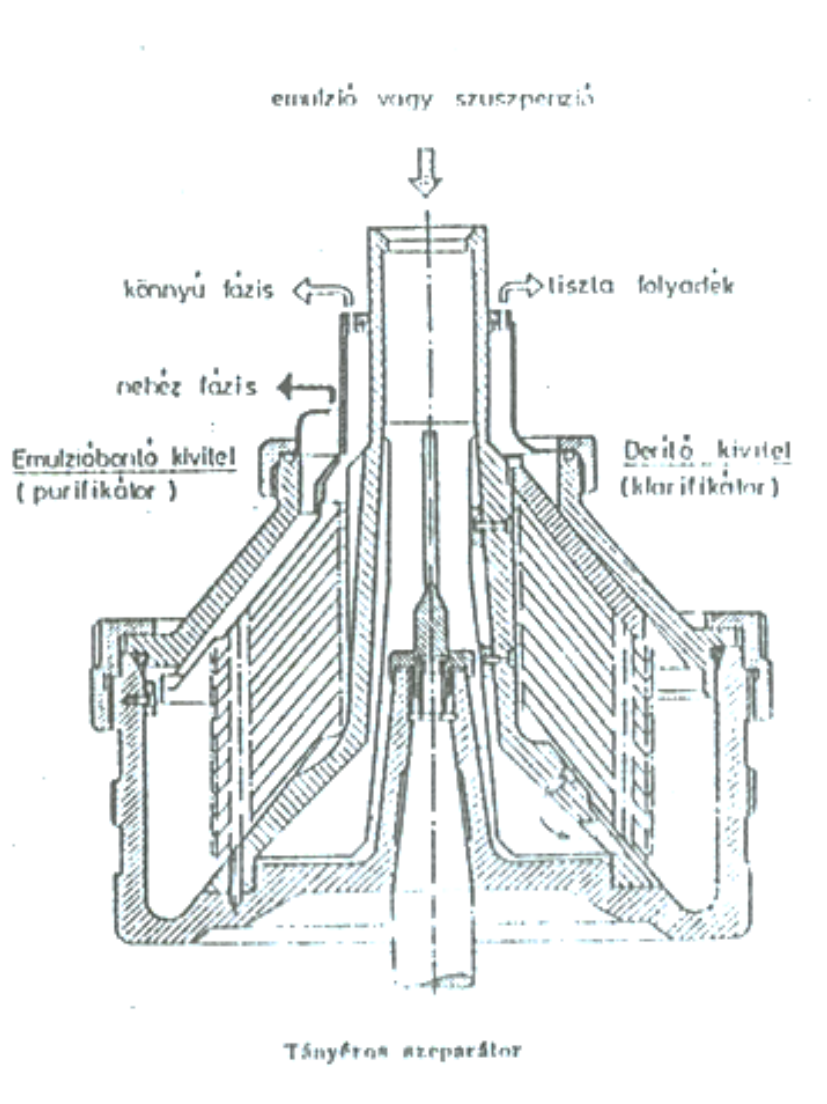
A kiválasztandó részecskéknek el kell érniük a centrifuga cső falát, mikor a betáplált folyadék felér a centrifuga felső végére, vagyis az axiális és radiális sebességhez tartozó időnek meg kell egyeznie. Ezt figyelembe véve a fenti egyenletek integrálásával r=r₁ és r=r₂ között, valamint l=0 (belépési pont) és l=L között, megkapjuk a maximális térfogatáram értéket, amely betáplálási érték mellett még „van idő” a részecskék kiülepedésére:

$$q_v = v_g \frac{\pi L (r_2^2 - r_1^2) \omega^2}{g \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

12.6. Szeparálás, emulzióbontás

Az ülepítés speciális esete az emulzióbontás, ekkor két különböző sűrűségű folyadék szétválasztását végezzük.

A tányéros szeparátorokban (105. ábra) a lemezes ülepítő analógiájára felszerelt kúpos tányérokon furatok vannak, amelyek elhelyezése a két folyadékot elválasztó határfelületre esik. A szeparátorokkal elérhető szétválasztás hatékonysága elsősorban a furatkörök elhelyezésétől függ. Mivel a könnyű folyadék az elválasztó zónától távolabb lép ki, míg a nehéz folyadék igen közel, ezért pl. a lyukak tengelytől való távolsága meghatározó az elválasztás hatékonyságára. A purifikátor, clarifikátor a könnyű, a koncentrátor a nehéz fázis minél tisztább előállítására alkalmas.



105. ábra: Szeparátor

12.7. Centrifugák

Szakaszos üzeműek

Merevtengelyű centrifugák: az első centrifugák voltak ilyenek, merev tengelyűek és alsó hajtást alkalmaznak. Elsősorban textíliák víztelenítésére használták egy 1836-os szabadalom alapján.

Ingacentrifugák: 50 %-nál több szilárdanyag tartalmú rendszerekre. Kiegyensúlyozatlan tömegek centrifugálására alkalmazható a 3 pontos, gömbcsuklós felfüggesztés miatt.

Kaparókéses centrifugák: Jól szűrhető, szemcsés anyagok esetén, keményítő, különböző kristályok, amelyek szűrési ideje igen rövid, az aktív üzemidő csak úgy növelhető, ha a felgyorsítási és fékezési idők elmaradnak. Erre alkalmas a hámozócentrifuga. A dob megtelte utána vízszintes és függőleges síkban is elmozduló kaparószerkezet választja le a szilárd anyagot, amely a kihordócsiga útján távozik a berendezésből. A kést hidraulikus munkahenger mozgatja.

Folytonos üzemű szűrőcentrifugák

Kúpos szűrőcentrifuga: vízszintes és függőleges tengellyel egyaránt készülnek. Az anyagot a kúp kisebb átmérőjén táplálják be, és az előrehaladó mozgást a dobban vagy vibráció vagy gyakrabban forgó csiga biztosítja. Teljesítményük rendkívül nagy, alkalmazhatók kis szilárdanyag tartalmú, nehezen szűrhető anyagokhoz is.

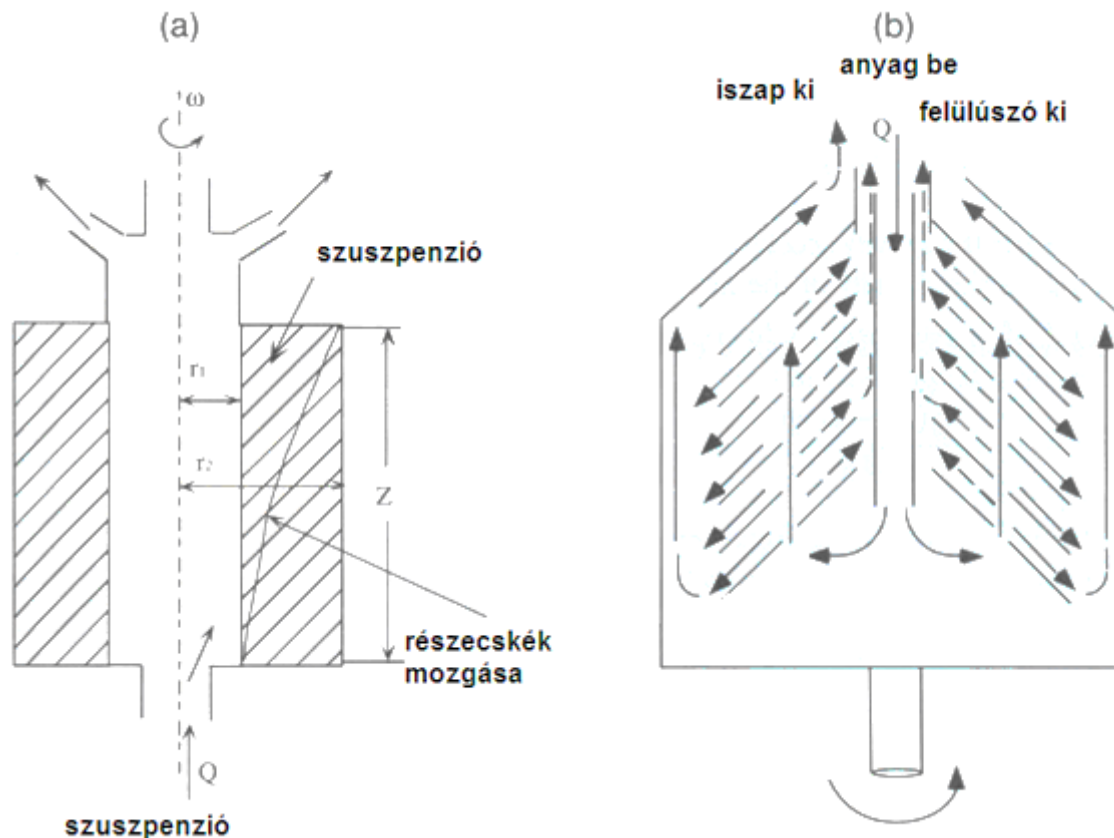
Folytonos üzemű ülepítő centrifugák

Csigás dekanter: jelzőszámuk a 2000-5000 tartományban mozog. Alkalmasak nagy szilárdanyag-tartalmú anyagok derítésére is. A csiga és a dob ellenkező irányba forog. A tisztított folyadék túlfolyással távozik a készülékből, a szilárd anyagot a csiga szállítja ki. Lényeges, hogy a csiga és a dob közötti fordulatszám-különbség ne legyen túl nagy, mert az felzavarhatja a lerakódott szilárd fázist. Ugyanakkor a legtöbb anyagfajtaához más és más relatív fordulatszám-különbség szükséges a tökéletes kiszállításhoz. A dob kúpos, ha azt akarjuk, hogy az iszap minél szárazabb legyen és hengeres, ha a folyadék minél tisztább legyen.

Derítő és emulzióbontó centrifugák

Jellemzőik: nem perforált dob, nagy jelzőszám, kis dobátmérő, tartózkodási idő rövid ezt a hátrányt orvosolni lehet a dob hosszának növelésével: csöves centrifuga; több koncentrikus dob rész alkalmazásával: kamrás centrifuga; rétegvastagság csökkentésével: tányéros centrifuga

Csőves centrifugák: Általában kis átmérőjű henger a forgórész és 0,2 %-nál alacsonyabb szárazanyag-tartalmú rendszereknél használható fel a kis iszap-befogadótér miatt. A kis átmérő nagy kerületi sebességet, és ezzel nagy jelzőszámot tesz lehetővé: 13 000 - 19 000, axiális áramlás, nagy tisztítóhatás (pl. FC-100 Zsírcentrifuga).



106. ábra: a) Csöves centrifuga, b) Tányéros centrifuga

Kamrás centrifugák: Fordulatszámuk és jelzőszámuk (1000 - 2500) lényegesen kisebb a nagy dobátmérők miatt.

A kamrás centrifugák a dobcentrifugákból fejlődtek ki azzal az igénnyel, hogy a nagy átmérőjű dobokban óhatatlanul jelentkező turbulenciát - amely a már leülepedett szuszpenziót gyakran ismét felkavarja - kiküszöbölje.

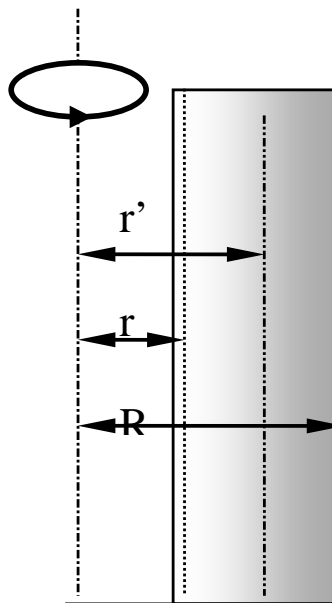
Derítő hatásuk kicsi, teljesítményük nagy, alkalmazásuk kis iszaptartalmú és jól ülepedhető szuszpenziókhoz ajánlott.

Az iszap méret szerinti szétválasztására is alkalmas, mivel a részecskék az átmérőjük függvényében válnak le a különböző dobokban.

Tányéros centrifugák: Jelzőszámuk általában 11 000-ig terjed. A tányérok szerepe a folyadék turbulenciájának és az ülepedési útnak a csökkentése. Ezzel jelentősen nő a teljesítmény és a tisztító hatás. A tányérok egymástól való távolsága jelentősen befolyásolja a tisztító hatást, minél közelebb vannak egymáshoz, annál hatékonyabban működnek.

Példa:

- Egy 1 m magas, 12 000 1/min forgó csőcentrifuga sugara 50 mm, a folyadékcsőé 20 mm.
folyadék viszkozitása: $3,9 \cdot 10^{-3}$ Pas, sűrűségkülönbség a fluidum és a részecskék között: 13 kg/m^3 , a részecskék mérete: 0,03 mm.
Mekkora legyen a térfogatáram, hogy a legkedvezőtlenebb helyzetű részecskék is kiülepedjenek?



107. ábra: Csőcentrifuga

Legkedvezőtlenebb helyzetű részecskék: $r = 20 \text{ mm}$

Átlagos helyzetű részecskék: $r' = 35 \text{ mm}$

$$\omega = 2\pi n/60 = 1256,6 \text{ 1/s}$$

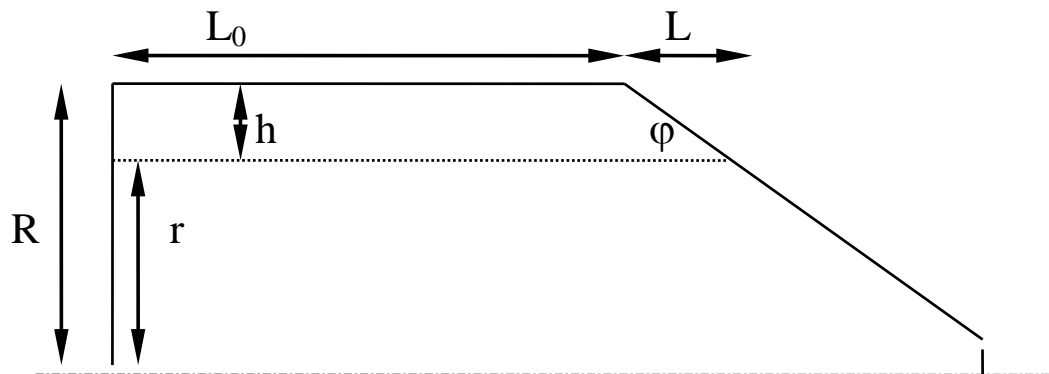
$$\Sigma = \pi/g \omega^2 L \frac{R^2 - r^2}{\ln R/r} = 1159 \text{ m}^2$$

$$v_g = \frac{d^2 \Delta \rho g}{18 \eta} = 1,63 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$$

$$q_v = v_g \Sigma = 1,89 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{átlagos helyzetnél: } q_v = 2,96 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

2. A dekanter átmérője 0,36 m, a hengeres rész hossza 0,55 m. A folyadékréteg vastagsága 25 mm, a kúpos rész kúpszöge 12° . A $150 \text{ m}^3/\text{h}$ folyadékáramból 4000 min^{-1} fordulatszám mellett mekkora méretű, 1260 kg/m^3 sűrűségű szemcsék választhatók le a 40°C -os vízből?



$$L_0 = 0,55 \text{ m} \quad \rho_{\text{víz}} = 992 \text{ kg/m}^3$$

$$R = 0,18 \text{ m}$$

$$r = R - h = 0,155 \text{ m} \quad \eta = 652 \cdot 10^{-6} \text{ Pas}$$

$$L = h / \text{tg}(\varphi/2) = 0,237 \text{ m}$$

$$\Sigma = \frac{\pi}{8} \omega^2 \frac{L_0(R^2 - r^2) + \frac{L}{3}(R^2 + Rr - 2r^2)}{\ln \frac{R}{r}} = 6307 \text{ m}^2$$

$$q_V = \Sigma v_g$$

$$v_g = \frac{q_V}{\Sigma} = 6,6 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$$

$$d = \sqrt{\frac{v_g 18 \eta}{g \Delta \rho}} = 5,4 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 5,4 \mu\text{m}$$

Ellenőrző kérdések

1. Milyen erők, és hogyan befolyásolják az közegben nulla kezdősebességgel mozgó részecske áramlását?
2. Mi a jelentősége a Galilei és az Archimedesi számnak az ülepedési sebességek számításánál?
3. Soroljon fel néhány ülepítő berendezés típust!
4. Hogy lehet meghatározni a centrifugális erőterében ülepedő részecskék ülepedési sebességét?
5. Milyen feladatokhoz, milyen centrifuga típusokat célszerű alkalmazni?
6. Homokszemcséket kell ülepíteni az 1 g/cm^3 sűrűségű és $2 \cdot 10^{-3} \text{ Pas}$ viszkozitású folyadékban. Az ülepítő tartály $1,8 \text{ m}$ mélységű, a homokszemcsék átmérője $0,1 \text{ mm}$, sűrűségük 2100 kg/m^3 . Számolja ki az ülepedéshez szükséges időt!. (10 min)
7. Milyen átmérőjű szemcsék nem ülepíthetők már ki az 1 m magas, 50 mm dobátmérőjű csőcentrifugában, amelyben a folyadékcső átmérője 20 mm és a centrifuga fordulatszáma 5000 percenként? A sűrűségkülönbség 10 kg/m^3 , a lé viszkozitása $5 \cdot 10^{-3} \text{ Pas}$. A centrifugán áthaladó térfogatáram $3,14$ liter percenként. ($0,045 \text{ mm}$)
8. Cukorgyár ülepítő tavában a folyadéknál 5 kg/m^3 -rel nagyobb sűrűségű részecskéket is le kell ülepíteni. A közeg viszkozitása $1,36 \cdot 10^{-3} \text{ Pas}$. Mennyi idő szükséges a $0,01 \text{ mm}$ átmérőjű részecskék 1 m mélyre ülepedéséhez? (58 nap)
9. Keményítőtej szakaszos centrifugális ülepítése melyik tartományban történik, ha $j = z = 500$ és a legkisebb ülepítendő részek átmérője $0,02 \text{ mm}$. Mennyi a centrifuga óránkénti kapacitása, ha egyszeri töltés, felpörgetés, leállítás és ürítés együttesen 14 percet vesz igénybe és 60% -át lehet a dobtérfogatnak betölteni? $\rho_1 = 1500 \text{ kg/m}^3$; $\rho_2 = 1100 \text{ kg/m}^3$, $\eta = 10^{-2} \text{ Pas}$; $H = 0,4 \text{ m}$; $R = 350 \text{ mm}$ ($0,368 \text{ m}^3/\text{h}$)
10. Hány m^3/min homokos zagyot lehet ülepíteni 10 m^2 -es csatornában, ha a $0,17 \text{ mm}$ -nél nagyobb homokszemcséket ki akarjuk ülepíteni? Melyik tartományban történik az ülepítés? $\rho_1 = 2000 \text{ kg/m}^3$; $\rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3$; $\eta = 10^{-3} \text{ Pas}$. ($9,42 \text{ m}^3/\text{min}$, átmeneti tartomány)

13. Hőtani alapfogalmak, bevezetés

13.1. Hőtani alapfogalmak

13.1.1. Termodinamikai rendszer

A termodinamikai rendszer (TDR) az anyagi valóság egy, általunk kiválasztott szempont vagy szempontrendszer szerint elhatárolt része. Az elhatárolás történhet egy valóságos *fallal* vagy egy látszólagos (nem valóságos, képzelt) elhatároló felülettel. A termodinamikai rendszernek a határoló falon kívüli részét *termodinamikai testnek* nevezzük. Az anyagi valóságnak a termodinamikai rendszeren kívüli részét *környezetnek* nevezzük.

A TDR és környezete közötti *kölcsönhatások* lehetnek:

- mechanikai (munkavégzés),
- termikus (hőáram),
- tömeg (anyagcsere),
- egyéb, a mechanikai kölcsönhatásokkal analóg folyamatok.

A fal lehet:

- merev: meggátolja a mechanikai kölcsönhatást,
- leárnyékoló: meggátolja a külső erők befolyását,
- nem áteresztő vagy félig áteresztő: meggátolja az összes anyag vagy bizonyos anyagok áthatolását,
- diatermikus: lehetővé teszi a termikus kölcsönhatást,
- adiatermikus: megakadályozza a termikus kölcsönhatást.

A TDR csoportosítása:

- zárt rendszer: nincs tömeg kölcsönhatás (magára hagyott: nincs semmilyen kölcsönhatás),
- nyitott rendszer: van tömeg kölcsönhatás a rendszer és a környezete közt.

Más csoportosításban:

- homogén rendszer: a tulajdonságok függetlenek a helykoordinátáktól,
- heterogén rendszer: többfázisú rendszerek.

13.1.2. A rendszer termodinamikai és kalorikus állapotjelzői

Termodinamikai állapotjelzők: fajtérfogat (v), termodinamikai hőmérséklet (T) és abszolút nyomás (p), ami lehet túlnyomás (p_t), illetve vákuum (p_v)

Extenzív állapotjelzők: a termodinamikai rendszer kiterjedésével arányos állapotjelzők. Összegző mennyiségek, a termodinamikai rendszer egyes részeiben mért mennyiségek összegei jellemzőek a teljes rendszerre. Ilyen pl.: a tömeg, az entrópia, az energia, stb.

Intenzív állapotjelzők: kiegyenlítő állapotjelzők. A termodinamikai rendszer egyes részeiben a teljes rendszerre jellemző mennyiség mérhető. Ilyen pl.: a nyomás, a hőmérséklet, stb.

Fajlagosított extenzív állapotjelzők: két extenzív állapotjelző hányadosa. Ilyen pl.: a sűrűség, a fajtérfogat, stb.

Fázisjellemző mennyiségek: anyagjellemzők, pl. fajhő, köbös hőtágulási együttható, hővezetési tényező, dinamikai viszkozitás.

5. táblázat: Állapotjelzők jelölése és mértékegysége

Megnevezés	Jelölés	SI mértékegység	Képlet
Fajtérfogat	v	$\frac{m^3}{kg}$	$v = \frac{V}{m}$
Termodinamikai hőmérséklet	T	K	$T = T_0 + t$
Abszolút nyomás	p	Pa	$p = p_m + p_t$ $p = p_m - p_v$
Fajlagos belső energia	u	$\frac{J}{kg}$	$u = c_v \cdot T$
Fajlagos entalpia	h	$\frac{J}{kg}$	$h = u + p \cdot v = c_p \cdot T$
Fajlagos entrópia	s	$\frac{J}{kgK}$	$ds = \frac{\partial q}{T}$

Kalorikus állapotjelzők: fajlagos belső energia (u), fajlagos entalpia (h) és fajlagos entrópia (s).

A belső energia

A rendszer mikroszkopikus építőelemeinek tömegközéppontra vonatkoztatott kinetikus és potenciális energiájának összege. Extenzív állapotjelző. Nullapontja általában önkényesen megválasztható. Egy test teljes energiája a makroszkopikus mozgásból származó mozgási energia, a potenciális energia, valamint a belső energia összegeként határozható meg.

Az entalpia

Izobar állapotváltozás esetén a rendszerrel közölt hő egy része térfogatváltozási munkára fordítódik, ez a műszaki gyakorlat számára nem hasznos munkavégzés. Hogy ezzel ne kelljen számolni, bevezették az entalpiát, ami a rendszer belső energiájának és térfogatváltozási munkájának összege. Így elmondható, hogy izobar állapotváltozás esetén a közölt hő teljes egészében az entalpia növelésére fordítódik.

Az entrópia

A termodinamikai rendszerekben lezajló állapotváltozások irányának, illetve a folyamatok során fellépő energiaveszteségek számszerű jellemzésére használt mennyiség.

A fajlagos munka, és a fajlagos hő

Munka: az erő és az elmozdulás vektor skaláris szorzata:

$$\partial W = F \cdot dl = (p \cdot A) \cdot dl = pdV \quad (10.1)$$

A munka a rendszer határfelületén fellépő energiátranzport-mennyiség, melyet a kölcsönhatáshoz tartozó és a hőmérséklettől különböző intenzív állapotjelzők inhomogenitása hoz létre. Nem állapotjelző.

A fizikai (térfogatváltozási) és a technikai munka

A fizikai munka magában foglal mindenfajta, a rendszeren, illetve a rendszer által végzett munkát. Ez lehet kémiai, elektromos, mágneses, stb. munka, valamint lehet térfogat-változási munka:

$$\delta w_{\text{térf}} = p dv \quad (10.2)$$

A TDR által végzett (expanzió) munka pozitív, a TDR-n végzett (kompresszió) munka negatív előjelű.

Nyitott rendszer esetén a fizikai munkán kívül számolnunk kell a belépési és a kilépési munkával is. Ezen három munka algebrai összegeként adódik a technikai munka:

$$\delta w_t = -v dp \quad (10.3)$$

Zárt rendszer esetén fizikai (térfogatváltozási), nyitott rendszer esetén a technikai munka a meghatározó. Az állapotváltozást p-v diagramban ábrázolva annak fizikai munkája egyenesen arányos az állapotváltozás görbéje alatti területtel, technikai munkája a görbe melletti területtel.

A hő: a rendszer határfelületén fellépő, tömeg-kölcsönhatás nélküli energiátranzport-mennyiség, melyet a hőmérséklet-eloszlás inhomogenitása indukál. Nem állapotjelző, és nem azonosítható a rendszerben tárolt energiával. A hő átlépve a rendszer határát a rendszert alkotó elemi részek (atomok, molekulák, szubatomi részecskék) potenciális és/vagy kinetikus energiáját növeli, vagy éppen az említett energiák csökkenése a forrása annak a hőnek, mely a rendszerből kilép. Annak a hőnek az előjelét tekintjük pozitívnak, amely az adott rendszer felé áramlik és negatívnak a rendszerből távozót. Az adott rendszerrel kapcsolatos összes hő jelölésére a Q-t használjuk, a tömegegységre fajlagosított mennyiségét q-val jelöljük, a szokásos nagybetű-kisbetű használatnak megfelelően.

A munka és a hő közös tulajdonságai:

1. Mind a munka, mind pedig a hő a rendszer határfelületén fellépő, a rendszer és környezete közötti *kölcsönhatáshoz tartozó* jellemző.
2. Mindkettő a TDR két állapota közötti *átmenetet (tranzienst) jellemzi* és nem a rendszert.
3. Mindkettő az átmeneti folyamathoz tartozó jellemző, azaz *folyamatjellemzők*.
4. Mindkettő függvénye az állapotváltozás módjának, azaz *útfüggők*, ebből következően nem állapotjelzői a rendszernek.

Fajhő: az a hőmennyiség, amely egységnyi tömegű közeg hőmérsékletének 1K-nel történő emeléséhez szükséges. A folyamat jellegétől függően megkülönböztetünk:

- izobar: c_p
- izochor: c_v fajhőt.

$$[c] = \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad (10.4)$$

egységnyi térfogatra vonatkoztatva:

$$[c] = \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3 \cdot \text{K}} \quad (10.5)$$

Az állandó térfogaton történő melegítés kevesebb hőt igényel, mivel a közeg ekkor nem végez térfogatváltozási munkát, ezért a közölt hő teljes egészében a belső energia növelésére fordítódik:

$$c_v < c_p \quad (10.6)$$

A fajhő függ a hőmérséklettől. A $t_1 - t_2$ hőmérséklet tartományra számított közepes fajhő:

$$c_{|t_1}^{t_2} = \frac{c_{|0}^{t_2} \cdot t_2 - c_{|0}^{t_1} \cdot t_1}{t_2 - t_1} \quad (10.7)$$

$c_{|0}^{t_2}$ – a közeg közepes fajhője a $0^\circ\text{C} - t_2$ tartományon, táblázatból vett érték

$c_{|0}^{t_1}$ – a közeg közepes fajhője a $0^\circ\text{C} - t_1$ tartományon, táblázatból vett érték

Ideális gázok állapotfüggvényei

Egyesített gáztörvény (Clapeyron – egyenlet)

$$\frac{p_1 \cdot v_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot v_2}{T_2} = \text{const.} = R \quad (10.8)$$

$$p \cdot v = R \cdot T \quad (10.9)$$

$$p \cdot V = m \cdot R \cdot T \quad (10.10)$$

R – specifikus gázállandó,

$$[R] = \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \quad (10.11)$$

$$R = c_p - c_v \quad (10.12)$$

A gázállandó az a munkamennyiség, amelyet egységnyi tömegű gáz végez izobar állapotváltozás során, 1K hőmérséklet-változás mellett.

A termodinamika főtételei

0. főétel:

Egymással kölcsönhatásban lévő rendszereknek egyensúlyban annyi intenzív állapotjelzője van közös számértékkel, ahánnyal a rendszereket elválasztó fal átjárható.

I. főétel:

Energia nem keletkezhet, és nem semmisülhet meg, csak átalakulhat egyik formából egy másik formába. A rendszerrel közölt hőmennyiség egyik része növeli a rendszer belső energiáját, másik része munkavégzésre fordítható.

$$Q = U + W \quad (10.13)$$

I. főtétel, zárt rendszerekre

$$\delta q = du + \delta w \quad (10.14)$$

$$\delta q = c_v \cdot dT + p \cdot dv \quad (10.15)$$

- δq – az állapotváltozás elemi kis szakaszához tartozó fajlagos hőmennyiség (nem a fajlagos hőmennyiség elemi kis megváltozása)
 du – a fajlagos *belső energia* elemi kis megváltozása
 δw – az állapotváltozás elemi kis szakaszának fajlagos *fizikai (térfogatváltozási) munkája* (nem a fajlagos fizikai munka elemi kis megváltozása)

Kis d helyett δ -t használunk azon változók jelölésére, amelyek nem teljes differenciálok és nem állapotjelzők

I. főtétel, nyitott rendszerekre

$$\delta q = dh + \delta w_t \quad (10.16)$$

$$\delta q = c_p \cdot dT - v \cdot dp \quad (10.17)$$

- dh – a fajlagos *entalpia* elemi kis megváltozása
 δw_t – az állapotváltozás elemi kis szakaszának fajlagos *technikai munkája*

Az I. főtétel mindkét alakja felírható zárt, illetve nyitott rendszerre, de zárt rendszerre az első (1-14), nyitott rendszerre a második (1-16) alak a meghatározó.

II. főtétel

Clausius tétele: a hő önmagától sem közvetve, sem közvetlenül nem áramlik az alacsonyabb hőmérsékletű helyről a magasabb hőmérsékletű helyre. Ahhoz, hogy ez megtörténjen vagy hőenergiát (abszorpciós hűtőgépek működésének termodinamikai elve), vagy munkát (kompresszoros hűtőgépek működésének termodinamikai elve) kell befektetni.

Nem lehetséges olyan gép szerkesztése, amely folyamatos működésű, és működése során nem történik más, mint egy súly felemelése vagy egy hőtartály lehűlése.

III. főtétel

Nem lehetséges véges számú lépésben egy termodinamikai rendszer hőmérsékletét az abszolút nulla értékre csökkenteni.

A hőátmenet a különböző hőmérsékletű testek közötti energia átmenet, hőenergia formájában. Az ezen alapuló kalorikus műveletek hajtóereje a magasabb és az alacsonyabb hőmérsékletű test közötti hőmérséklet különbség, amelynek hatására a magasabb hőmérsékletű test - a termodinamika második főtételének értelmében - átadja hőjének egy részét az alacsonyabb hőmérsékletű testnek. A hőátmenet folyamatában résztvevő testeket hőhordozóknak nevezzük.

A hőenergia, vagyis a hőmennyiség értékét Q -val jelöljük, és mértékegysége: J (Joule). Az egységnyi idő alatt átszármaztatott hőmennyiséget hőáramnak nevezzük (Φ), mértékegysége: J/s = W (watt). Az egységnyi idő és egységnyi felületen áthaladó hőmennyiség a hőáramsűrűség

(φ), mértékegysége: $\frac{J/s}{m^2} = \frac{W}{m^2}$

A hőátmenetnek három alapvető formája ismert:

- a hővezetés (kondukción),
- a hőáramlás (konvekcion), és
- a hősugárzás (radiáción).

Hővezetés során a test egymással közvetlenül érintkező elemi részecskéi hőmozgásuk következtében adják egymásnak a hőt. Itt csak helyzetváltoztató mozgás van. A szilárd testekben a hő hővezetés útján terjed.

Hőáramlás során a hő a fluidum makroszkópikus részeinek áramlása, helyváltoztató mozgása következtében terjed. Megkülönböztetünk természetes, vagy szabad konvekciót, amikor a közeg mozgását a különböző hőmérsékletű helyek között kialakuló sűrűségkülönbség hozza létre. Kényszerkonvekció esetében a fluidumot külső behatással kényszerítjük mozgásra.

Hősugárzás során a hő a sugárzó test molekuláinak vagy atomjainak hőmozgása következtében kibocsátott különböző hullámhosszú elektromágneses rezgések formájában terjed.

A valóságban a hőátmenet egyes formái külön-külön ritkán fordulnak elő, a folyamatok többnyire egyidejűleg mennek végbe. A szilárd faltól a fluidum felé irányuló, vagy az ellenkező irányú hőátmenet a hőátadás.

Bonyolultabb a hőátmenet akkor, ha a melegebb és a hidegebb közeget fal választja el egymástól. Az ilyen folyamatot nevezzük hőátbocsátásnak.

A hőátmenet törvényei képezik a kalorikus műveletek, nevezetesen

- a fűtés, a melegítés,
- a sterilizálás, a pasztörizálás,
- a kondenzálás, a forralás,
- a hűtés, a fagyasztás és
- a bepárlás alapját.

A hőátmenetnek az anyagátadási műveletek kivitelezésénél is jelentős szerepe van.

Ha a folyamatos üzemű készülék különböző pontjaiban a hőmérséklet az idő függvényében nem változik, a műveletet időben állandósult állapotúnak, stacionernek nevezzük. A szakaszos készülékekben a hőmérséklet az idő függvényében változik (pl. a készülék felfűtése és lehűtése esetén), ezekben nem állandósult állapotú, azaz instacioner hőátmenet megy végbe. A gyakorlatban (pl. különféle hőkezelési feladatokban) a hőátmenet általában időben változó, tehát instacioner.

13.2. Hővezetés

A hővezetés vagy más néven kondukciónál során a hőenergia a molekulák, ill. elemi részecskék helyváltoztató elmozdulása nélkül adódik át a melegebb helyről a hidegebb helyre. Ez a feltétel a szilárd anyagok esetében teljesül.

Az egyes anyagok hővezető képességét a hővezetési tényezővel, λ -val [W/(mK)] jellemezhetjük. A hővezetési tényező kismértékben ugyan, de hőmérsékletfüggő, anyagi állandó.

A különböző belső szerkezettel rendelkező anyagok hővezetési tényezői – (pl. az eltérő molekulaszervezetük következtében) - nagyságrendekkel különbözhetnek egymástól.

A fémek hővezetési tényezője 50-400 W/(mK), az élelmiszereké 0,7 -1,2 W/(mK), a nem fémes anyagoké 0,5 -2 W/(mK), a gázoké pedig 0,02 -0,05 W/(mK) érték között változik.

13.2.1. Stacioner hővezetés szilárd anyagban

Állandósult állapotú (stacioner) hővezetés esetén a hőáramot okozó hőmérséklet-különbség térben és időben állandó. Ebben az esetben a hővezetés jelenségét Fourier I. törvénye írja le, melynek értelmében az egységnyi idő alatt átadott hőmennyiség értéke, vagyis a hőáram a hőmérséklet gradiensevel és a felülettel arányos:

$$\Phi = -\lambda \frac{dt}{dx} A \quad (10.18)$$

Ha eltekintünk a formula egzakt értelmezésétől, akkor azt is mondhatjuk, hogy a vezetési hőáram (Φ , (J/s), az egységnyi felületen, időegység alatt áthaladó hőmennyiség) a hővezetési tényezővel, (λ (W/(mK))), a hőmérséklet különbséggel, (dt , (K)), a felülettel, (A (m²)), egyenesen, és a két vonatkoztatási pont távolságával, dx (m), fordítva arányos. Az összefüggésben egyébként a dt/dx tényező, vagyis a hőmérséklet hely szerinti deriváltja, a hőmérséklet gradiens, amely elméleti értelmezésben a vezetési hőáram hajtóereje. Az egyenletben a negatív előjel azt mutatja, hogy a hőáram a hőmérséklet csökkenésének irányába mutat, a hő a magasabb hőmérsékletű helyről a hidegebb hőmérsékletű helyre adódik át.

A hőáramot egységnyi felületre vonatkoztatva a hő-áramsűrűség értékét kapjuk:

$$\varphi = -\lambda \frac{dt}{dx} \quad (10.19)$$

A τ idő alatt, az A felületen, vezetés révén áthaladó hőmennyiség, $dt/dx \approx \Delta t/\Delta x$ hajtóerő esetén:

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dx} A \tau \quad (10.20)$$

Megjegyezzük, hogy ez a termikus energia a jól ismert

$$Q = c_p m \Delta t \quad (10.21)$$

összefüggésnek megfelelően $\Delta \tau$ -vel emeli az m [kg] tömegű test hőmérsékletét. (4)-ben c_p az állandó nyomáson mért fajhő (kJ/(kg K)).

13.2.1.1. Egyrétegű homogén síkfal hővezetése

Fourier I. törvényét, (ami egy szétválasztható változójú homogén differenciálegyenlet) oldjuk meg egy egyrétegű síkfalban való hővezetés esetére. A fal melegebb oldalán t_1 , a hidegebb oldalán t_2 a hőmérséklet, a fal vastagsága δ a fal hővezetési tényezője λ .

Az egyenlet megoldása:

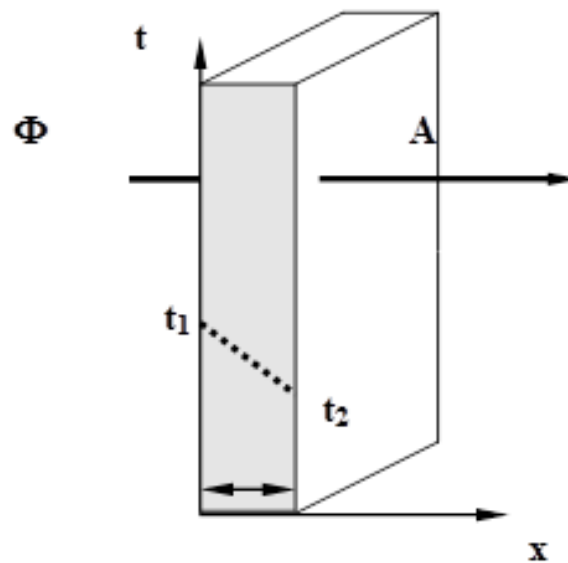
$$\Phi = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\Phi dx = -\lambda \cdot A \cdot dx$$

$$\Phi \int_0^{\delta} dx = \int_{t_1}^{t_2} dt \quad 10.22.$$

$$\Phi(\delta - 0) = -\lambda \cdot A \cdot (t_2 - t_1)$$

$$\Phi = -\frac{\lambda}{\delta} \cdot A \cdot (t_2 - t_1)$$



108. ábra: Egyrétegű síkfal hővezetése

Példa:

Határozzuk meg a tanterem falának hőveszteségét, ha a terem hőmérséklete $t_1 = 20\text{ °C}$, a külső hőmérséklet $t_2 = -25\text{ °C}$. A fal mérete $5\text{ m} \times 3\text{ m}$, a fal vastagsága 250 mm ! A téglá hővezetési tényezője, $\lambda = 0,3\text{ W/(m} \cdot \text{K)}$.

Megoldás:

$$\Phi = \frac{-\lambda(t_2 - t_1)}{\delta} A = -\frac{0,3}{0,25}(-20 - 25)15 = 810\text{ W}$$

13.2.1.2. Többrétegű síkfal hővezetése

Gyakori műszaki feladat, hogy különféle anyagokból összetett sík falak hővezetési (vagy hőellenállási) viszonyait kell számítanunk. Ilyen esetekkel találkozunk, ha sík falú szigetelt vagy bélelt tartályról, épület falszerkezetéről van szó (**109. ábra**).

Stacionárius hőáram esetében, mivel minden rétegen ugyanaz a hőmennyiség áramlik át, a **109. ábra** jelöléseivel a következő összefüggések írhatók fel:

$$\Phi = \frac{A_1(t_1 - t_2)\lambda_1}{\delta_1} = \frac{A_2(t_2 - t_3)\lambda_2}{\delta_2} = \frac{A_3(t_3 - t_4)\lambda_3}{\delta_3} \quad (10.23)$$

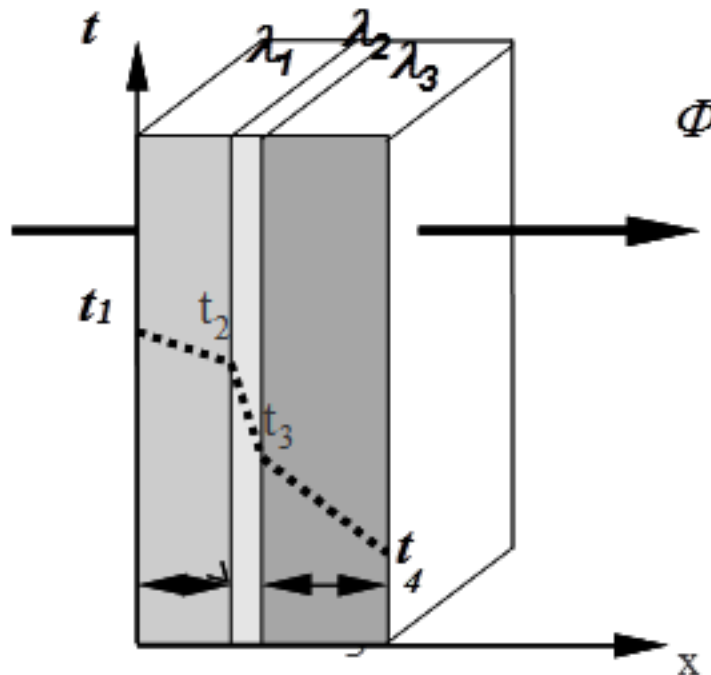
Ez tulajdonképpen három egyenlet Φ -re, és mindegyikből kifejezhető a hőmérséklet-különbség. Adjuk ezeket a kifejezéseket össze! Ez által t_2 -t és t_3 -at elimináltuk.

Mivel a felületek megegyeznek, a háromrétegű síkfalon áthaladó hőáram értékét már könnyen kifejezhetjük, és az alábbi:

$$\Phi = \frac{A(t_1 - t_4)}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} \quad (10.24.)$$

összefüggést nyerjük.

Látható, hogy az egyes rétegek hővezető-képességeinek reciprok értékei összeg-ződnek a teljes falra jellemző együttható számításakor.



109. ábra: Hővezetés többrétegű sík falban

Példa:

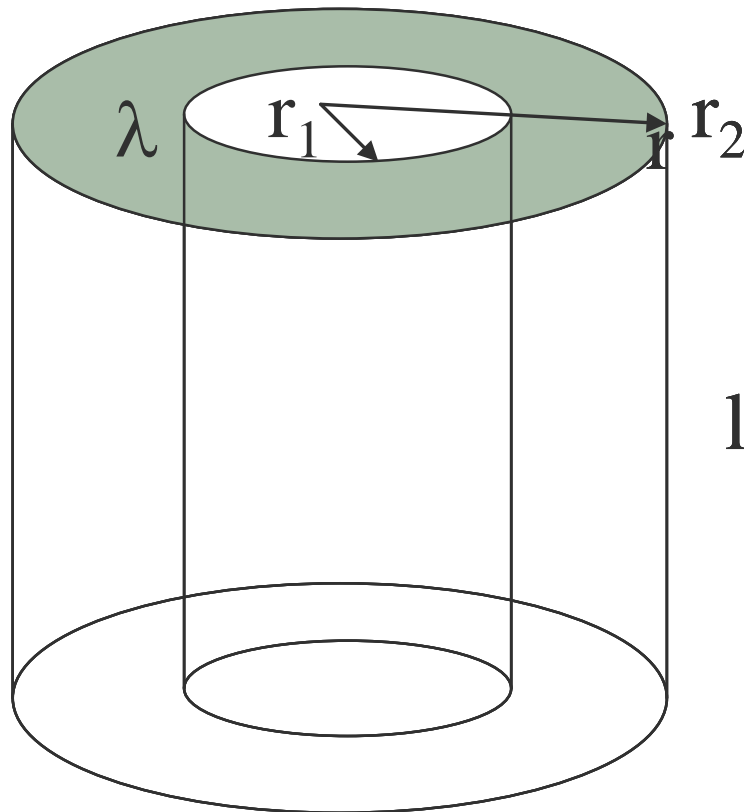
Határozzuk meg azt a hőmennyiséget, amely egy kazán felületének 1 m^2 -én áthalad, ha a fal vastagsága 50 mm , hővezetési tényezője $\lambda_f = 58 \text{ W/(mK)}$. A belső oldalt vízkő borítja. Ez 2 mm vastag és hővezetési tényezője $\lambda_{vk} = 1,16 \text{ W/(mK)}$. A falat határoló két oldal hőmérséklete 250 illetve $200 \text{ }^\circ\text{C}$

Megoldás:

$$\phi = \frac{1}{\frac{0,05}{58} + \frac{0,002}{1,16}} \cdot (250 - 200) = 386,7 \text{ W}$$

13.2.2. Hővezetés csőfalán keresztül

Ha a hővezetést egy hosszú (l hosszúságú), henger keresztmetszetű cső falán keresztül vizsgáljuk, ahol a cső belső sugara r_1 , a külső sugara r_2 , a belső oldalán a hőmérséklet t_1 , a külső oldalán a hőmérséklet t_2 , a fal hővezetési tényezője λ .



110. ábra: Hővezetés csőfalon keresztül

Fourier I. törvényének megoldása erre az esetre:

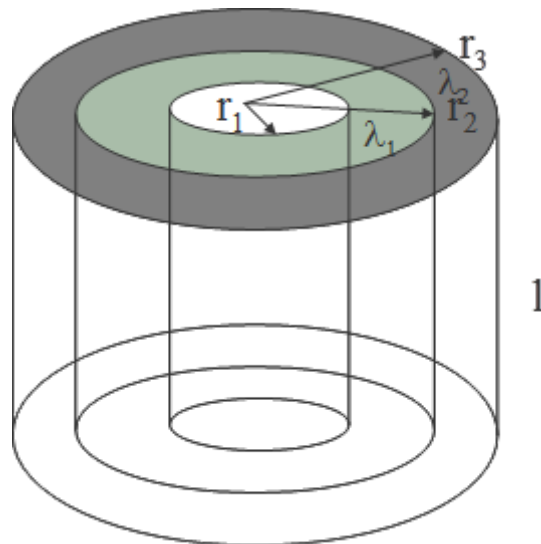
$$\Phi = \lambda \frac{dt}{dr} A = \lambda \frac{dt}{dr} 2\pi r l$$

$$\Phi \cdot \frac{1}{r} dr = \lambda \cdot 2\pi l \cdot dt$$

$$\Phi \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \lambda \cdot 2\pi l \int_{t_1}^{t_2} dt \quad (10.25)$$

$$\Phi = \frac{\lambda 2\pi l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (t_2 - t_1)$$

Többrétegű csőfal esetén az egyik réteg r_1 és r_2 között, a második réteg r_2 és r_3 között található. A cső középpontjától r_1 távolságra a csőfal hőmérséklete t_1 , r_2 távolságra a két különböző anyagú csőréteg között t_2 , a cső külső falán r_3 távolságra a cső középvonalától t_3 .



111. ábra: Hővezetés többrétegű csőfalon keresztül

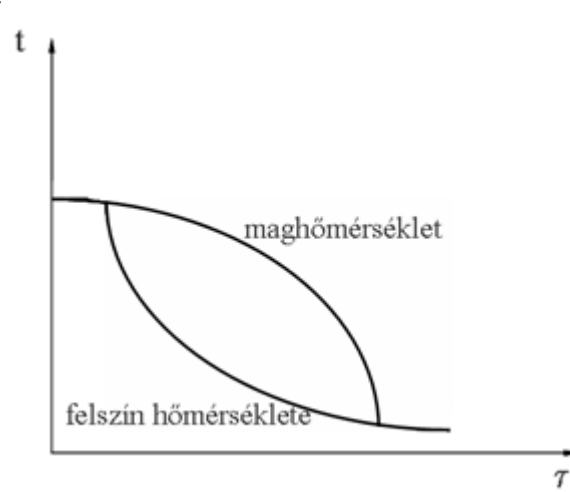
Ekkor a hőáram a következő képlettel írható fel:

$$\Phi = \frac{t_3 - t_1}{\frac{\ln(r_2 / r_1)}{2\pi \cdot l \cdot \lambda_1} + \frac{\ln(r_3 / r_2)}{2\pi \cdot l \cdot \lambda_2}} \quad (10. 26)$$

ahol λ_1 és λ_2 a rétegek hővezetési tényezői.

13.2.3. Instacioner hővezetés

Ha egy testet más hőmérsékletű (például hidegebb) környezetbe helyezünk, a közeg és a test között azonnal hőcsere jön létre. A **112. ábra** látható, hogy először a test felszíne kezd hűlni, majd fokozatosan hűl a test belseje is. Bizonyos idő után a test valamennyi részének hőmérséklete kiegyenlítődik, és egyenlővé válik a közeg hőmérsékletével, azaz beáll a hőmérséklet egyensúlya.



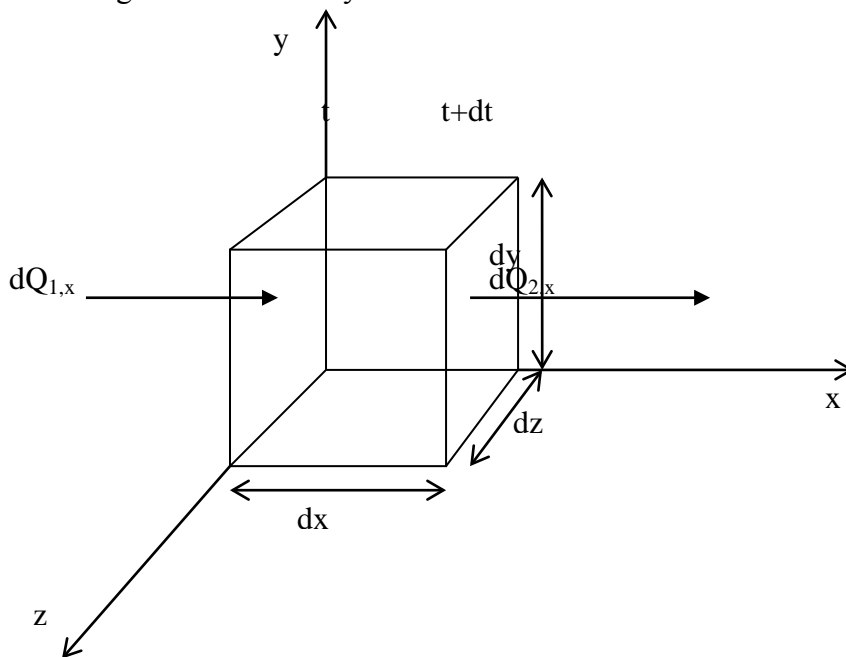
112. ábra: Testek hűlése során a hőmérséklet kiegyenlítődés és hőmérséklet-eloszlás az idő függvényében

Nem stacionárius állapot esetén a közölt hőáram változik az időben. A nem állandósult hővezetés feladatának megoldásához meg kell határozni a test tetszőleges pontjára a

hőmérséklet és az áthaladó hőáram időbeli változásának összefüggését. Többek között olyan kérdésekre keresünk választ, hogy

- ◆ milyen hőmérsékleti értékek várhatók adott környezeti hőmérséklet és az anyag konkrét geometriai mérete esetén, adott időpillanatban,
- ◆ milyen környezeti hőmérséklettel érhető el adott anyagban, az előírt pontokban a szükséges hőmérséklet érték, stb.

A feladat megoldásához a hő transzportját kell megvizsgálnunk egy infinitézimálisan (végtelenül) kicsi térfogatelemen keresztül. Általánosságban egy kicsiny térfogatelemben a hőmennyiség (Q) paraméter időbeli és térbeli változása a következő ábra segítségével értelmezhető. A térfogatelem dx kicsiny hosszán a hőmérséklet t -ről $t+dt$ -re változik.



113. ábra: A hőtranszport folyamata

A hőmennyiség változása t érfogatelem x irányában:

$$dQ_{1,x} = -\lambda \cdot A \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau = -\lambda \cdot dy \cdot dz \frac{\partial t}{\partial x} d\tau$$

$$dQ_{1,x} = -\lambda \cdot dy \cdot dz \frac{\partial(t+dt)}{\partial x} dx = -\lambda \cdot dy \cdot dz \left(\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right) d\tau \quad (10.27)$$

A paraméter x irányú megváltozása:

$$dQ_x = dQ_{1,x} - dQ_{2,x} = \lambda \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx d\tau \quad (10.28)$$

Ennek megfelelően felírható az y és a z irányú változás is:

$$dQ_y = dQ_{1,y} - dQ_{2,y} = \lambda \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dy d\tau$$

$$dQ_z = dQ_{1,z} - dQ_{2,z} = \lambda \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} dz d\tau \quad (10.29)$$

$$dQ = dQ_x + dQ_y + dQ_z = \lambda dx \cdot dy \cdot dz \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) d\tau = \lambda dV \cdot \nabla^2 t d\tau$$

Feltéve, hogy a test izotróp, a hővezetési tényező nem függ az iránytól.
A kicsiny térfogatelem hőmennyisége felírható:

$$dQ = c_p m \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau = c_p \cdot \rho \cdot dV \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \quad (10.30)$$

A két egyenletet összevonva:

$$c_p \cdot \rho \cdot dV \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau = \lambda dV \cdot \nabla^2 t d\tau \quad (10.31)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c_p \cdot \rho} \cdot \nabla^2 t = a \cdot \nabla^2 t$$

összefüggést kapjuk, ami a szilárd, nyugalmi állapotú közegek esetében a nem állandósult állapotú hővezetést leíró Fourier II. törvénye. Az egyenletben az a tényező a nem állandósult hővezetés jellemzője, melyet hőmérsékletvezetési, vagy hődiffúziós állandónak nevezünk,

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad [\text{m}^2/\text{s}], \quad (10.32)$$

és a testek felmelegedési és lehülési sebességét jellemezhetjük vele. Minél nagyobb a értéke, annál gyorsabb a melegedés, illetve a lehülés.

Nem állandósult állapotú hővezetés játszódik le különféle berendezések felfűtési és leállási szakaszában, valamint a hűtési, a fagyasztási, a melegítési műveletek során.

Fourier II. törvénye általános érvényű. Matematikai megoldása azonban csak konkrét feladatokra, azaz ismert, ill. előírt kezdeti és peremfeltételek mellett határozható meg. A megoldás még ilyen esetekben sem adható meg mindig egyszerű formában. A mérnöki gyakorlatban előforduló feladatok többségében azonban a megoldás leírható félempirikus egyenletekkel, amelyekben rendszerint dimenzió nélküli jellemzők szerepelnek.

Az instacioner hővezetés bizonyos gyakorlati feladatai egyszerűen megoldhatók pl. az alábbi alakú empirikus összefüggésekkel:

$$Y = \frac{t_{\text{kömy}} - t_{\text{cél}}}{t_{\text{kömy}} - t_{\text{kezd}}} = f(Fo, Bi, n). \quad (10.33)$$

(11)-ben három dimenzió mentes paraméter szerepel:

A Fourier-szám:
$$Fo = \frac{a\tau}{l^2}, \quad (10.34)$$

a dimenzió nélküli hosszúság:
$$n = \frac{l}{l_0}, \quad (10.35)$$

továbbá a határretegben lejátszódó instacioner állapot jellemzésére szolgáló Biot-(féle

dimenzió nélküli szám :
$$Bi = \frac{\alpha l}{\lambda_{sz}}. \quad (10.36)$$

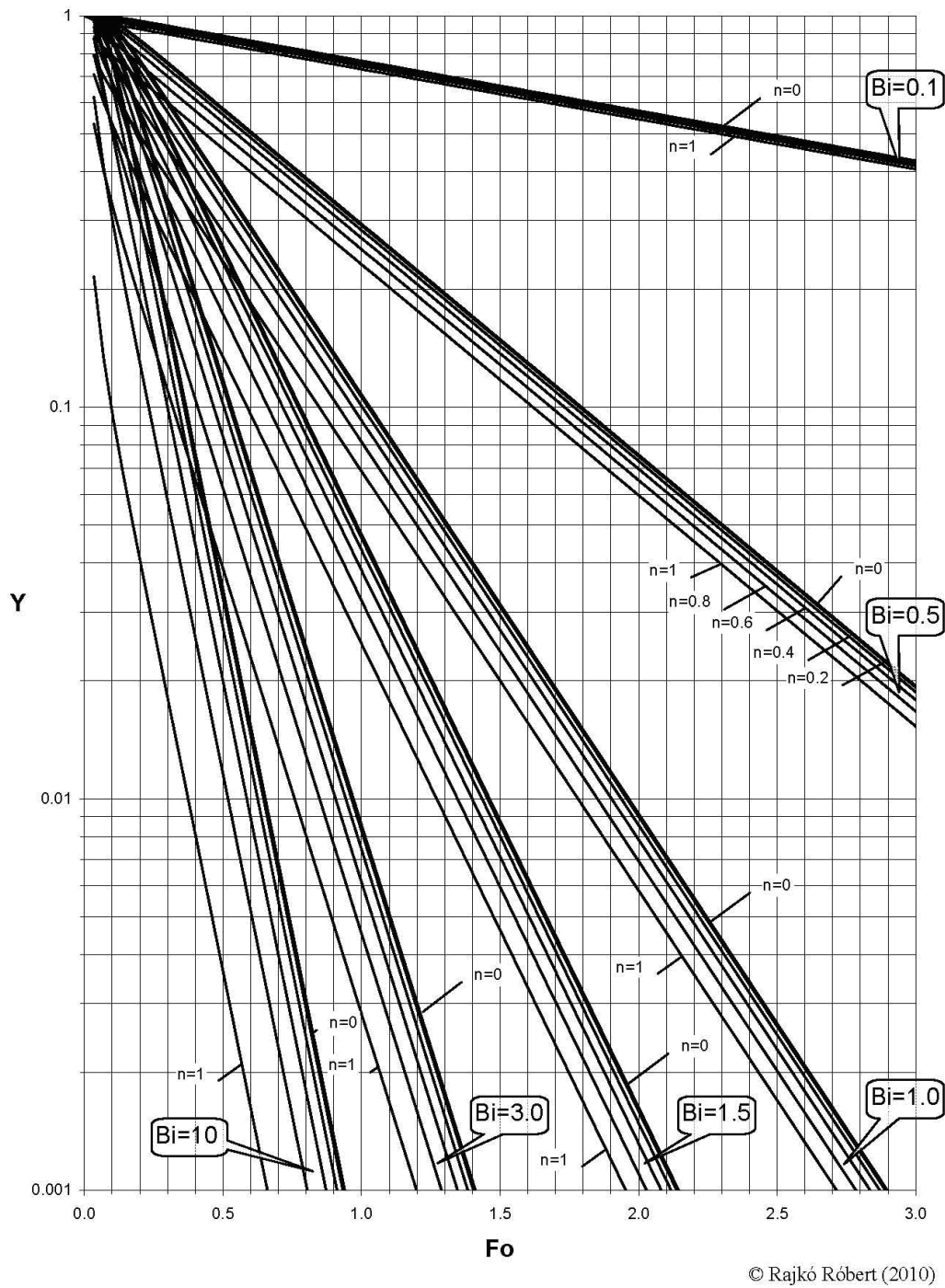
A Biot szám reciprokát szokás m -mel jelölni az instacioner hővezetési feladatok grafikus

megoldása során:
$$m = \frac{1}{Bi} = \frac{\lambda_{sz}}{\alpha \cdot l}$$

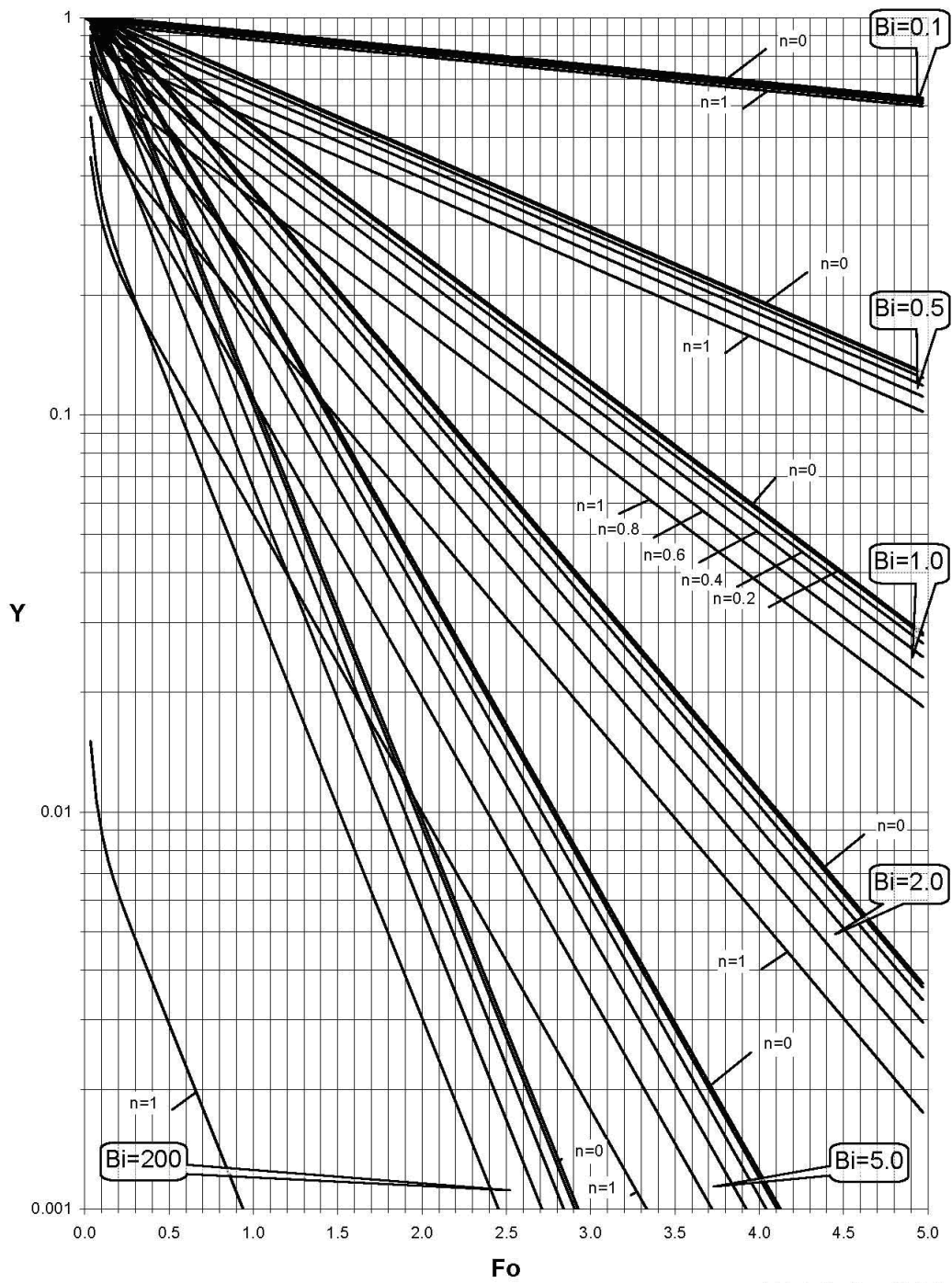
A fenti összefüggésekben szereplő jelölések:

Y	dimenzió nélküli mérséklet
$t_{körny}$	a közeg hőmérséklete [°C],
t_{kezd}	a kezdeti hőmérséklet [°C],
$t_{cél}$	célhőmérséklet [°C],
n	geometriai szimplex,
l	a középponttól mért távolság [m],
l_0	jellemző hossz [m],

A dimenzió nélküli hőmérsékletet a Fo -szám függvényében ábrázolva végtelen hengerre, síklapra, illetve göbre vonatkozóan kapjuk a következő nomogramokat, amelyek segítségével a problémák megoldhatók.

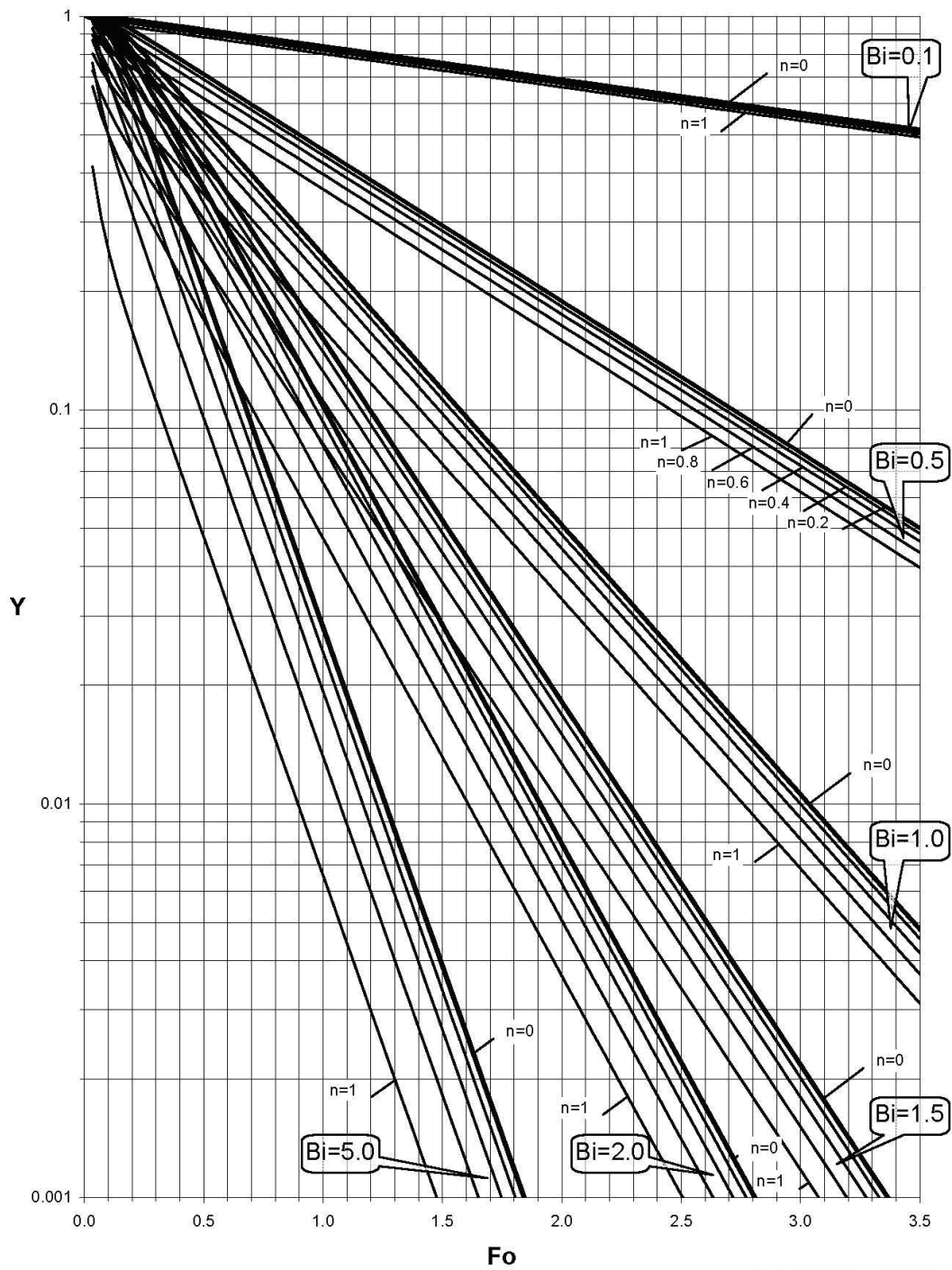


114. ábra: Fo - Y diagram végtelen síklap esetén



© Rajkó Róbert (2010)

115. ábra: Fo - Y diagram végtelen henger esetén



© Rajkó Róbert (2010)

116. ábra: Fo - Y diagram gömb esetén

Példa:

Számítsuk ki, hogy 2 óra elteltével hány fokra melegszik fel egy 30 cm hosszú, 10 cm átmérőjű konzerv. A konzerv kezdeti hőmérséklete: 21 °C, az autokláv hőmérséklete: 116 °C.

Az alábbi adatok ismertek, ill. táblázatokból kikereshetők: $\alpha = 1200 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$, $\rho = 1070 \text{ kg}/\text{m}^3$, $\lambda_{\text{konz}} = 0,48 \text{ W}/(\text{m K})$, $c_p = 3350 \text{ J}/(\text{kg K})$.

A nem állandósult állapotú hővezetésnél a konzervet először hengernek tekintjük. Ekkor a jellemző hossz a sugár, tehát $l = 0,05 \text{ m}$.

Így, az ismert adatokból kiszámítható:

$$Fo = \frac{\alpha \tau}{l^2} = \frac{\lambda \tau}{c_p \rho r^2} = \frac{0,48 \text{ W}/\text{mK} \cdot 7200 \text{ s}}{3350 \text{ J}/\text{kgK} \cdot 1070 \text{ kg}/\text{m}^3 \cdot 0,0025 \text{ m}} = 0,39$$

$$\frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{\alpha r} = 0,008$$

$$n = \frac{1}{l_0} = \frac{0}{0,05} = 0$$

A kiszámított adatokat a megfelelő nomogrammba (lásd: a függelékben) berajzoljuk, és leolvassuk Y értékét: $Y = 0,175$.

A következő lépésben az előbbi számolásmenetet megismételjük, de ezúttal a melegedő testünket síklapnak tekintjük, így a jellemző hossz: $0,15 \text{ m}$.

$$Fo = \frac{\alpha \tau}{l^2} = \frac{\lambda \tau}{c_p \rho l^2} = \frac{0,48 \cdot 7200}{3350 \cdot 1070 \cdot 0,0225} = 0,043$$

$$\frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{\alpha l} = 0,0027$$

$$n = \frac{1}{l_0} = \frac{0}{0,15} = 0$$

$$Y = 0,98$$

A két jellemző hossz alapján számított dimenzió nélküli hőmérsékletet összeszorozva kapjuk a testre jellemző Y értéket:

$$Y = 0,0175 \cdot 0,98 = 0,172 = \frac{116 - t_c}{116 - 21}, \text{ ahonnan } t_c = 100 \text{ }^\circ\text{C}, \text{ vagyis a maghőmérséklet } 100 \text{ }^\circ\text{C}.$$

13.3. Hősugárzás

A hősugárzás (radiáció) a hőenergia elektromágneses sugárzás útján történő terjedése. Az elektromágneses rezgések tartományából a látható és az infravörös tartomány a számottevő, vagyis a 0,4-40 μm közé eső hullámhosszúság, mert elnyelődve ez az intervallum indukál hőt. A radiáció független a hőt elnyelő (abszorbeáló) vagy kibocsátó (emittáló) médium vastagságától, de függ a hőmérsékletétől, a geometriai viszonyoktól, a felület szerkezetétől és tulajdonságaitól.

A sugárzás általános törvényszerűségei a hősugárzásra is érvényesek. A hősugárzás valamennyi testre nézve jellemző, és az energiát minden test folyamatosan sugározza. Ez az energia egy másik testen vagy elnyelődik (abszorbeálódik), vagy visszaverődik (reflektálódik), vagy áthalad (transzmittálódik).

Amennyiben a testre érkező energia teljes egészében elnyelődik, úgy abszolút fekete testről, ha visszaverődik, úgy tükröző testről (abszolút fehér), ha áthalad, úgy abszolút átbocsátó (átlátszó) testről beszélünk. Kirchhof törvénye szerint ugyan azon test által emittált illetve abszorbeált energia egyenlő.

A hősugárzás ugyan valamennyi testre nézve jellemző, ám csak a 100 $^{\circ}\text{C}$ körüli, illetve az annál magasabb hőmérsékletű testek hősugárzása jelentős. Ilyen jelenséggel találkozhatunk pl. a kemencében lejátszódó hőátadási folyamatok során, az infravörös égőkkel végrehajtott szárítási műveleteknél, továbbá a hőközlő berendezések felmelegedett falán és vezetőkein keresztül, a környezetnek leadott hőmennyiség, azaz a hőveszteség észlelése, ill. számítása során.

A radiációs hőátadás alapegyenletét a *Stefan-Boltzmann törvény* képezi. Ennek értelmében a testek által kibocsátott vagy elnyelt hőenergia-áram

$$\Phi = \sigma AT^4 \quad (10.37)$$

ahol:

A a sugárzásnak kitett felület [m^2],

σ a Stefan-Boltzmann-féle állandó ($= 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ J} / \text{m}^2 \text{ K}^4$),

T hőmérséklet [K].

Ennyi energiát csak tökéletesen sugárzó test tud kibocsátani, egy ún. abszolút fekete test. A valóságban azonban ennek az értéknek csak egy részét képesek a testek kisugározni, ezeket a testeket szürke testeknek nevezzük. A fekete és szürke testek emissziós értékének arányát pedig *feketeségi fok*nak nevezzük (ε). A feketeségi fok tehát azt fejezi ki, hogy egy sugárzó test az abszolút fekete testhez viszonyítva a hőenergia hányad részét emittálja. Szürke testek sugárzására tehát a

$$\Phi = \varepsilon \sigma AT^4 \quad (10.38)$$

összefüggés érvényes, ahol:

ε a feketeségi fok,

σ a Stefan-Boltzmann állandó $= 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} / (\text{m}^2 \text{ K}^4)$.

A műszaki gyakorlatban (15) helyett a

$$\varphi = c_f \left(\frac{T}{100} \right)^4 \quad (\text{W/m}^2) \quad (10.39)$$

összefüggést alkalmaznak, ahol

$$c_f \quad \text{a fekete test sugárzási együtthatója} = 5,67 \text{ W/(m}^2 \text{K}^4\text{)}.$$

Két különböző hőmérsékletű felület közötti hőcserét a következő egyenlet írja le:

$$\varphi = c_k \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (10.40)$$

ahol c_k az 1 és 2 felületre vonatkozó ún. *kölcsönös sugárzási együttható*, amely a feketeségi fokot is figyelembe veszi. Számolása

$$\frac{1}{c_k} = \frac{1}{c_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_f} \right). \quad (10.41)$$

Párhuzamos felületek esetén $A_1 = A_2$, és $c_1 = c_2 = \varepsilon c_f$.

Néhány szürke test feketeségi foka a következő értékek között változik:

papír, festett fém, fa, élelmiszer:	0,7 - 0,9,
durva, nem fényes felület:	0,25 - 0,7,
fényezett felület	0,05.

Példa:

Egy kemence falát 5 cm-es légréteg választja el az épület falától. A kemence falának átlagos hőmérséklete $t_1 = 157 \text{ }^\circ\text{C}$ (430 K), az épület fal-hőmérséklete $t_2 = 57 \text{ }^\circ\text{C}$ (330 K). Határozzuk meg a két párhuzamos felület közti hőszugárzást!

A megoldáshoz a (10.23) egyenletbe helyettesítjük be az adatokat, de figyelembe vesszük, hogy $A_1 = A_2$, tehát (10.41) helyett

$$\frac{1}{c_k} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_k} \quad (10.42)$$

érvényes.

Az irodalmi adatok szerint (mivel a sugárzási együtthatók azonosak), $c_1 = c_2 = 5,33 \text{ W/(m}^2 \text{K}^4\text{)}$ és $c_f = 5,67 \text{ W/(m}^2 \text{K}^4\text{)}$. Ezeket behelyettesítve:

$$\frac{1}{c_k} = \frac{1}{5,33} + \frac{1}{5,33} - \frac{1}{5,67} = 0,1989,$$

ahonnan:

$$c_k = 5,028 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4).$$

A végeredmény:

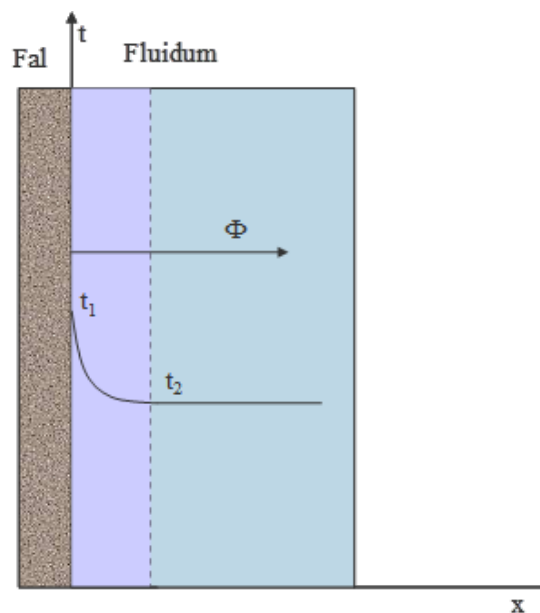
$$\varphi = 5,028 \left[\left(\frac{430}{100} \right)^4 - \left(\frac{330}{100} \right)^4 \right] = 1123 \text{ W}/\text{m}^2.$$

13.4. Hőáramlás

13.4.1. A hőáramlás formái

A hőátvezetési módok közül a hőáramlás, a konvekció a legjelentősebb. A konvekció során a közeg egy szilárd fallal érintkezve veszi át, vagy adja le a hőmennyiséget, a közegen belül, a rendszer fő tömegében a hőmennyiség a részecskék helyzetváltoztató mozgása során terjed. Egy intenzív áramlásban lévő rendszerrel tehát a hő kiegyenlítődés rendkívül gyorsan lejátszódhat.

Az ilyen típusú műveleteknél a hőátvezetés szempontjából a legnagyobb ellenállást a hőátadó fal és a fluidum érintkezési felületénél képződő határreteg hőellenállása képezi. Éppen ezért tehát a gyakorlatban a hőátmenet tekintetében mindig több rétegű falak találhatók. Nyilvánvaló, hogy egyetlen szilárd falat is három rétegnek kell vennünk, hiszen ennek két oldalán, a vele érintkező két fluidumból, határretegek alakulnak ki.



117. ábra: Síkfal a vele érintkező fluidum határretegével

A határretek a hőáram kialakításában szerkezetüknek (halmazállapotuknak) és az anyagi jellemzőiknek megfelelően vesznek részt. A határretekben lejátszódó hőátmenet számszerű jellemzésére a hőátadási tényezőt, α [$\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$] vezették be, mely az idő-, a felület- és a hőmérsékletkülönbség egységnyi értékei esetén a határretekeken átjutó hőáramot jelenti.

A szilárd fal és a fluidum közötti határfelületen (a határreteg két szélén uralkodó hőmérsékletek ismeretében) a hőátadás intenzitásának meghatározására NEWTON törvényét használjuk:

$$\Phi = \alpha (t_1 - t_2) A \quad (10.43)$$

Fontos megjegyeznünk, hogy a hőátadási tényező nem tipikus anyagi jellemző, számszerű értéke függ

- a hőmérsékleti viszonyoktól,
- az anyagi jellemzőktől,
- az áramlási viszonyoktól és
- a geometriai jellemzőktől.

A közegek áramlása vagy külső kényszerítő erő hatására vagy spontán, a hőmérsékletkülönbség által indukált sűrűségkülönbség hatására jöhet létre. Az első esetet kényszerkonvekciónak, a második esetet szabadkonvekciónak nevezzük.

Szabadkonvekciós áramlás alakul ki például, ha egy tartályban vizet melegítünk, vagy ha egy felfűtött berendezés, radiátor felmelegíti a terem levegőjét. Ha a fent említett esetekben szivattyú, keverő vagy ventilátor áramoltatja a közegeket akkor kényszerkonvekcióval kell számolnunk.

13.4.2. A hőáramlás Nusselt-függvényei

A konvektív hőáramlás során átadott hőmennyiség, illetve a hőátadási tényező meghatározásához legegyszerűbben a dimenzióanalízis módszerével jutunk.

A tapasztalatok alapján a meghatározó paraméterek:

6. táblázat:

Paraméter	Jele	Dimenziója
Egyenértékű csőátmérő	d	L
Fluidum sűrűsége	ρ	M/L^3
Fluidum dinamikai viszkozitása	η	$M/L\tau$
Fluidum hőkapacitása	c_p	Q/Mt
Fluidum hővezetési tényezője	λ	$Q/\tau L$
Lineáris áramlási sebesség	v	L/τ
Hőtágulási együttható	β	$1/t$
Gravitációs gyorsulás	g	L/τ^2

A dimenzióanalízis során a következő függvény paramétereinek kitevőit keressük:

$$\varphi = f(v, l, \Delta t, \eta, \lambda, \rho, c_p, (\beta g)) \quad (10.44)$$

A függvény paramétereit dimenzionálisan behelyettesítve:

$$\frac{Q}{L^2 \tau} = \left(\frac{L}{\tau}\right)^a L^b t^c \left(\frac{M}{L\tau}\right)^d \left(\frac{Q}{L\tau \cdot t}\right)^e \left(\frac{M}{L^3}\right)^f \left(\frac{Q}{M \cdot t}\right)^h \left(\frac{L}{\tau^2 t}\right)^j \quad (10.45)$$

Az egyenlet kitevőire felírva az egyenleteket:

$$\begin{aligned}
 L: & -2 = a + b - d - e - 3f + j \\
 M: & 0 = d + f - h \\
 \tau: & -1 = -a - d - e - 2j \\
 t: & 0 = c - e - h - j \\
 Q: & 1 = e + h
 \end{aligned}
 \tag{10.46}$$

majd kifejezve megkapjuk az alábbi dimenzió nélküli csoportokat:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= cons \cdot v^a l^{-1+a+3j} \Delta t^{1+j} \eta^{-a+h-2j} \lambda^{1-h} \rho^{a+2j} c_p^h (\beta g)^j \\
 \varphi &= cons \left(\frac{\Delta t \lambda}{l} \right) \left(\frac{v l \rho}{\eta} \right)^a \left(\frac{c_p \eta}{\lambda} \right)^h \left(\frac{l^3 \Delta t \rho^2 (\beta g)}{\eta^2} \right)^j
 \end{aligned}
 \tag{10.47}$$

A Prandtl-szám a hőátadás hatásfok jellegű anyagi jellemzőit foglalja magába:

$$Pr = \frac{c_p \eta}{\lambda} \tag{10.48}$$

A Grashoff-szám a térfogategységre eső felhajtóerő és a belső súrlódási erő hányadosa:

$$Gr = \frac{l^3 \rho^2 g \beta \Delta t}{\eta^2} \tag{10.49}$$

A Reynolds-szám a tehetetlenségi erő és a belső súrlódási erő hányadosa:

$$Re = \frac{l v \rho}{\eta} \tag{10.50}$$

Az egyenlet felírható tisztán dimenzió nélküli kifejezések formájában is:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= cons \frac{\Delta t \lambda}{l} Re^a Pr^h Gr^j = \alpha \Delta t \\
 Nu &= \frac{\alpha l}{\lambda} = c Re^a Pr^h Gr^j
 \end{aligned}
 \tag{10.51}$$

Az áramlásos hőátadási műveletek esetében az átadott hőmennyiséget a (10.43) összefüggés alapján számíthatjuk, melyben az α hőátadási tényező meghatározása a Nusselt (Nu) szám segítségével történhet.

A Nu szám olyan dimenzió nélküli kifejezés, amely az áramló közeg és a fal határán végbemenő hőátadásra jellemző.

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} \tag{10.52}$$

ahol :

α a hőátadási tényező [W/(m² K)],

λ	a fluidum hővezetési tényezője [W/(mK)],
l	a geometriailag jellemző hossz [m].

A Nusselt-szám számértékének meghatározásához a Nusselt-függvények állnak a rendelkezésünkre. A megfelelő Nusselt-függvényt nagyon körültekintően kell kiválasztanunk, hiszen a körülményektől függően más és más függvényt kell alkalmaznunk, így

- szabadkonvekciónál,
- kényszerkonvekciónál,
- lamináris-, átmeneti- ill. turbulens áramlás esetén, valamint
- hengerek, csövek, síklapoknál,

rendre különböző összefüggéssel kell számolnunk, de azt is figyelembe kell vennünk, hogy miként változik a geometriailag jellemző hossz, attól függően is, hogy vízszintes vagy függőleges elrendezésű-e a berendezésünk.

13.4.3. Szabadkonvekció kicsiny határolt térben

Amikor az áramlási kép nem tökéletesen kiépített a geometriai elrendezés miatt, akkor a klasszikus áramlási törvények nem alkalmazhatóak helytállóan. A valóságot legjobban megközelítő értéket akkor kapunk, ha a hővezetésből indulunk ki és Fourier I törvényét egy áramlási együtthatóval (ε) módosítjuk:

$$\Phi = \varepsilon \lambda \frac{1}{l} \Delta t A \quad \varepsilon \lambda = \lambda_e \quad (10.53)$$

λ_e az egyenértékű hővezetési tényező.

ε értékének kiszítása az alábbi képlettel történhet:

$$ha \quad Pr \cdot Gr \leq 1000 \quad \varepsilon = 1$$

$$ha \quad Pr \cdot Gr \geq 1000 \quad \varepsilon = 0,18(PrGr)^{0,25}$$

13.4.4. Szabadkonvekció határtalan térben

A határtalan térben történő szabadkonvekciós áramlás esetében, tehát, amikor külső kényszerítő erő nélkül áramlik a közeg, a korábban megismert összefüggés úgy módosul, hogy a Nusselt függvényben a Re szám nem, csak a Prandtl és a Grasshoff szám értéke szerepel. E két dimenzió nélküli szám szorzatának nagyságtól és a geometriai elrendezéstől függően kell kiválasztanunk az aktuális Nusselt függvényt.

a) Függőleges tartályoknál, hengereknél és függőleges sík falak mentén:

$$ha \quad 10^4 \leq PrGr \leq 10^9 \quad Nu = 0,53(PrGr)^{0,25}$$

$$ha \quad 10^9 \leq PrGr \leq 10^{12} \quad Nu = 0,12(PrGr)^{0,33}$$

Levegő és egyéb gázok esetében, mivel a gázok fizikai paraméterei nem változnak olyan jelentősen a hőmérséklettel, lehetőségünk van közvetlenül α azaz a hőátadási tényező kiszámítására.

$$ha \quad 10^4 \leq PrGr \leq 10^9 \quad \alpha = 1,3 \left(\frac{\Delta t}{l} \right)^{0,25}$$

$$ha \quad 10^9 \leq PrGr \leq 10^{12} \quad \alpha = 1,8 (\Delta t)^{0,25}$$

A jellemző hossz. (l) ezen eseteknél a függőleges test, fal magassága.

b) Vízszintes hengereknél

$$ha \quad 10^3 \leq PrGr \leq 10^9 \quad Nu = 0,54 (PrGr)^{0,25}$$

$$ha \quad 10^9 \leq PrGr \leq 10^{12} \quad Nu = 0,22 (PrGr)^{0,33}$$

Levegőnél:

$$ha \quad 10^3 \leq PrGr \leq 10^9 \quad \alpha = 1,31 \left(\frac{\Delta t}{d} \right)^{0,25}$$

$$ha \quad 10^9 \leq PrGr \leq 10^{12} \quad \alpha = 1,8 (\Delta t)^{0,33}$$

Jellemző hosszúság az átmérő (d).

c) Vízszintes síklapoknál

A b) pontnál leírtakkal megegyező, de a jellemző hossz a síklap hossza.

13.4.5. Kényszerkonvekciós hőátadás

A áramlásos hőátadási műveletek esetében az átadott hőmennyiséget a korábban levezetett összefüggés alapján számíthatjuk: α hőátadási tényező meghatározása a Nusselt (Nu) szám segítségével történhet.

A kényszerkonvekciós Nusselt függvényeknél a Re szám és a Pr szám az alapvető, meghatározó dimenzió nélküli kifejezések, a Gr szám, ami gravitációs gyorsulásnak az áramlásra kifejtett hatását adja meg, csak azokban az esetekben számottevő, ahol a turbulencia mértéke alacsony, vagyis a lamináris tartományban.

a) Kényszerkonvekció csövek belsejében történő áramlásnál:

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4} \quad \text{ha } 2300 < Re$$

Jellemző hossz a cső átmérője.

b) Kényszerkonvekció csövek külső oldala mellett:

$$Nu = 0,26 Re^{0,6} Pr^{0,3}$$
$$Nu = 0,86 Re^{0,43} Pr^{0,3} \quad \text{ha } 1 < Re < 200$$

Jellemző hossz a cső átmérője, vagy hossza a függőleges elrendezéseknél.

c) Vízszintes sík lapok mentén.

$$Nu = 0,036 Re^{0,8} Pr^{0,33} \quad \text{ha } Re > 2 \cdot 10^4$$
$$Nu = 0,66 Re^{0,5} Pr^{0,33} \quad \text{ha } Re < 2 \cdot 10^4$$

Levegőnél:

$$\alpha = 5,7 + 3,9v \quad \text{ha } v < 5 \text{ m/s}$$
$$\alpha = 7,4v^{0,8} \quad \text{ha } 5 < v < 30 \text{ m/s}$$

Példák, kérdések:

1. Mekkora az egyenértékű hővezetési tényezője annak a 25 mm vastag levegőrétegnek, amelynél a határoló két hőmérséklet értéke: 150°C ill. 50°C? Az adott levegőréteg fizikai jellemzői: hővezetési tényező: 0,037 W/mK, fajhő: 1,009 kJ/kgK, dinamikai viszkozitás: $21,81 \times 10^{-6}$ Pas, sűrűség: $0,945 \text{ kg/m}^3$, köbös hőtágulási együttható: $2,068 \times 10^{-3} \text{ 1/K}$.

Megoldás:

$$\lambda_e = \varepsilon \cdot \lambda$$

$$\varepsilon = 0,18(\text{Pr} \cdot \text{Gr})^{0,25}$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{c_p \cdot \eta}{\lambda} = \frac{1,009 \cdot 1000 \cdot 21,81 \cdot 10^{-6}}{0,037} = 0,595$$

$$\text{Gr} = \frac{d^3 \cdot \rho^2 \cdot g \cdot \beta \cdot \Delta t}{\eta^2} = \frac{(0,025)^3 \cdot (0,945)^2 \cdot 9,81}{(21,81 \cdot 10^{-6})^2} \cdot 2,068 \cdot 10^{-3} \cdot (150 - 50) = 2,9755 \cdot 10^4$$

$$\varepsilon = 0,18 \cdot (0,595 \cdot 2,9755 \cdot 10^4)^{0,25} = 2,076$$

$$\lambda_e = 2,076 \cdot 0,037 = 0,0768 \text{ W/mK}$$

2. Számítsa ki a levegő okozta hőveszteséget egy edény falánál, ami egy függőleges henger alakú testnek fogható fel. A test átmérője: 0,9 m, magassága: 1,2 m. A fal hőmérséklete: 49°C, a levegőé: 17°C. $\eta = 1,9 \cdot 10^{-5}$ Pas, $c_p = 1,01 \text{ kJ/kgK}$, $\lambda = 0,025 \text{ W/mK}$, $\beta = 0,0032 \text{ 1/K}$, $\rho = 1,12 \text{ kg/m}^3$. $\text{Nu} = 0,13(\text{PrGr})^{0,33}$

Megoldás:

$$\text{Gr} = \frac{g \cdot l^3 \cdot \rho^2 \cdot \beta \cdot \Delta t}{\eta^2} = \frac{9,81 \cdot 1,2^3 \cdot 1,12^2 \cdot 0,0032 \cdot (49 - 17)}{(1,9 \cdot 10^{-5})^2} = 6,03 \cdot 10^9$$

$$\text{Pr} = \frac{c_p \cdot \eta}{\lambda} = \frac{1010 \cdot 1,9 \cdot 10^{-5}}{0,025} = 0,76$$

$$\text{Nu} = 0,13 \cdot (\text{Pr} \cdot \text{Gr})^{0,33} = 0,13 \cdot (0,76 \cdot 6,03 \cdot 10^9)^{0,33} = 201,16$$

$$\alpha = \frac{\text{Nu} \cdot \lambda}{l} = \frac{201,16 \cdot 0,025}{1,2} = 4,19 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$\alpha = 1,8 \cdot \Delta t^{0,25} = 1,8 \cdot 32^{0,25} = 4,28 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$A = d \cdot \pi \cdot l = 0,9 \cdot \pi \cdot 1,2 = 3,39 \text{ m}^2$$

$$\Phi = \alpha \cdot A \cdot \Delta t = 4,28 \cdot 3,39 \cdot 32 = 464,7 \text{ W}$$

3. A kalorikus műveletek közé tartozik a

- a. sterilizálás
- b. kondenzálás
- c. lepárlás
- d. bepárlás
- e. agglomerálás

Megoldás: a, b, d.

4. Az elektromágneses hullámok a felületen

- a. adszorbeálódnak
- b. reflektálódnak
- c. transzmittálódnak
- d. transzformálódnak
- e. abszorbeálódnak

Megoldás: b, c, e

5. A _____ során a hőenergia a molekulák, ill. elemi részecskék helyváltoztató elmozdulása nélkül adódik át a melegebb helyről a hidegebb helyre.

Hővezetés (kondukciónak)

6. _____s áramlás alakul ki például, ha egy tartályban vizet melegítünk, vagy ha egy felfűtött berendezés, radiátor felmelegíti a terem levegőjét. Ha a fent említett esetekben szivattyú, keverő vagy ventilátor áramoltatja a közegeket akkor _____-val kell számolnunk.

Szabadkonvekció, kényszerkonvekció

7. Melyik állítás nem igaz a hősugárzásra?

- a. Hősugárzás során a hő a sugárzó test molekuláinak vagy atomjainak hőmozgása következtében kibocsátott különböző hullámhosszú elektromágneses rezgések formájában terjed.
- b. A sugárzásos hőátadáshoz szükséges valamilyen közvetítő közeg (gáz vagy folyadék).
- c. A sugárzás független a hőt elnyelő vagy kibocsátó médium vastagságától.
- d. A hősugárzás függ a sugárzó test hőmérsékletétől, a geometriai viszonyoktól, a felület szerkezetétől és tulajdonságaitól.
- e. A fekete és szürke testek emissziós értékének arányát pedig *feketeségi fok*nak nevezzük.

Megoldás: b

8. Melyik hőtani jellemző mértékegysége hibás?

- a. hőmérsékletvezetési tényező: a (m^2/s)
- b. hővezetési tényező: λ ($\text{W}/\text{m}^2\text{K}$)
- c. hőátadási tényező: α ($\text{W}/\text{m}^2\text{K}$)
- d. hőáram: Φ (W)
- e. hőáramsűrűség: f (W/m^2)

Megoldás: b

9. 15°C -os, 18 mm átmérőjű kelbimbót kell előfőzünk 96°C -os vízben. Mennyi idő múlva éri el a maghőmérséklet a 90°C -t?

A hőfokvezetési tényező: $1,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, a hővezetési tényező: $0,639 \text{ W}/\text{mK}$, a hőátadási tényező pedig: $50,69 \text{ W}/\text{m}^2\text{K}$.

$$Y = \frac{t_k - t_{cél}}{t_k - t_{kezd}} = \frac{96 - 90}{96 - 15} = 0,074$$

$$n = 0$$

$$Bi = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda} = \frac{50,69 \cdot 0,009}{0,639} = 0,714$$

$$m = \frac{1}{Bi} = 1,4$$

$$Fo = 1,65 = \frac{a \cdot \tau}{l^2}$$

$$\tau = \frac{1,65 \cdot (0,009)^2}{1,4 \cdot 10^{-7}} = 954,6 \text{ s} = 15,9 \text{ min}$$

10. Mekkora a hőáram értéke annál az 1 m^2 -es, 30 mm vastag acélfalnál melyet egy 2 mm vastag vízkőréteg borít? A vízkő hővezetési tényezője: $1016 \text{ W}/\text{mK}$, az acél hővezetési tényezője: $58 \text{ W}/\text{mK}$. A fal két oldalán mért hőmérséklet: 200°C , illetve 250°C .

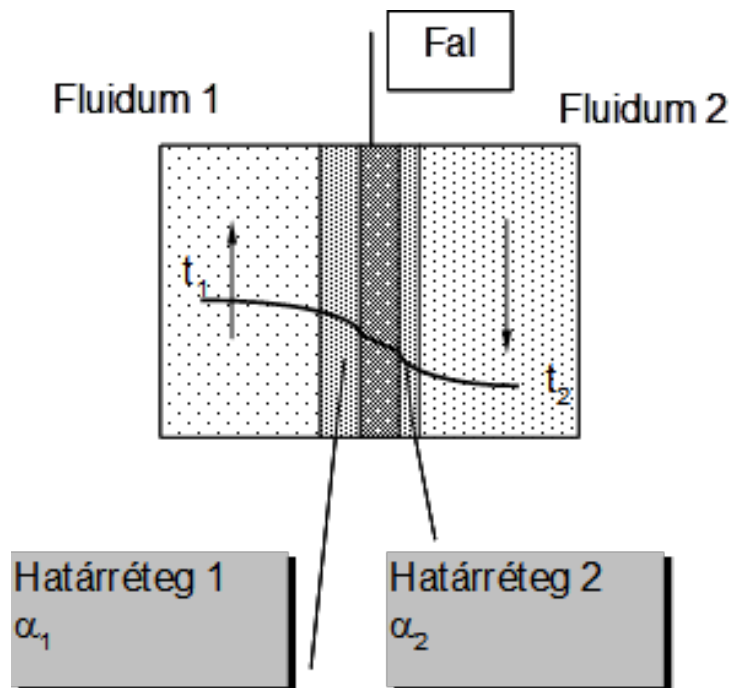
$$\Phi = \left(\frac{\lambda_1}{\delta_1} + \frac{\lambda_2}{\delta_2} \right) \cdot \Delta t \cdot A$$

$$\Phi = \left(\frac{58}{0,03} + \frac{1,16}{0,002} \right) \cdot (250 - 200) \cdot 1 = 125,666 \text{ kJ}$$

14. Hőcsere

14.1. A hőátbocsátás

Amennyiben egy, a **118. ábra** szereplő rendszer teljes hőátbocsátására vagyunk kíváncsiak, vagyis arra, hogy adott fluidum a falon keresztül mennyi hőenergiát képes átadni a másik oldalon áramló fluidumnak, akkor a két határréteg és a fal együttes hőellenállását kell figyelembe vennünk.



118. ábra: Síkfal a vele érintkező fluidumok határrétegeivel

A hőátbocsátás alapegyenlete tehát:

$$\Phi = k A \Delta t_{köz} \quad (11.1.)$$

ahol:

k a hőátbocsátási tényező [$\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$],
 $\Delta t_{köz}$ a közepes hőmérséklet-különbség [$^{\circ}\text{C}$].

Az előbbieket értelmében pedig

$$k = \frac{l}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (11.2)$$

Példa:

Egy kemence fala két rétegből áll, egy tűzálló téglából, $\delta_1 = 0,5$ m, és épület téglából, $\delta_2 = 0,25$ m. A hőátmenet a teljes falon át állandósult állapotú.

Határozzuk meg

1. az 1 m^2 -re eső hőveszteséget,
2. az épület téglá és a tűzálló téglá határfelületének hőmérsékletét, t_3 , amennyiben a kemence terének hőmérséklete $t_1 = 1300$ °C, a külső tér hőmérséklete $t_5 = 25$ °C.

A fűtőgázok hőátadási tényezője a fal felé $\alpha_1 = 34,8 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$.

A fal hőátadási tényezője $\alpha_2 = 16,2 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$.

Hővezetési tényezők:

- a tűzálló tégláé $\lambda = 1,16 \text{ W}/(\text{mK})$,
- az épület tégláé $\lambda = 0,58 \text{ W}/(\text{mK})$.

Megoldás:

(1) k számolása

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{34,8} + \frac{0,5}{1,16} + \frac{0,25}{0,58} + \frac{1}{16,2} = 1,05 \text{ W} / \text{m}^2 \text{ K}$$

(2) Hőveszteség számolása

$$\varphi = k(t_1 - t_5) = 1,05(1300 - 25) = 1340 \text{ W}/\text{m}^2$$

(3) Alap összefüggés

$$\varphi = \alpha_1 \Delta t_1 = \frac{\lambda_1}{\delta_1} \Delta t_2 = \frac{\lambda_2}{\delta_2} \Delta t_3 = \alpha_2 \Delta t_4$$

(Az egyes rétegeken áthaladó hőáram)

(4) Az épület téglá külső felületének hőmérséklete (t_2). Az előző pont első egyenlőségébe helyettesítjük be a már ismert adatokat:

$$1340 = 34,8(1300 - t_2) \rightarrow t_2 = 1261 \text{ °C}$$

(5) Az épület téglá és a tűzálló téglá határfelületének hőmérséklete (t_3)

$$\varphi = \frac{\lambda_1}{\delta_1} (t_2 - t_3)$$

$$t_3 = t_2 - \varphi \frac{\delta_1}{\lambda_1} = 1261 - 1340(0,5/1,16) = 683 \text{ °C}$$

Megjegyzés: Az épület téglá 800 °C feletti hőmérsékleten elveszíti szilárdságát, szétporlad.

14.2. Logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbség

A gyakorlatban sokféle hőátzármaztatási műveletet alkalmaznak. Ezért nem meglepő, hogy az ilyen műveleteket végrehajtó berendezések is nagyon változatos felépítésűek. Mielőtt rátérnénk a hőcserélők ismertetésére, vizsgáljuk meg újra a már megismert hőcsere egyenletet:

$$\varphi = k \cdot \Delta t_{köz} \quad (11.3)$$

ahol k a hőátbocsátási tényező (W/(m²K)),
 A a hőátadó felület (m²),
 Δt a hőmérsékletek különbsége, a hajtóerő (K illetve °C).

A hőcsere esetében a meleg közeg (1) lehül, míg a hideg közeg (2) felmelegszik, tehát négy hőmérsékleti értékből kell Δt -t meghatároznunk. Képzeljük el a legegyszerűbb felépítésűnek tekinthető [két, koaxiális, vagyis közös tengelyű csőből álló] - cső a csőben típusú hőcserélőt, melyben a két betáplált közeg vagy egymással azonos (egyenáramú kapcsolás), vagy ellentétes irányban (ellenáramú kapcsolás) áramlik!

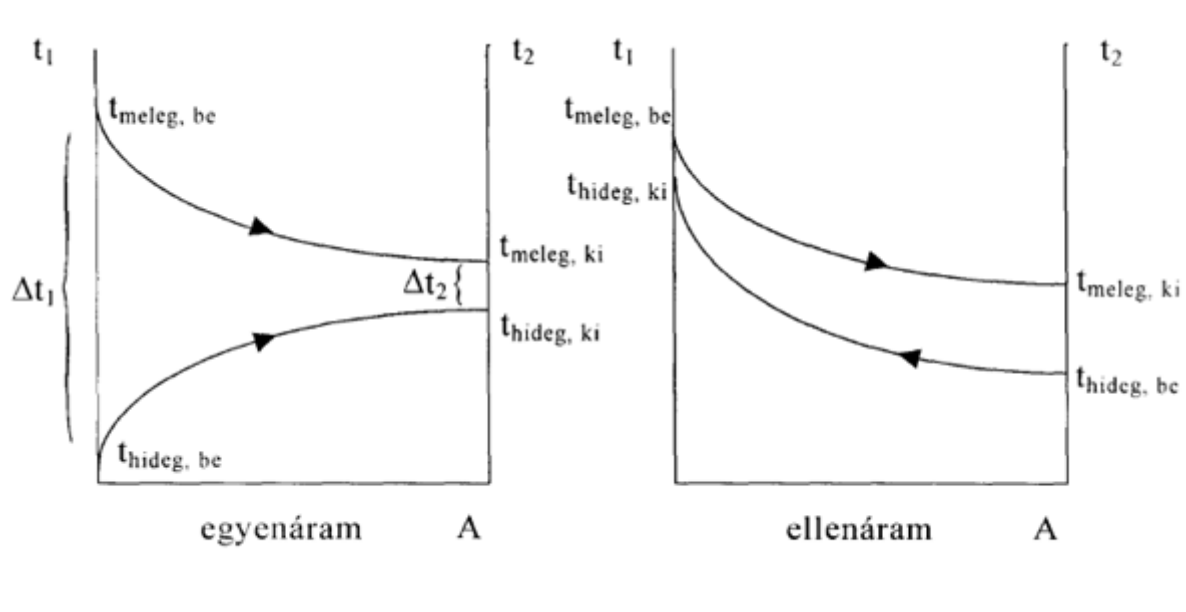


119. ábra: Egyenáram és ellenáram animációja cső a csőben típusú hőcserélőben
 (Animáció angol nyelven: http://www.rpaulsingh.com/animated%20figures/fig4_6.htm)

Ekkor könnyen beláthatjuk, hogy a cső hossza mentén a hajtóerő (vagyis a hőmérsékletkülönbség) változik. Kérdés, hogyan számítsuk ki a folyamatosan változó hőmérsékletkülönbséget? Ebben az esetben, a mérnöki gyakorlat szerint, az átlagos hőmérsékletkülönbséget a logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbség meghatározásával kapjuk meg, amely a

$$\Delta t_{köz} = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\ln \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}} \quad (11.4)$$

képlettel számítható. A képletben a hőmérsékletkülönbségeket (Δt_1 és Δt_2) célszerűen a hőmérsékleti értékek grafikus ábrázolásának segítségével határozzuk meg, a **120. ábra** megfelelően.



120. ábra: A két közeg hőmérsékletének változása egyenáramú és ellenáramú hőcserélőben.

14.3. Hőcserélő berendezések csoportosítása

A hőcserélőket az alábbiak szerint csoportosíthatjuk.

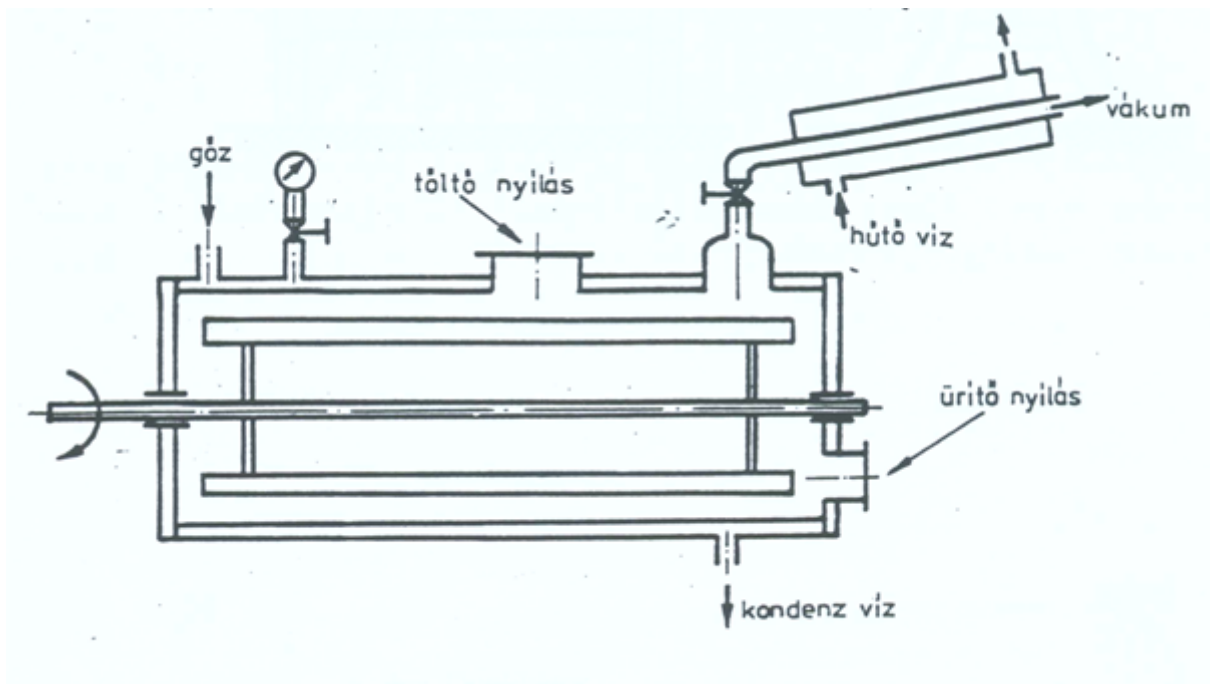
- tartályszerű hőkezelő berendezések,
- főzőberendezések és
- átáramlásos hőcserélő berendezések.

14.3.1. Tartályszerű hőcserélők

A **tartályszerű** hőkezelő berendezésekre jellemző az anyagoldali nagy tér, melyben hőátadó csövek helyezkednek el, vagy a tartály alja duplafalú; esetleg mindkét fűtési módot alkalmazzák bennük. A készülék alkalmas viszonylag alacsony hőmérséklet tartására, melegítésre és hűtésre is. Ilyen berendezések pl. a tejiparban a különféle érlelők és ömlesztők, vagy a szesziparban az erjesztők. Méretük néhány m^3 -tól több száz m^3 -ig változik.

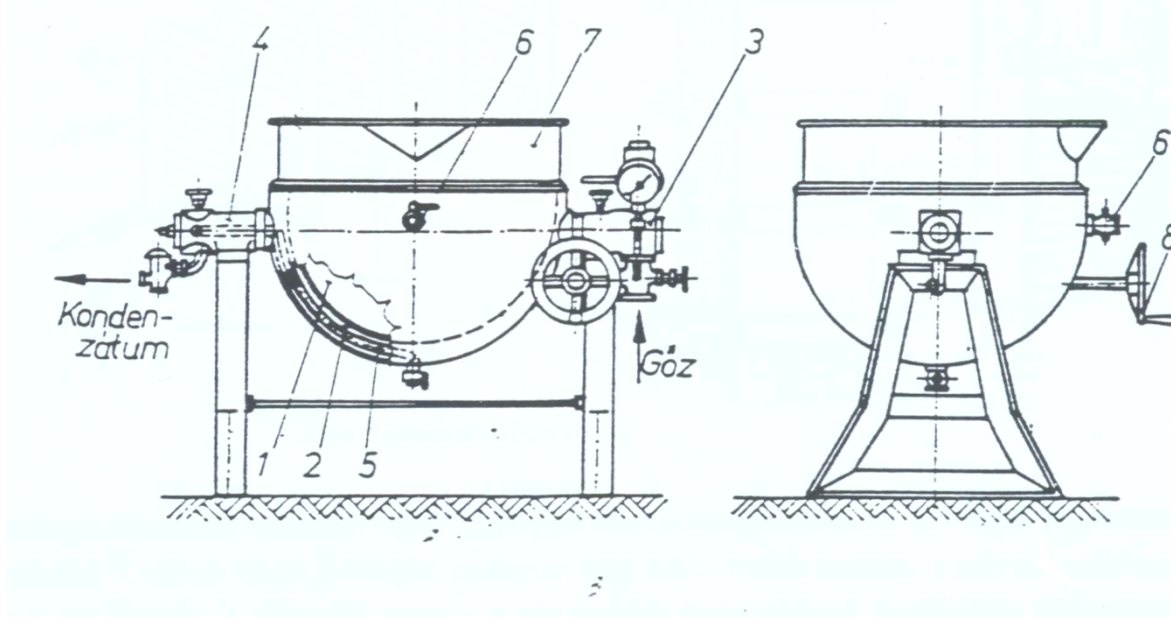
A **főzők** olyan berendezések, amelyekben intenzív hőkezelés valósítható meg, és ennek eredményeként a betáplált anyag jelentős fizikai és kémiai változást szenved.

A **dezinfektor** duplafalú, fekvőhengeres, fűthető és keverővel ellátott főzőkészülék. Nyomás alatti főzésre és vákuumszáritásra egyaránt alkalmazható. Főleg állati melléktermékek és hulladékok hasznosítására, feldolgozására alkalmazzák.



121. ábra: Dezinfektor

A **duplikátor** többnyire félgömb alakú, dupla falú üst, keverővel vagy anélkül. Gőzzel fűthető és az ürítés céljából fogaskerék áttétellel billenthető. Az egyik legrégebbi és az iparok többségénél alkalmazott berendezés.

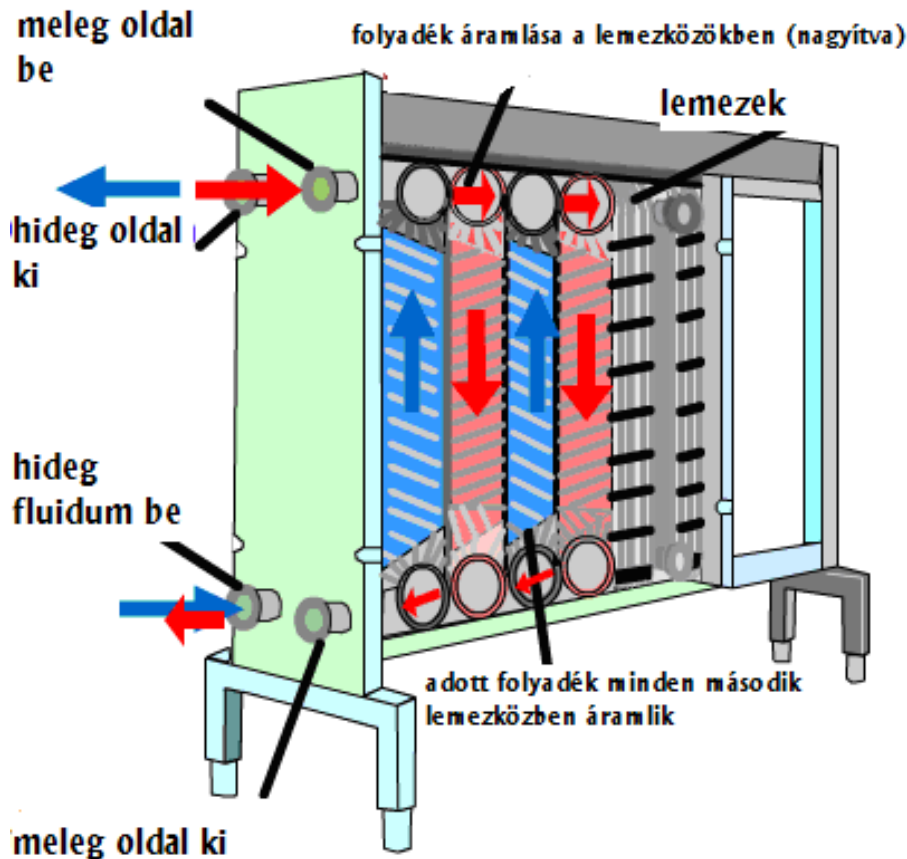


122. ábra: Duplikátor

14.3.2. Átáramlásos hőcserélők

Az **átáramlásos hőcserélők** folytonos üzeműek. A meleg és a hideg közeg gyakorlatilag állandósult viszonyok között áramlik a hőcserélő két szomszédos terében. A melegítésen, ill. hűtésen kívül felhasználhatók folyadékok, emulziók és szuszpenziók sterilizálására, ill. pasztörözésére is.

A **lemezes hőcserélő**knél néhány milliméter távolságban, párhuzamosan elhelyezett lemezekből alakítják ki az anyagteret. Minden második lemezközben a meleg, ill. a hideg közeg áramlik. Ilyen módon kis helyen nagy hőátadó felület kialakítására és igen kedvező áramlási körülmények kialakítására nyílik lehetőség.

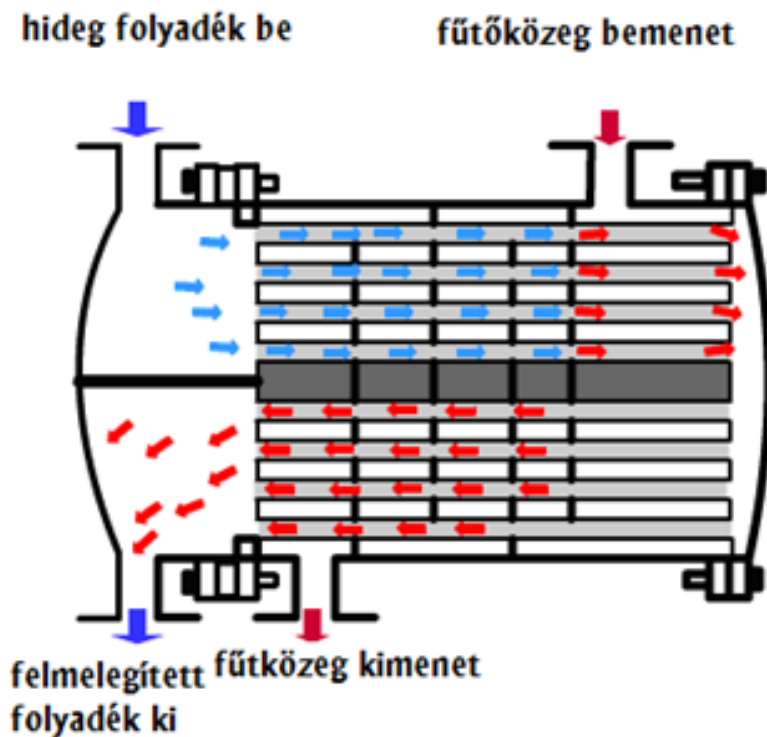


(c) R. Paul Singh

123. ábra: Lemezes hőcserélő

(Animáció angol nyelven: http://www.rpaulsingh.com/animated%20figures/fig4_2.htm)

A **csőköteges hőcserélő** vízszintes vagy függőleges elrendezésű, párhuzamos csövekből kialakított berendezés. A csövek között fűtőgáz, melegvíz vagy hűtőfolyadék áramlik. A csövek belsejében a kezelendő anyag áramlik. A hőcserélő végein, a zárófedelek kialakításának megfelelően többszörös átömlés valósítható meg.



Copyright: R. Paul Singh

124. ábra: Csőköteges hőcserélő
(Animáció angol nyelven: http://www.rpaulsingh.com/animated%20figures/fig4_8.htm)

14.4. Bepárlás

A bepárlás műveletén az oldat besűrítését értjük az oldószernek forralással történő eltávolításával. A bepárlás főbb alkalmazási területei a következők:

- elősűrítés, pl. porlasztva szárításnál, kristályosításnál,
- a folyadék mennyiségének csökkentése, a szállítási, a tárolási, vagy a csomagolási költségek csökkentése céljából,
- a vízakktivitás csökkentése, a mikroorganizmusok szaporodásának lassítása céljából
- melléktermék hasznosítása, pl. seprő, vagy melasz előkészítése takarmányozáshoz.

14.4.1. A bepárlás anyagmérlege

Az anyagmérleg az anyagmegmaradás elvén alapul, vagyis a bepárlóba belépő és az onnan eltávozó anyagok mennyiségének egyenlőnek kell lennie.

$$m_{lé} = m_{sűű} + m_{pára} \quad (11.5)$$

$$m_{lé} \cdot c_{lé} = (m_{lé} - m_{pára}) \cdot c_{sűű} \quad (11.6)$$

ahol \underline{m} a tömegeket jelzi a megfelelő indexel ellátva, c a szárazanyag-tartalmat (ref. %) jelenti.

$$m_{pára} = m_{híg\ lé} \left(1 - \frac{c_{híg\ lé}}{c_{sűrítvény}} \right) \quad (11.7)$$

Üzemi elszámolásnál általában a szárazanyag-tartalmat veszik figyelembe a következő összefüggés alapján

$$m_{lé} \cdot c_{lé} = m_{sűű} \cdot c_{sűű} \quad (11.8)$$

Ez azt jelenti, hogy a műszak a szárazanyag-tartalommal számol el a feldolgozás során.

Példa:

A bepárlóban 250 kg 10%-os anyagot kell besűrítünk 30%-ra.
Számítsuk ki, hogy hány kg vizet kell elpárologtatni ?

Megoldás:

- a) 250 kg 10%-os oldatban 25 kg szárazanyag és $250 - 25 = 225$ kg víz található.
A 30%-os sűrítményben szintén 25 kg a szárazanyag mennyisége, tehát a sűrítmény összes mennyisége: $25 \cdot 100 / 30 = 83$ kg. A sűrítményben a 25 kg szárazanyag mellett 58 kg víz található. Így az elpárologtatandó víz mennyisége: $225 - 58 = 167$ kg.
- b) a (30) számológéplet segítségével:

$$m_{pára} = 250 \left(1 - \frac{10}{30} \right) = 166,66 \text{ kg} \Rightarrow 167 \text{ kg}$$

14.4.2. A bepárlás hőmérlege

A hőmérleg az energia megmaradás törvényén alapul. A hőmérleg esetében csak a rendszerbe belépő, kilépő és a rendszerben raktározott hőenergiát vesszük figyelembe, a többi energiatípus (elektromos, mechanikai, kémiai) energia számbavételétől eltekintünk. Ezek szerint a berendezésbe belépő hőmennyiség:

$$\begin{aligned} Q_{lé} &= m_{lé} \cdot c_{p,lé} \cdot t_{lé} \\ Q_{gő} &= m_{gő} \cdot h_{gő} \end{aligned} \quad (11.9)$$

Kilépő hőmennyiségek:

$$\begin{aligned} Q_{sűű} &= (m_{lé} - m_{pára}) \cdot c_p \cdot t_{sűű} \\ Q_{pára} &= m_{pára} \cdot h_{pára} \\ Q_{kond} &= m_{gő} \cdot c_p \cdot t_{kond} \\ Q_{veszt} &= \alpha \cdot A \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (11.10)$$

Ahol $Q_{lé}$ a sűrítendő anyag, $Q_{gő}$ a fűtőgőz, $Q_{sűű}$ a sűrítmény, $Q_{pára}$ az elpárologtatott vízpára, Q_{kond} a lecsapódott fűtőgőzből képződött kondenzvíz hőmennyisége, Q_{veszt} pedig a berendezés falán keresztül leadott hőveszteség.

Példa:

Az előző fejezetben található példa adatait egészítsük ki a következő hőtani adatokkal:

A betáplált anyag hőmérséklete 18 °C, és 77 kPa-on a forráspontja 91 °C. Az oldat fajhője $c_p = 4,187 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$.

A fűtőgőz 200 kPa túlnyomású, tehát a hőmérséklete: 134 °C. Látens hője (párolgáshője): 2164 kJ/kg, entalpiája pedig 2726 kJ/kg ezen a hőmérsékleten. A bevezetett gőzmennyiség: 195 kg.

A párák hőmérséklete 91 °C (77 kPa), látens hője 2281 kJ/kg, entalpiája pedig 2658 kJ/kg.

A kondenzációs hőmérséklet: 91 °C.

Belépő hőmennyiségek:

$$Q_{lé} = m_{lé} \cdot c_{p,lé} \cdot t_{lé} = 250 \cdot 4,187 \cdot 10^3 \cdot 91 = 1,88 \cdot 10^7 \text{ J}$$

$$Q_{gőz} = m_{gőz} \cdot h_{gőz} = 195 \cdot 2,73 \cdot 10^6 = 5,32 \cdot 10^8 \text{ J}$$

$$Q_{be} = 5,508 \cdot 10^8 \text{ J}$$

Kilépő hőmennyiségek:

$$Q_{sűű} = (m_{lé} - m_{pára}) \cdot c_p \cdot t_{sűű} = (250 - 167) \cdot 4,187 \cdot 10^3 \cdot 91 = 3,16 \cdot 10^7 \text{ J}$$

$$Q_{pára} = m_{pára} \cdot h_{pára} = 167 \cdot 2,658 \cdot 10^6 = 4,44 \cdot 10^8 \text{ J}$$

$$Q_{kond} = m_{gőz} \cdot c_p \cdot t_{kond} = 195 \cdot 4,187 \cdot 91 = 7,43 \cdot 10^7 \text{ J}$$

$$Q_{ki} = 5,499 \cdot 10^8 \text{ J}$$

A hővesztés a belépő és a kilépő hő különbsége adja:

$$Q_{veszt} = Q_{be} - Q_{ki} = 0,9 \cdot 10^6 \text{ J}$$

A fajlagos gőzigény a szükséges gőzmennyiség és az elpárologtatandó víz mennyisége hányadosából adódik:

$$\frac{m_{gőz}}{m_{pára}} = \frac{195}{167} = 1,17 \text{ 195/167} = 1,17 \text{ kg gőz/kg víz..}$$

14.4.3. Bepárló berendezések

A bepárlóknak alapvetően két funkciót kell ellátniuk:

- az oldat felmelegítése a forráspontra és a párolgáshő közlése,
- a párák elválasztása a folyadék fázistól.

Ehhez a két alapfeladathoz három funkcionális rész szükséges:

- hőcserélő, a felmelegítéshez,
- páratér, a forrás és pára kilépésének biztosításához,
- szeparátor, pára leválasztásához.

Ez a három fő funkcionális egység építi fel valamennyi bepárló berendezést, de geometriai kialakításuk és egymáshoz viszonyított elrendezésük különböző lehet a bepárlási feladattól függően.

A bepárlók teljesítményét több olyan paraméter határozza meg, amelyeket a kezelőknek állandóan ellenőrizniük kell:

1. A lé optimális szintmagassága a fűtőtér fölött néhány centiméter. Ha alacsonyabb, szabad fűtőfelület képződik, és a lé odaéghet. Amennyiben magasabb a lé szintje, a folyadékoszlop nyomása megnő, ez pedig a forráspontot növeli, tehát a buborékképződés feltételei rosszabbodnak.

2. A légritkítás mértéke az elpárolgás intenzitását változtatja meg. Minél nagyobb a vákuum értéke, annál előnyösebb, mert nagyobb lesz a bepárló teljesítménye.

3. A fűtőgőz minősítésénél főként a nem kondenzálódó gázok mennyisége, továbbá a gőz víztartalma és hőmérséklete a meghatározó jellemző.

A legtöbb egyszerű bepárlóban a fent említett három egység általában egy függőleges hengerben található. A berendezés félmagasságában elhelyezett csöves hőcserélő kis átmérőjű csöveiben – a felmelegedés miatt - felfelé áramlik az anyag, a középen, a kis csövek között található nagy átmérőjű, úgy nevezett *ejtőcső*ben pedig lefelé. Így kialakul a cirkuláció, a szabad konvekció. A berendezés tetején cseppfogók biztosítják, hogy csak a párák távozhasanak, a folyadékreszecskek visszahulljanak. - A hőcsere, természetesen, megvalósítható duplikátor rendszerű fűtéssel is.

Ilyen, klasszikus berendezéseknél a számított k érték az irodalom szerint $1800 - 50000 \text{ W/m}^2\text{K}$ lehet. A valóságban k értéke változhat az idővel, hiszen a bepárlás előrehaladtával jelentős változások lépnek fel az anyag fizikai jellemzőinél (pl.: sűrűség, viszkozitás, fajhő, forráspont). Mivel k értéke nem állandó, csak hozzávetőleges, a bepárlóknál fontosabb jelzőszám a *fajlagos gőzigény*, vagyis az 1 kg víz eltávolításához szükséges gőzmennyiség. Klasszikus bepárlóknál ez az érték 1,1 - 1,4 kg között mozog. Egyébként ezt az értéket az anyag- és energiamérlegből számíthatjuk.

A fűtőgőz hasznosítása szerint :

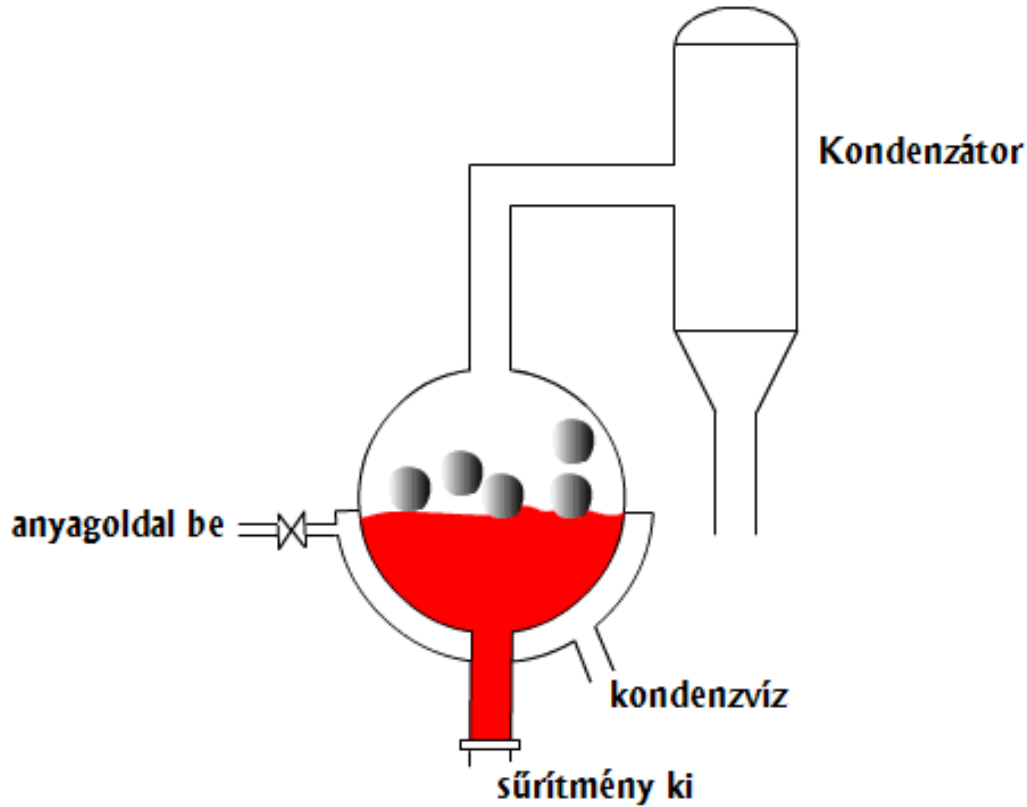
- egy-, és
- többfokozatú

bepárlókat különböztetünk meg.

Az egyfokozatú bepárlók alaptípusai a következők:

Fűtőköpenyes bepárlók

Nagykonzisztenciájú anyagok bepárlására is alkalmasak. Gyakran, mint végbesűrítőt hasznosítják ezt a típust. Szakaszos berendezés, hosszú tartózkodási idővel; kedvezőtlen fűtőfelülettel és hasznos térfogataránnyal. Ennek megfelelően csak kis teljesítménnyel alkalmazható.

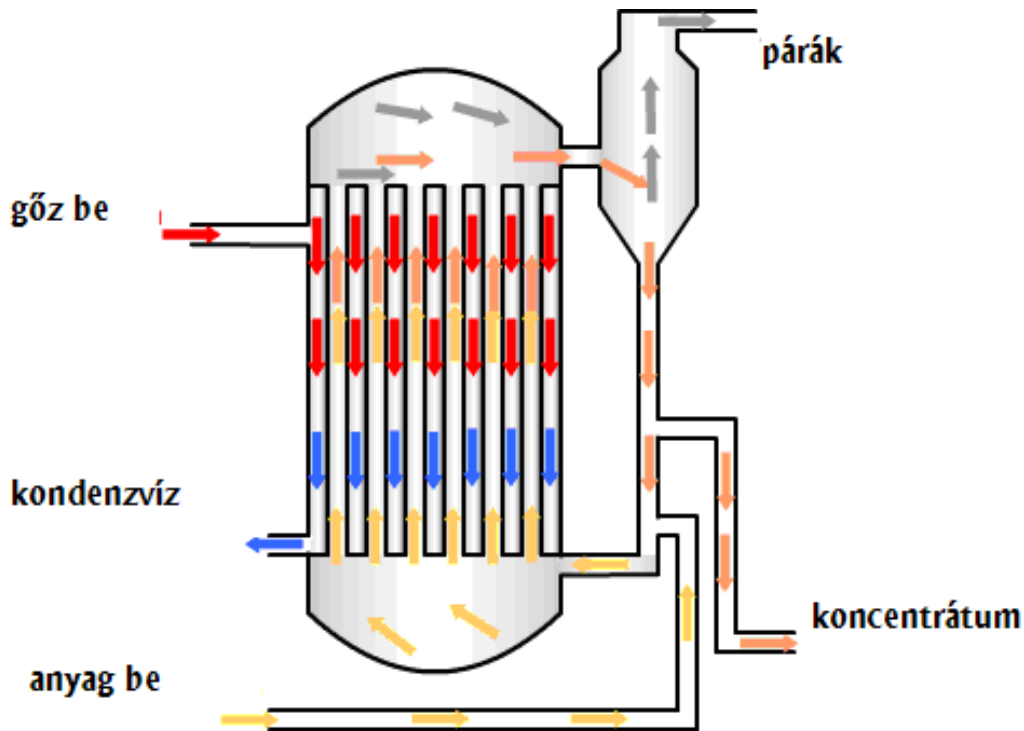


Copyright: R. Paul Singh

125. ábra: Vákuumgömb bepárló
(animáció angol nyelven: http://www.rpaulsingh.com/animated%20figures/fig8_4.htm)

Csőes bepárlók

A csövekben a sűrítendő anyag áramlik, a csövek közötti térben pedig a fűtőgőz. A csövek között elhelyezett nagy átmérőjű csövet ejtőcsőnek nevezzük, melybe kevésbé melegszik fel az anyag, és így ott visszafelé áramlik.

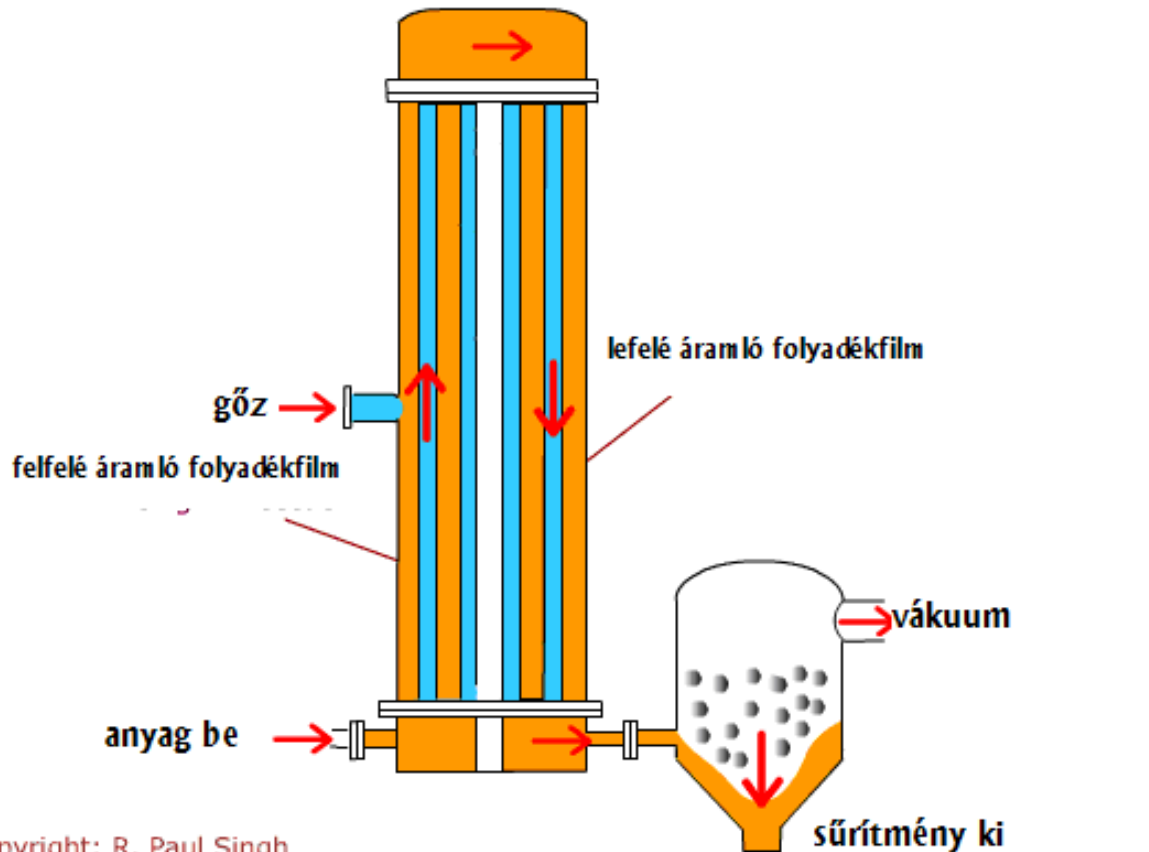


Copyright: R. Paul Singh

126. ábra: Csőköteges bepárló (animáció angol nyelven http://www.rpaulsingh.com/animated%20figures/fig8_1.htm)

Filmbepárlók

A filmbepárlók duplafalú hengerben elhelyezett keverők által a sűrítendő anyagból áramló filmet kialakító berendezések. Ezekben kedvező áramlási feltételek alakulnak ki. A víz, ill. az oldószer gőze rövid úton távozik az anyagból. Rövid az anyag tartózkodási ideje. Hőre érzékeny anyagok csekély károsodással besűrítethetők ebben a berendezésben.



Copyright: R. Paul Singh
127. ábra: Filmbepárló (animáció angol nyelven: http://www.rpaulsingh.com/animated%20figures/fig8_8.htm)

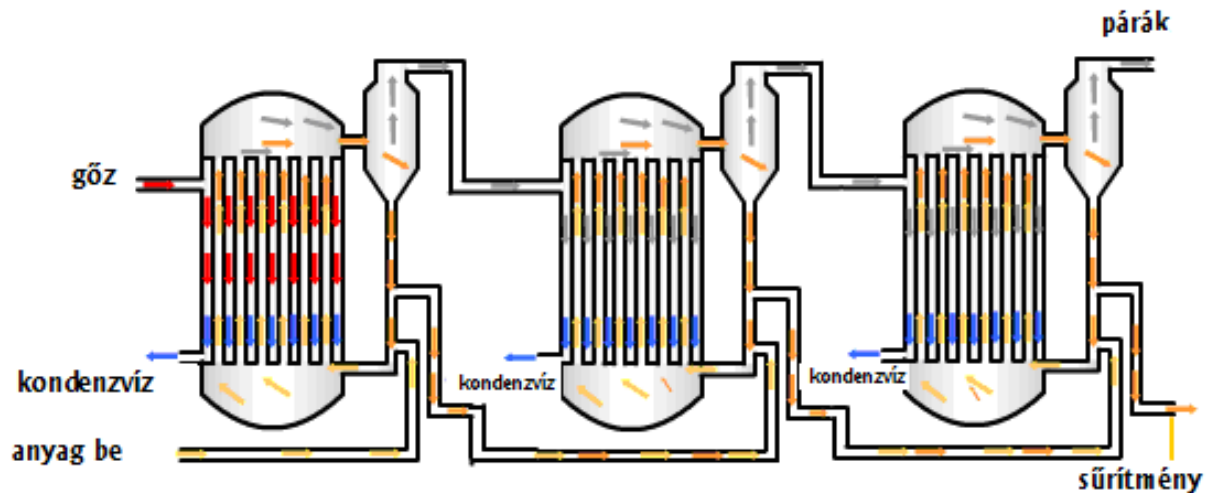
Többfokozatú bepárlók

Ilyen berendezésekben a sűrítendő anyagból képződő párákat egy másik berendezés fűtőterébe vezetik. Így a második bepárlótesthez fűtőgőzt nem kell alkalmazni, tehát jelentős energiamegtakarítás érhető el. A **128. ábra**3 sorba kapcsolt bepárló látható, de elvileg akár 5-6 egység is összekapcsolható.

A többfokozatú bepárlók folytonos üzeműek. A fokozatok egyidejű működésének alapfeltétele az egymást követő egységek közötti

- kellő mértékű légritkítás (vákuum), és az ezzel járó
- forráspont különbség.

Ez biztosítja az egyes fokozatok páratere és fűtőtere között a hőátadáshoz szükséges hőmérséklet különbséget.



Copyright: R. Paul Singh

128. ábra: Többtestes bepárló (animáció angol nyelven: http://www.rpaulsingh.com/animated%20figures/fig8_2.htm)

Végül érdemes megjegyezni, hogy a vákuum mértéke erősen befolyásolja az elpárolgás intenzitását. Minél nagyobb vákuumot alkalmazunk, annál nagyobb lesz a bepárló teljesítménye. Ezt a lehetőséget a bepárlás műveletében érdemes kihasználni. Annál inkább, mert így – az alacsonyabb hőmérsékleten - az anyag kíméletesebben bepárolható. Ez az alapelve a speciális esetekben alkalmazott vákuumdesztillációnak is.

Feladatok:

1. Számítsa ki a logaritmikus közepes hőmérsékletkülönbséget ellenáram esetén egy lemezes hőcserélőben, ha a tej hőmérséklete 37°C-ról 10°C-ra hűl, miközben a hűtővíz hőmérséklete 4°C-ról 8-ra emelkedik!

$$\Delta t_1 = \Delta t_{1\text{ be}} - \Delta t_{2\text{ ki}} = 37 - 8 = 29 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta t_2 = \Delta t_{1\text{ ki}} - \Delta t_{2\text{ be}} = 10 - 4 = 6 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta t_{\text{köz}} = (\Delta t_1 - \Delta t_2) / \ln (\Delta t_1 / \Delta t_2) = (29 - 6) / \ln (29 / 6) = 23 / \ln 4,83 = 23 / 1,57 = 14,65 \text{ } ^\circ\text{C}$$

2. Mekkora legyen annak a csöves hűtőnek a felszíne, amelyben másodpercenként 0,4 kg tejet áramoltatunk és 49°C-ról 18°C-ra kell lehűtenünk ? A hűtővíz hőmérséklete: 10°C, a tej fajhője : 3890 J/kgK, a berendezés hőátbocsátási együtthatója: 900W/m²K.

$$\Phi = c_p \cdot q_m \cdot \Delta t = 3890 \cdot 0,4 \cdot (49 - 18) = 48236 \text{ W}$$

$$\Phi = k \cdot A \cdot \Delta t_{\text{köz}}$$

$$\Delta t_{\text{köz}} = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\ln \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}} = \frac{39 - 8}{\ln \frac{39}{8}} = 19,57 \text{ K}$$

$$A = \frac{\Phi}{k \cdot \Delta t_{\text{köz}}} = \frac{48236}{900 \cdot 19,57} = 2,74 \text{ m}^2$$

3. Egy hőcserélőben ellenáramban 12 000 kg/h tömegárammal a sör 82°C-ról 45°C-ra hűl le. Mekkora legyen a víz tömegáramának értéke, ha a fenti hőmérséklet értékeket tartani akarjuk? A hőcserélő felülete: 45 m², a sör fajhője: 3,6 kJ/kgK, a rendelkezésünkre álló hűtővíz: 24°C-os és maximum 53°C-ra melegedhet fel. Mekkora lesz a hőátbocsátási együttható értéke?

$$\Phi_1 = q_m \cdot c_p \cdot \Delta t = \frac{12000}{3600} \cdot 3,6 \cdot 1000 \cdot (82 - 45)$$

$$\Phi_1 = 4,44 \cdot 10^5 \quad J / s$$

$$\Phi_2 = k \cdot A \cdot \Delta t_{köz}$$

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$k = \frac{\Phi}{A \cdot \Delta t_{köz}} = \frac{4,44 \cdot 10^5}{45 \cdot 24,78} = 398,2 \quad W / m^2 K$$

$$\Delta t_{köz} = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\ln \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}} = \frac{29 - 21}{\ln \frac{29}{21}} = 24,78$$

$$\Phi = q_{m_{vz}} \cdot c_{p_{vz}} \cdot \Delta t$$

$$q_{m_{vz}} = \frac{4,44 \cdot 10^5}{4100 \cdot (53 - 24)} = 3,73 \quad kg / s = 13443,23 \quad kg / h$$

4. Egyfokozatú bepárlóban 0,06 tömegtört szárazanyag-tartalmú anyagot 0,29 tömegtörré sűrítünk be. A bepárlót gőzzel fűtjük, a fűtőtérben a nyomás 1,6 bar. A páratérben a nyomás 0,7 bar, itt a hőátadási együttható 6200 W/m²K, a sűrítendő lé magassága 45 cm. A bepárló fűtőfelülete 42 m², a falvastagsága 15 mm, a fal hővezetési együtthatója 43 W/mK. Mennyi idő alatt tudunk 15 t anyagot besűríteni és mennyi lesz ekkor a sűrítmény tömege, ha 80 °C-on táplálunk be?

Megoldás:

Nyomás [bar]	Fajhő [kJ/kgK]	Sűrűség [kg/m ³]	Hővez.tény. [W/mK]	Viszkozitás [x10 ⁻³ Pas]	Párolgáshő [kJ/kg]	Hőmérséklet [°C]
0,5	4,196	971,8	0,669	0,355	2305,671	80
1,0	4,211	958,4	0,682	0,278	2259,197	100
1,5	4,224	951,0	0,684	0,255	2227,996	110
2,0	4,232	943,5	0,685	0,235	2203,932	120

$$Nu = 1,15 (Ga Pr K)^{0,25}, \text{ ha } (Ga Pr K) < 10^{15}$$

$$Nu = 0,068 (Ga Pr K)^{0,25}, \text{ ha } (Ga Pr K) > 10^{15}$$

$$\text{Az anyagmérleg:} \quad m_{lé} = m_{sür} + m_{pára}$$

$$m_{lé} \cdot c_{lé} = m_{sür} \cdot c_{sür}$$

$$\text{A komponens mérleg:} \quad m_{sür} = \frac{m_{lé} \cdot c_{lé}}{c_{sür}} = \frac{15000 \cdot 0,06}{0,29} = 3103,45 \quad kg$$

A hőszükséglet:

$$Q_{g\ddot{o}z} = Q_{felm} + Q_{elp}$$

$$Q_{g\ddot{o}z} = m_{l\acute{e}} \cdot c_{p_{l\acute{e}}} (t_{fp} - t_{kezd}) + m_{p\acute{a}ra} \cdot r_{p\acute{a}ra}$$

$$m_{p\acute{a}ra} = m_{l\acute{e}} - m_{s\ddot{u}r} = 15000 - 3103,45 = 11896,55 \text{ kg}$$

$$Q_{g\ddot{o}z} = 15000 \cdot 4,202(88 - 80) + 11896,55 \cdot 2287,08 = 2,77 \cdot 10^7 \text{ kJ}$$

$$Q = k \cdot A \cdot \Delta t_{k\ddot{o}z} \cdot \tau$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{g\ddot{o}z}} + \frac{\delta_{fal}}{\lambda_{fal}} + \frac{1}{\alpha_{p\acute{a}ra}}}$$

A gőz oldali ∞ :

$$Ga = \frac{g \cdot l^3 \cdot \rho^2}{\eta^2} = \frac{9,81 \cdot 0,45^2 \cdot 949,5^2}{(0,251 \cdot 10^{-3})^2} = 1,28 \cdot 10^{13}$$

$$Pr = \frac{c_p \cdot \eta}{\lambda} = \frac{4225,6 \cdot 0,251 \cdot 10^{-3}}{0,6842} = 1,55$$

$$K = \frac{r}{c_p \cdot \Delta t} = \frac{2223,18}{4,2256 \cdot 32} = 16,44$$

$$(Ga \cdot Pr \cdot K) = 3,262 \cdot 10^{14} \text{ akkor } Nu = 1,15(Ga \cdot Pr \cdot K)^{0,25}$$

$$Nu = 1,15(3,262 \cdot 10^{14})^{0,25} = 4887,28$$

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{l} = \frac{4887,28 \cdot 0,6842}{0,45} = 7430,84 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

A pára oldali ∞ :

$$Ga = \frac{9,81 \cdot 0,45^3 \cdot 966,44^2}{(0,3242 \cdot 10^{-3})^2} = 7,944 \cdot 10^{12}$$

$$Pr = \frac{4202 \cdot 0,3242 \cdot 10^{-3}}{0,6742} = 2,02$$

$$K = \frac{2287,08}{4,202 \cdot 32} = 17$$

$$(Ga \cdot Pr \cdot K) = 2,73 \cdot 10^{14}$$

$$Nu = 1,15(2,73 \cdot 10^{14})^{0,25} = 4674,2757$$

$$\alpha = \frac{4674,2754 \cdot 0,6742}{0,45} = 7003,1 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{7430,84} + \frac{0,015}{43} + \frac{1}{7003,1}} = 1596,92 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

$$\tau = \frac{2,77 \cdot 10^{10}}{1596,92 \cdot 32 \cdot 32} = 16939,347 \text{ s} = 4,705 \text{ h}$$

A hőátbocsátás vizsgálata során figyelembe kell vennünk:

- a. a fal hővezetését
- b. a fal sugárzó hőveszteségét
- c. a két fluidum közötti közvetlen hőcserét
- d. a fluidum és a fal közötti hőáramlást
- e. a fluidum sugárzásos hőveszteségét

Megoldás: a, d

5. A következő berendezések alkalmasak bepárlásra:

- a. dezinfektor
- b. csököteges hőcserélő
- c. duplikátor
- d. filmbepárló
- e. lemezes hőcserélő

Megoldás: a, c, d

6. A _____ vízszintes vagy függőleges elrendezésű, párhuzamos csövekből kialakított berendezés. A csövek között fűtőgőz, meleg víz vagy hűtőfolyadék áramlik. A csövek belsejében a kezelendő anyag áramlik. A hőcserélő végein, a zárófedelek kialakításának megfelelően többszörös átömlés valósítható meg.

Megoldás: csököteges hőcserélő

7. A _____ berendezésekben a sűrítendő anyagból képződő párakat egy másik berendezés fűtőterébe vezetik, így a második bepárlótesthez fűtőgőzt nem kell alkalmazni, tehát jelentős energiamegtakarítás érhető el.

Megoldás: többfokozatú bepárló

8. Melyik adat nem szükséges a bepárlás anyagmérlegének kiszámításához?

- a. a lé tömege
- b. a pára tömege
- c. a gőz tömege
- d. a lé koncentrációja
- e. a sűrítmény koncentrációja

Megoldás: c

9. Mely definíció adja meg a bepárló fajlagos gőzigényét?

- a. egységnyi tömegű anyag elpárologtatásához szükséges gőz mennyisége
- b. egységnyi tömegű kondenzvíz előállításához szükséges gőz mennyisége
- c. egységnyi tömegű gőz előállításához szükséges hőmennyiség
- d. egységnyi tömegű pára előállítása során elpárologott anyag mennyisége
- e. egységnyi tömegű sűrítmény előállításához szükséges gőz mennyisége

Megoldás: a

15. Anyagátadási alapfogalmak

A környezetben és a környezetvédelemben végbemenő transzport folyamatok jelentős része kapcsolatban van a diffúzióval. Ezekben a műveletekben anyag megy át az egyik fázisból a másik fázisba, az egymással érintkező, fázisok közötti határfelületen keresztül. Ezeket a műveleteket anyagátbocsátási vagy diffúziós műveleteknek nevezzük. A diffúziós műveleteknél egy anyagnak egy másikba való áthaladása a fázishatáron keresztül, rendszerint molekuláris méretekben történik. Amikor például víz párolog egy tóból a vízfelszín fölött áramló levegőbe vízgőzmolekulák diffundálnak a felszínen elhelyezkedő gázmolekulákon keresztül a levegő főtömegébe, ahonnan diffúzióval vagy magával a levegő árammal távoznak. A széntüzelésű erőművekben a szén kéntartalma kéndioxidá válik, amit környezetvédelmi okok miatt sem engedhetünk a környezetbe, hanem valamilyen diffúziós módszerrel, például abszorpcióval el kell távolítani. A diffúziós műveletek megvalósíthatók elegyedő fázisok között is, ha például a két fázist féligáteresztő membránnal választjuk el egymástól. Ezeket a műveleteket membrán műveleteknek nevezzük.

15.1. A diffúziós műveletek osztályozása

A diffúziós műveletek szilárd- folyadék- és gáz halmazállapotú fázisok között mehetnek végbe. A három halmazállapotból hat érintkeztetési lehetőség vezethető le: gáz-gáz, gáz-folyadék, gáz-szilárd, folyadék-folyadék, folyadék-szilárd és szilárd-szilárd.

Gáz-gáz rendszere a gyakorlatban nem valósítható meg, mivel a gázok egymással korlátlanul elegyednek.

15.1.1. Gáz-folyadék rendszerek

A gáz folyadék rendszereknél az oldatok minden komponense nincsen jelen mérhető mennyiségben a gáz- és a folyadékfázisban. Ha a folyadékfázis tiszta, azaz egykomponensű folyadék, míg a gáz két- vagy többkomponensű, a művelet neve a diffúzió irányától függően *nedvesítés* vagy *nedvesség-elvonás*. Például ha száraz levegőt vízzel hozunk érintkezésbe, a víz egy része el fog párologni a levegőbe, a levegő páratartalma megnő. Megfordítva, nagyon nedves levegő érintkeztetése tiszta vízzel, a levegőben levő nedvesség egy részének lecsapódását eredményezheti, így nedvesség elvonása történik a levegőből. Mindkét esetben a vízben oldott levegő mennyisége viszonylag kicsi, és gyakorlati szempontból feltételezhető, hogy csak a vízgőz diffundál egyik fázisból a másikba.

Lehetséges olyan eset is, amelyben mindkét fázis oldat, de csak egy közös komponensük van, amely megoszlik a két fázis között. Ha például sósav és levegő elegye vízzel érintkezik, a sósav nagy mennyiségben oldódik a vízben, míg a levegő oldódása viszonylag kismértékű, ilyen módon a levegő-sósav elegy szétválasztható. Ennek a műveletnek a neve *gázabszorpció*. A fordított esetben viszont, ha tiszta levegőt hozunk érintkezésbe sósav vizes oldatával, a sósav egy része kilép a folyadékfázisból a gázfázisba. Ez a művelet a *deszorpció*. A felsorolás kedvéért megemlíthetjük azt az esetet, amelyben a gázfázis egykomponensű és a folyadékfázis tartalmazza az összes komponenseket. Ilyen eset egy vizes sóoldat bepárlása. Itt a gázfázis csak vízgőzt tartalmaz, mivel a só gyakorlatilag nem illékony. Ennek a műveletnek a lefolyása nem függ a koncentráció gradienstől, csak a forrásban levő oldatnak átadott hőmennyiségtől, így nem tekinthetjük diffúziós műveletnek.

15.1.2. Gőz-folyadék rendszerek

Ha a rendszer minden komponense mérhető mennyiségben fordul elő mindkét fázisban, és a műveletben a gőzfázis a folyadékfázisból keletkezik hő hozzávezetése útján akkor a művelet neve *desztilláció*. Például alkohol és víz oldatát melegítéssel részben elpárologtatjuk, a keletkezett gőzfázis és a maradék folyadék is tartalmaz alkoholt is és vizet is, de egymástól és az eredeti oldattól is eltérő arányban. Ha a keletkezett gőzt és a maradék folyadékot fizikai úton szétválasztjuk, és a gőzt kondenzáltatjuk, két oldatot kapunk, amelyek közül az egyiknek magasabb, a másiknak alacsonyabb az alkoholtartalma. Ezen az úton az eredeti két komponens bizonyos mértékig szétválasztottuk. Fordítva, ha egy kétkomponensű gőzelegyet részlegesen kondenzálunk, a keletkező folyadékfázis és a maradék gőz összetétele eltérő lesz. Mindkét esetben a két komponensnek a fázisok közötti kölcsönös diffúziója határozza meg a fázisok végleges összetételét.

15.1.3. Gáz-szilárd rendszerek

A gáz-szilárd rendszerek kategóriába tartozó műveleteket szintén célszerű az egyes fázisokban jelenlevő komponensek száma szerint osztályozni. Ha egy szilárd oldatot folyadékfázis közbejötté nélkül részlegesen elpárologtatunk, a keletkezett gőzfázis és a maradék szilárd fázis is tartalmazza az eredeti komponenseket, de különböző arányban. Ez a művelet a *részleges szublimálás*. Hasonlóan a desztilláláshoz, a végleges összetétel itt is a komponenseknek a fázisok közötti kölcsönös diffúziója útján áll be. Ezt a műveletet a gyakorlatban ritkán használják, mert a szilárd fázis kezelése ilyen feltételek mellett kényelmetlen.

Valamennyi komponens általában nem lehet jelen mindkét fázisban. Ha egy illékony folyadékkal nedvesített szilárd anyag viszonylag száraz gázzal érintkezik, a folyadék a szilárd anyagból a gázfázisba diffundál. Ezt a műveletet lehet *szárítás* vagy *deszorpció*. Ilyen lehet a nedvesség eltávolítása száraz levegővel a leszűrt kristályos anyagból. Ebben az esetben a diffúzió a szilárd fázisból a gázfázisba irányul. Ha viszont a diffúzió az ellenkező irányba megy végbe a művelet neve *adszorpció*. Ha például vízgőz és levegő elegyét száraz szilikagéllal érintkeztetjük, a *vízgőz* a szilárd anyag felületére diffundál, ott megkötődik, és így a levegő megszáradhat. Lehetséges olyan eset is, amelyben a gázelegy többkomponensű és a komponensek mindegyike adszorbeálódik egy szilárd anyagon, de különböző mértékben, akkor az elválasztást *frakcionált adszorpciónak* nevezzük. Például propán és propilén gázelegye aktív szénrel érintkezik, mindkét szénhidrogén adszorbeálódik, de különböző mértékben, és így a gázelegy szétválasztható.

15.1.4. Folyadék-folyadék rendszerek

Két egymásban nem oldódó folyadékfázis érintkezésével járó szétválasztó műveleteket *folyadék extrakciónak* nevezzük. Egyszerű példa egy laboratóriumi gyakorlat, ahol vizes jóoldatot választótölcsérben széntetrakloriddal összerázzuk és utána a folyadékokat ülepíteni hagyjuk. A széntetrakloridos fázisban nagy mennyiségű jódot találunk, amely a vizes fázisból ment át. A vízből egy kis mennyiség szintén oldódik a széntetrakloridban, és egy kevés széntetraklorid is oldódik a vízben, de ezek viszonylag nem számottevőek. A folyadék extrakció egy másik alkalmazása, amikor például ecetsav és acetone oldatát választjuk szét a víz és a széntetraklorid nem elegyedő keverékével történő extrakcióval. Ülepítés után mindkét folyadékfázisban találunk acetont és ecetsavat is, de különböző arányban. Ez a művelet a *frakcionált extrakciónak* nevezzük.

15.1.5. Folyadék-szilárd rendszer

Ha a folyadék és a szilárd fázis is valamennyi komponenset tartalmazza, csak különböző arányban, akkor a szétválasztás lehetséges a folyadék *frakcionált kristályosításával* is. A művelet ritkán alkalmazzák, mert a szilárd fázis kezelése nehézkes és a diffúzió a szilárd fázisban lassú. Egy szilárd elegy egyik komponensének kioldása szelektív oldószerrel a *kilúgzás, kioldás, vagy szilárd-folyadék extrakció*. Példaként megemlíthetjük az arany kioldását érceiből cianid oldatokkal, vagy az olaj extrahálását olajos magvakból hexánnal. (A cianidot tartalmazó szennyvíz okozta a Tisza élővilágában bekövetkezett katasztrófát). Hasonló mindennapi példa a kávéfőzés vagy a tea készítése. A diffúzió természetesen a szilárd fázisból a folyadékfázisba irányul. Ha a diffúzió az ellenkező irányba megy végbe, a művelet neve *adszorpció*. Például a nyers cukoroldatból a szennyező színes anyagok eltávolíthatók, ha az oldatot aktív szénrel hozzuk érintkezésbe, szakzsargonban aktív szénrel derítjük. Ekkor a színező anyagok a szilárd aktív szén felületén megkötődnek. Ha például szilárd anyagot oldott állapotban tartalmazó oldatból egykomponensű szilárd anyagot választunk le, akkor az elválasztási műveletet kristályosításnak nevezzük. A gyakorlatban ezt a folyamatot rendszerint úgy alkalmazzák, hogy a művelet eredménye főleg az átadott hőmennyiség függvénye, és maga a művelet csak indirekt módon függ a koncentráció gradienstől. A kristályosítás fordított művelete az *oldás*. Ebben a csoportban nem ismeretes az egykomponensű folyadék fázist tartalmazó művelet.

Szilárd-szilárd rendszerek kategóriában nincs ipari szétválasztó művelet, mert a szilárd fázisok között a diffúzió sebessége rendkívül kicsi.

15.2. A szétválasztási módszer megválasztása

Amikor a gyakorlatban oldatkomponensek szétválasztásának feladatával kerülünk szembe, általában a választási lehetőségeket a feldolgozandó anyagok sajátos fizikai tulajdonságai rendszerint korlátozzák, ennek ellenére majdnem mindig szükség van a több lehetséges eljárás közötti választásra. Célszerű előre áttekintenünk az előforduló választási lehetőségeinket.

Néha azt kell eldönteni, hogy a tárgyalt diffúziós műveletek egyikét alkalmazzuk, vagy egy tisztán mechanikai szétválasztási módszert. Például egy ásvány kinyerése ércből lehetséges akár diffúziós eljárással, valamilyen oldószerrel történő kilúgzással, akár flotálással, tehát tisztán mechanikai eljárással. Növényi olajok növényi magvaktól sajtolással vagy oldószeres extrakcióval különíthetők el. Valamely gőz eltávolítható egy permanens gázzal képezett elegyből mechanikai művelettel, például kompresszióval, vagy diffúziós művelettel, például gázabszorpcióval. Néha a mechanikai és diffúziós műveleteket együtt alkalmazzák különösen, ha az első művelet eredménye nem kielégítő, mint a növényi olajok előállításánál, ahol a sajtolást kilúgozás követi. Jellemző, hogy a mechanikai módszerrel eltávolított anyagot a művelet végén tisztán kapjuk, míg a diffúziós módszerrel eltávolított anyagot valamilyen más anyaggal keverve. Az is gyakran előfordul, hogy egy szétválasztáshoz diffúziós művelet és kémiai reakció között kell választani. Például etanol-víz oldatokból a víz eltávolítható égetett mésszel történő reakciójával vagy speciális desztillációs eljárásokkal. A kénhidrogént más gázoktól el lehet különíteni folyékony oldószeres abszorpcióval vagy vasoxiddal történő reakcióval. A kémiai módszerek rendszerint elbontják az eltávolított anyagot, míg a diffúziós elválasztások után többnyire mód van, különösebb nehézség nélkül, a változatlan alakban való visszanyerésre.

Előfordulhat az is, hogy több diffúziós művelet közül kell választani. Például oxigén- és nitrogéngáz elegye szétválasztható az oxigénnek aktívszenes szelektív adszorpciójával, abszorpcióval, desztillációval. Ecetsav-víz rendszer szétválasztható desztillációval, egy megfelelő oldószerrel való extrahálással vagy alkalmas adszorbensen adszorpcióval. A választás során a legfőbb szempont a költség, ezért rendszerint a legolcsóbb módszert szoktuk

alkalmazzuk. Más tényezők is befolyásolhatják azonban a választásunkat. Néha kívánatos a legegyszerűbb módszer kiválasztása, jóllehet egyáltalán nem a legolcsóbb, de nem okoz különösebb problémát az eljárásban. Megfontolás tárgyát képezheti az is, hogy olyan módszert alkalmazzunk, amellyel korábban már jó tapasztalatokat szereztünk. A munkavédelem, a környezetvédelem és a gazdaságosság azonban mindig fő tényezők maradnak.

15.3. Az anyagátadási műveletek megvalósításának módjai

A diffúziós műveletek megvalósításának van néhány jellemző módja. Ezekről a módokról nagymértékben függ az elért szétválasztás és az alkalmazott berendezés típusa. A diffúziós műveletek legfontosabb jellemzői, a *fázisok áramlási állapota*, ami lehet időben állandósult, más néven stacionárius vagy időben nem állandósult úgynevezett, instacionárius. Mindezek alapján megkülönböztetünk szakaszos és folyamatos műveleteket. A folyamatos művelet, a *fázisok érintkezésének módja* szerint lehet fokozatszerű vagy folytonos.

15.3.1. Szakaszos műveletek

Az instacionárius vagy nem állandósult állapotú műveletekre jellemző, hogy a műveleti egységet alkotó készülékben az egyes fázisok koncentrációi időben változnak. A szakaszos folyamatban a koncentráció változás függvénye az időnek, de nem függvénye a helynek.

A folyamat során a szétválasztandó anyagot egyszerre beadagolják a készülékbe, a szeparációs folyamat az idő függvényében lejátszódik, majd a szétválasztott anyagokat elvezetik a készülékből. A szakaszos művelet tehát három részfolyamatból áll, a beadagolás, vagy sorzsírozás, az anyagátadás és az ürítés. Például egy szakaszos művelet az ismeretes laboratóriumi extrakciós eljárás, amelyben egy oldatot egy vele nem elegyedő oldószerrel választótölcsérben érintkeztetünk. Azért szakaszos a művelet, mert a folyadékok betöltése után az edénybe nem lép sem be, sem ki folyadék egészen addig, míg a művelet be nem fejeződik. Az extrakció folyamán az oldott anyag átdiffundál az anyaoldatból az oldószerbe, tehát mindkét fázis koncentrációja időben változik, és ha az érintkezés ideje elég hosszú az egyensúly beáll. A lehetséges maximális koncentrációváltozás akkor következik be, amikor a fázisok egymással egyensúlyba jutottak. A gyakorlatban a művelet az egyensúly beállta előtt is megszakítható. A teljes műveletre azt mondhatjuk, hogy az *egy fokozattal egyenértékű*. Minden diffúziós művelet kivitelezhető ezzel az egyfokozatú általános módszerrel.

A *félfolyamatos* műveletekben az egyik fázis áll, míg a másik folyamatosan átáramlik a rendszeren. Példaként felhozhatunk egy szárítót, amelybe egy bizonyos mennyiségű nedves szilárd anyagot helyezünk, a levegőáram pedig folyamatosan áramlik be és ki, és elszállítja az elpárolgott nedvességet. A nedvesség koncentrációja a szilárd anyagban és a távozó levegőben természetesen időben változik. Végül, ha elegendő idő áll rendelkezésre, az álló fázis egyensúlyba kerül a beáramló fázissal, és a művelet egy többfokozatú művelettel válik egyenértékűvé. Ilyen módon a maximális hatás érhető el.

15.3.2. Folyamatos műveletek

A stacionárius vagy állandósult állapotú műveletek jellemzője, hogy a koncentrációk a rendszer bármely pontján időben nem változnak. Ez megköveteli, hogy valamennyi fázis folyamatosan és változatlan sebességgel áramoljon a rendszerbe és onnan ki, valamint az áramlási viszonyok a rendszerben állandóak legyenek. Ezeket a műveleteket folyamatos műveleteknek nevezzük, és jellemző rájuk, hogy a folyamatban a koncentráció változás a hely függvényében változik, de független az időtől. A folyamatos műveleti egységeket csoportosíthatjuk aszerint, hogy milyen az egyes fázisok áramlási iránya.

15.3.2.1. Folyamatos műveleti egységek csoportosítása az áramlás iránya szerint

A műveleti egységen belül, az egyes fázisok egymáshoz viszonyított áramlás iránya lehet egyen-, ellen- és keresztáramú.

Egyenáram esetén a fázisok egyező irányban haladnak végig a készülékben, ugyanazon a helyen lépnek be és ki. A maximálisan elérhető változás a koncentrációk tekintetében megegyezik a szakaszos művelet eredményével. A hajtóerő a belépési ponttól a kilépési pontig fokozatosan csökken. Amennyiben a fázisok elég hosszú ideig érintkeznek, a kilépési pontban, a hajtóerő elvben elérheti a nulla értéket, ami egyenáramú művelet esetében az egyensúly beálltát jelenti. A maximális koncentrációváltozás a kilépési pontban megfelel a kilépő fázisok egyensúlyának. A művelet csak egy fokozattal egyenértékű.

Ellenáramban az érintkező fázisok egymással ellenkező irányban áramlanak a készülékben. Gázabszorpció esetén például a tisztítandó gáz alulról fölfelé áramlik a kolonnában, míg a mosófolyadék fentről lefelé áramlik. A hajtóerő a készülék hossza mentén lehet állandó, csökkenhet vagy akár nőhet is. A művelet több fokozattal lehet egyenértékű.

Keresztáramban a fázisok áramlási iránya egymásra merőleges. Ilyen például egy keresztáramú folyadék extrakció, ahol a raffinátum és az oldószer áramlása keresztirányú.

Mindhárom módszerrel azonos koncentrációváltozás érhető el akkor, ha a fázisok egyikének a koncentrációja nem változik, például ha tiszta gázt oldunk folyadékban.

15.3.2.2. Fokozatszerű és folytonos műveletek

A folyamatos műveleti egységeket csoportosíthatjuk a szerint, hogy műveleti egységen belül a koncentrációt leíró függvény szakadásosan vagy folytonosan változik. Ezek alapján a folyamatos műveleti egységek lehetnek fokozatszerű- és folytonos műveletek. Ha két, egymással nem elegyedő fázist olyan módon érintkeztetünk, hogy a diffundáló komponensek megoszlása létrejön, utána pedig a fázisokat mechanikailag szétválasztjuk, az egész műveletet egy fokozatból állónak, vagy *egyfokozatúnak* nevezzük. Példaként megemlíthetjük a már említett szakaszos laboratóriumi extrakciót egy választó tölcserben. Ez az extrakció folyamatosan is elvégezhető, ha több fokozatot állítunk be úgy, hogy a fázisokat ismételt mindegyik fokozatban egyszer összekeverjük és szétválasztjuk. Az egész többfokozatú berendezést *kaszkádnak* nevezzük. A fázisok haladási iránya a kaszkádon belül lehet egyen-, ellen- vagy keresztáramú. Az egyes fokozatok hatékonyságának mértéke az *ideális* vagy *elméleti fokozat* vagy *elméleti tényér*. Az elméleti fokozatra az jellemző, hogy az egyes fokozatokból kilépő fázisok egymással egyensúlyban vannak, tehát az érintkezési idő meghosszabbításával sem lehet további koncentrációváltozást elérni. Az egyes fokozatokban mennyire sikerült megközelíteni az egyensúlyt, a *fokozathatásfok* fejezi ki.

A folytonos érintkezéssel a műveletekben a fázisok az egész berendezésben folytonos érintkezésben áramlanak, nincsen ismételt fizikai szétválasztás és összekeverés. Ezzel a módszerrel csak félfolyamatos vagy állandósult állapotú műveletek végezhetőek. Az elérhető koncentrációváltozás széles tartományú, megfelelhet egy elméleti fokozatnál kisebbnek, vagy több elméleti fokozatnak is. A fázisok a készülék bármely adott helyén nincsenek egymással egyensúlyban, viszont ha a rendszerben valahol mégis egyensúly állna be, akkor a művelet végtelen sok fokozat hatásával lenne egyenértékű.

A fokozatszerű és a folytonos érintkezéssel végbemenő műveletek között lényeges különbség van. A fokozatszerű művelet esetében lehetővé tesszük, hogy az anyag a fázisok közötti diffúziós áramlásával csökkentse az áramlást létrehozó koncentrációkülönbséget. Ha a folyamathoz elegendően hosszú idő áll rendelkezésre, akkor az egyensúly beáll és ezután a diffúziós áramlás megszűnik. A diffúzió sebessége és a rendelkezésre álló idő tehát minden

egyes esetre meghatározza az elérhető fokozathatásfokot. Ezzel szemben a folytonos érintkezésű műveletek esetében az egyensúlytól való eltérést szándékosan fenntartjuk, így a fázisok között a diffúziós áramlás megszakítás nélkül mehet végbe. A különböző módszerek közül melyik előnyösebb, bizonyos mértékig a gyakorlatilag megvalósítható fokozathatásfoktól függ. A nagy fokozathatásfok viszonylag olcsó berendezést jelenthet, amelynek teljesítménye megbízhatóan számítható. A kis fokozathatásfok a folytonos érintkezésű módszereket helyezi előtérbe a költség és a megbízható működés szempontjából.

15.4. Általános irányelvek

Minden diffúziós művelethez négy fontos tényezőt kell meghatározni: az elméleti fokozatszámot vagy az ezzel egyenértékű jellemzőt, a fázisérintkezéshez szükséges időt, a megengedhető áramlási sebességet és az energiaszükségletet.

Az elméleti fokozatok száma. Egy kaszkádnál a kívánt elválasztáshoz tartozó elméleti fokozatszám (egyensúlyi egységyszám, elméleti tényérszám), vagy egy folytonos érintkezésű készüléknél, az elméleti fokozatszámmal egyenértékű jellemzőjének az átviteli egységyszámnak a meghatározásához szükség van a *rendszer egyensúlyi* viszonyainak ismeretére és az *anyagmérlegekre*.

A szükséges idő. Fokozatszerű műveleteknél az érintkezési idő szorosan összefügg a fokozathatásfokkal, míg folytonos készülékek esetében a készülék térfogatát vagy hosszát határozza meg. Az idő meghatározásához szükséges tényezők száma nagy. Az anyagmérlegekből kiszámítható az egyes fázisok szükséges viszonylagos mennyisége. A rendszer egyensúlyi viszonyai megadják a lehetséges végső koncentrációkat. A fázisok közötti anyagátmenet sebessége függ az egyensúlytól való eltéréstől. Ezen kívül az anyagátmenet sebessége függ az egyes fázisok fizikai tulajdonságaitól, valamint a készüléken belül uralkodó áramlási viszonyoktól is. A turbulens áramlás nagyságrendekkel megnövelheti az anyagátadási tényező értékeit. Lényeges annak felismerése, hogy az előírt bensőséges érintkezés megvalósításához szükséges idő független a beadagolt fázisok abszolút mennyiségétől.

A megengedhető áramlási sebesség, mint tényező a félfolyamatos és a folyamatos állandósult állapotú műveleteknél kap szerepet. Az átlagos áramlási sebesség a készülék keresztmetszetének meghatározásához szükséges. A megengedhető áramlási sebességet áramlástanilag megfontolások segítségével lehet megállapítani, az anyagmérlegek pedig megadják az egyes anyagáramok abszolút nagyságát.

Energiaszükségletnek is fontos szerepe van a műveletek megvalósításánál. A diffúziós műveletek elvégzéséhez rendszerint *hő* és *mechanikai energia* szükséges. Hő szükséges a hőmérsékletkülönbségek létrehozásához, új fázisok kialakításához, például egy folyadék elpárologtatásához, és oldáshő effektusok kompenzálásához. Mechanikai energiát igényel a fluidumok és szilárd anyagok szállítása, folyadékok és gázok diszpergálása és a berendezés egyes részeinek mozgatása.

Szükséges, hogy foglalkozzunk a rendszer egyensúlyi viszonyaival, az anyagmérlegekkel, a diffúzió sebességével, az áramlási viszonyokkal és az energiaszükséglettel. Tárgyalásunk alapjául Robert E. Treybal által megfogalmazott rendszert követjük. Először a diffúzióra vonatkozó alapvető megfontolásokkal foglalkozunk. Ez után a környezetvédelemben alkalmazott főbb diffúziós műveleteket vesszük aszerint, hogy az egymással nem elegyedő fázisok gáz-folyadék, gőz-folyadék, folyadék-folyadék vagy szilárd-fluidum rendszert alkotnak, mivel az egyensúlyi és áramlási viszonyok ilyen csoportosításban könnyen rendszerezhetők.

16. A fázisok közötti anyagtranszport, anyagátbocsátás

A fázisok közötti transzport folyamatban mindig egy fluidum érintkezik egy vele nem elegyedő másik folyadék- vagy gáz fázissal, és ez az érintkező fázisok közös között anyagátvitel, vagy más néven komponens átmenet valósul meg. Az anyagátadási művelethez a kérdéses komponensek molekuláinak az egyik fázis belsejéből a fázishatárig kell vándorolniuk, át kell menniük a fázishatáron, majd a fázishatárról a másik fázis belsejébe kell jutniuk. Az anyagátmenethez kívánatos, hogy az érintkező fázisok relatív mozgásban legyenek. A fluidum mozgásának mechanizmusa befolyással van az anyagátvitel sebességére. A fluidumok és a fluidumban levő komponensek mozgását anyagárammal jellemezhetjük, és az anyagáramon az anyag térbeli elmozdulása. Az *anyagáram* erősségén, egy adott keresztmetszeten egységnyi idő alatt átáramlott anyagmennyiségét értjük és a tömeg vagy az anyagmennyiség időszerinti differenciál hányadosával adhatunk meg:

$$(2.1) \quad \dot{m}_A = \frac{dm_A}{dt} \left(\frac{kg_A}{s} \right) \quad \text{és} \quad \dot{N}_A = \frac{dN_A}{dt} \left(\frac{mol_A}{s} \right).$$

A (2.1) egyenletben m_A az A anyag tömegét, N_A az A anyag móljainak számát jelöli. A tömeg illetve a komponens áram skalármennyiség. Bizonyos esetekben az áramerősség mellett az *áramsűrűséget* használjuk, ami nem más, mint az áramlás irányára merőleges egységnyi A (m^2) felületen áthaladó áramerősség:

$$(2.2) \quad \frac{\dot{m}_A}{A} = \frac{1}{A} \frac{dm_A}{dt} \left(\frac{kg_A}{m^2 s} \right) \quad \text{és} \quad \frac{\dot{N}_A}{A} = \frac{1}{A} \frac{dN_A}{dt} \left(\frac{mol_A}{m^2 s} \right).$$

Az anyagátadási folyamat, mint már említettük, három részfolyamatból áll. Egyrészt a fázishatáron átmenő anyagnak vagy komponensnek az egyik fázisból a fázishatárig el kell jutni, át kell diffundálni a fázishatáron, majd a másik fázisban a fázishatárról el kell távoznia. Ezek alapján megkülönböztethetünk fázison belüli anyagtranszportot és fázisok közötti anyagtranszportot.

16.1. Anyagtranszport a fázison belül

A fázison belüli anyagtranszport konvektív vagy diffúziós áram formában jelenik meg.

16.1.1. Konvektív anyagtranszport

A *konvektív* anyagtranszportot az jellemzi, hogy az anyagot tartalmazó térrész bizonyos külső behatásra v sebességgel elmozdul, és viszi magával az anyagot a komponenseivel, és természetesen a többi, anyaghoz kötött extenzív mennyiséget (hőt, mozgásmennyiséget). Például nyomáskülönbség hatására a levegő áramlik, fúj a szél és a levegőáram viszi magával a nedvességtartalmát, felhőket, szennyeződések, láva hamut stb. A konvektív tömeg- illetve komponens áramot megkapjuk, ha az anyag tömeg sűrűségét vagy a komponens sűrűségét (koncentrációját) megszorozzuk az átlagos áramlási sebességgel és az A (m^2) áramlás irányára merőleges keresztmetszettel:

$$(2.3) \quad \dot{m}_A = \rho_A A v \quad \text{vagy} \quad \dot{N}_A = c_A A v$$

A (2.3) egyenletben ρ_A az A -edik anyag koncentrációja (kg_A/m^3) és c_A az A -edik komponens koncentrációja (mol_A/m^3) mértékegységekben.

16.1.2. Diffúziós anyagtranszport

A *diffúziós* áramot nem külső behatás hozza létre, hanem a fázis inhomogén volta. Vizsgáljunk egy szilárd síkfelület mentén, a síklappal párhuzamosan turbulens áramlási tartományban áramló fluidumot. Ez az áramlás, a fluidum konvektív áramlása. A fluidum részecskék sebessége a szilárd felülettől különböző távolságokban nem azonos, hanem a felületen nulla és ettől kezdve változik, mégpedig a felülettől való távolsággal együtt nő. Közvetlenül a határfelület szomszédságában egy vékony film lamináris vagy más néven viszkózus áramlásban van. Ez a film a fluidum részecskéinek szabályos mozgásával jellemezhető, olyan szabályos áramvonalakkal, amelyek a felület körvonalaiival párhuzamosak, és a felületre merőleges irányban nincs jelentős mozgás. A lamináris filmen belül a sebesség lineárisan nő a felülettől való távolsággal. A fluidum többi részében az áramlás turbulens, és lényegében azzal jellemezhető, hogy a felületre merőleges sebesség komponens nagy. Aránylag nagy fluidum mennyiségek, az úgynevezett örvények mozognak az áramlás keresztmetszetének egyik helyéről a másikra, és jelentős keveredést okoznak. A falhoz közeli lamináris áramlásból a fluidum többi részében levő turbulens áramlásba való átmenet fokozatos és a két fő zóna között átmeneti kiegyenlítő zónát alkot. A különböző zónák vastagsága a turbulencia fokától függ, amelyet a Reynolds számmal jellemezhetünk. Ugyanazokat a jelenségeket találjuk, ha akár sík, akár görbe szilárd felület mentén vagy más, nem oldódó fluidum mentén áramlik a fluidum. Ez utóbbi esetben a két fázis relatív sebessége a határfelületen nulla. Ha oldott anyagnak kell átdiffundálnia ilyen mozgó fluidum különböző zónáin, akkor ennek leírására legalább két különböző mechanizmus szükséges. A lamináris zónában végbemenő diffúziót *molekuláris diffúzió*nak, a turbulens zónában lezajlót pedig *turbulens diffúzió*nak nevezzük.

A *molekuláris diffúzió* az anyag molekuláris méretekben való átmenete nyugvó vagy lamináris áramlásban levő fluidumon, ez utóbbi esetben az áramlás áramvonalaira merőleges irányban. Ha a fázison belül koncentráció különbség van, a rendszerben olyan spontán folyamat indul el, amely igyekszik a különbséget megszüntetni. Ez a folyamat egy komponensáramot indít el, amely arányos a koncentráció gradiensevel, azaz a hajtóerővel:

$$(2.4) \quad \frac{\dot{N}_A}{A} = -D_{AB} \text{grad } c_A$$

ahol D_{AB} az A -edik komponens diffúziós állandója B közegben. A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a diffúzió a nagyobb koncentrációjú hely felől, a kisebb koncentrációjú hely felé viszi az anyagot. A (2.4) egyenlet Fick első törvénye, melynek egydimenziós alakja:

$$(2.5) \quad \frac{\dot{N}_A}{A} = -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial x}$$

A diffúziós állandó mértékegysége SI mértékegység rendszerben m^2/s . Az egyes anyagok diffúziós állandóinak értékét táblázatokban adják meg, vagy különböző empirikus egyenletekkel tudjuk számolni. A gázok diffúziós állandói $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ nagyságrendűek. Ha feltételezzük, hogy egy gáz ideális, akkor a diffúziós állandójának a hőmérséklet és nyomás függését az alábbi egyenlettel adhatjuk meg:

$$(2.6) \quad D_{AB} \approx \frac{T^{3/2}}{p}$$

Ha ismerjük a gáz diffúziós állandó értékét adott hőmérsékleten, akkor a (2.6) egyenlettel kiszámíthatjuk más hőmérsékletekre is. A diffúziós állandók folyadékokban 10^{-9} m²/s nagyságrendűek, míg a D_{AB} diffúziós állandó szilárd anyagban 10^{-10} - 10^{-14} m²/s tartományban változhat. A diffúziós állandók nyugvó vagy lamináris áramlású fluidumokra vonatkoznak. Turbulens áramlásnál a diffúziós állandók értékei nagyságrendekkel nagyobbak lesznek. Ezt úgy vesszük figyelembe, hogy a molekuláris diffúziós állandó értékét az ε_M turbulens diffúziós értékével megnöveljük:

$$(2.7) \quad \frac{\dot{N}_A}{A} = -(D_{AB} + \varepsilon_M) \frac{\partial c_A}{\partial x}$$

Mivel a turbulens áramlás megnöveli a diffúzió állandó értékét, ezért a diffúzió sebessége is megnő, aminek a gyakorlati jelentősége nagy.

16.2. Anyagtranszport a fázisok között

A konvektív és vezetési áramokra leírt összefüggések csak a fázis határfelületéig érvényesek. A fázis határfelületén ugyanis a képletekben szereplő intenzív állapotjelző a koncentráció, törést-, sőt rendszerint szakadást is mutat. A határrétegben a változás explicit formáját nem tudjuk folytonos függvény alakjában előállítani, nem érvényes a folytonossági törvény. Ezért a fázisok közötti áramok leírására tapasztalaton alapuló összefüggést használunk. Ez a tapasztalat abban foglalható össze, hogy a fázisok közötti áram arányos a fázisok közötti érintkezési A felület nagyságával és a fázisok belsejében levő koncentráció különbséggel.

$$(2.8) \quad \dot{N}_A = KA\Delta c_A$$

Az így előálló áramot *átadási áramnak* nevezzük. Az átadási áram tehát egy vagy több komponens árama egyik fázisból a vele érintkező másik fázisba Δc_A hajtóerő hatására, a két fázis határán levő ellenálláson keresztül. A (2.8) egyenletben a K komponensátadási tényező. Amennyiben a koncentráció mol/m³, a K mértékegysége m/s. A komponensátadási tényező mértékegysége úgy változik, hogy a (2.8) egyenlet mértékegysége mol/s maradjon. A diffúziós műveletekben tehát az anyagtranszport két egymással érintkező, de nem elegyedő fázisok között a közös fázishatár felületen keresztül megy végbe. Mindkét fázis lehet fluidum, azaz gáz vagy folyadék, az egyik lehet szilárd halmazállapotú is. Az egyes fázisokra vonatkozó diffúziós mechanizmusokat egyidejűleg kell alkalmazni a két fázisból álló összetett rendszerekre. Az anyagátadás sebessége, amellyel a diffundáló anyag az egyik fázisból a másikig eljut, minden esetben függ az egyes fázisokban levő koncentráció gradienstől, illetve a koncentráció különbségtől. Ugyanakkor a koncentráció különbségek arra is felvilágosítást adnak, hogy az egyes fázisok az egyensúlytól milyen távol vannak. Ha egyensúly jön létre, akkor a koncentráció gradiens, és emiatt a diffúzió sebessége is nulla lesz. Praktikus okok miatt a Δc_A hajtóerőt nem a két fázis fő tömegének koncentráció különbségével, hanem az egyes fázisokban az egyensúlyi értéktől való eltéréssel adják meg. A diffúziós műveletek tanulmányozásához mind az egyensúllyal, mind a diffúziós mechanizmussal foglalkoznunk kell.

16.2.1. Egyensúly

Az anyagátbocsátási folyamatok egyensúlyi állapotainak ismerete alapján meghatározható, hogy milyen határig mehet végbe a diffúziós folyamat. Az egyensúlyi feltételek alapja a *fázisszabály*:

$$(2.9) \quad S_z = K - F + 2$$

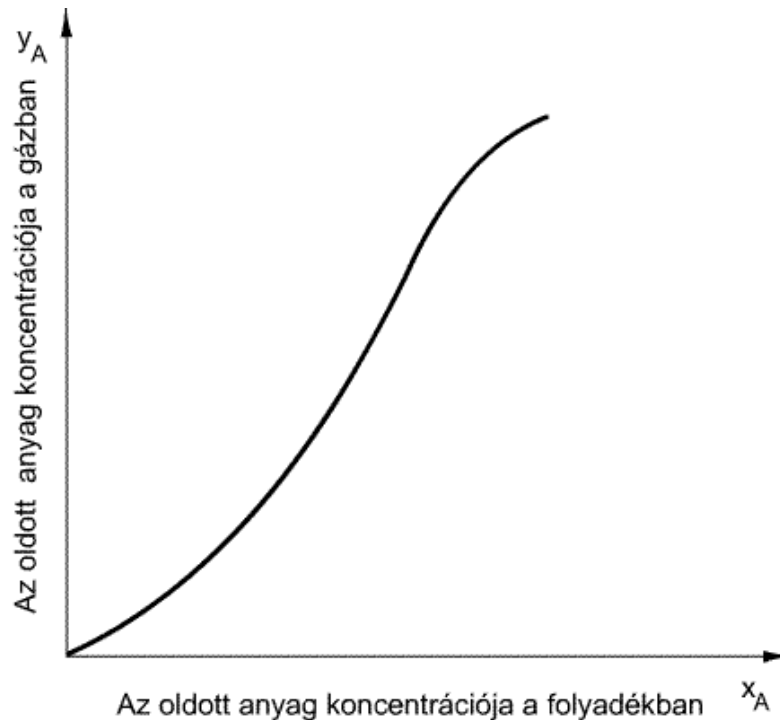
A (2.9) egyenletben F a rendszer fázisainak számát, K a rendszer komponenseinek számát és S_z a szabadsági fokok számát jelöli. A rendszer szabadsági foka azoknak a független változók a számát jelöli, amelyeknek az értékét tetszőlegesen változtathatjuk anélkül, hogy a fázisok száma vagy összetétele megváltozna a rendszerben. Alkalmazzuk a fázisszabályt az anyagátbocsátás két fajtájára:

1. Mindkét kölcsönhatásban levő fázis a megoszló komponensen kívül inert hordozókomponenst tartalmaz (például abszorpció, extrakció). Ebben az esetben a rendszer két fázist ($F = 2$) és három komponenst, a fázisok között megoszló anyagot és a két hordozót tartalmaz, ennek megfelelően a fázisszabály értelmében a rendszernek három szabadsági foka van: $S_z = K + 2 - F = 3 + 2 - 2 = 3$. A rendszer szabadsági foka tehát egyezik az összes komponensek számával, beleértve a hordozókomponenseket is. Ebben az esetben szabadon lehet változtatni a p nyomást, a T hőmérsékletet és valamelyik fázisban a megoszló komponens koncentrációját (x_A vagy y_A). Következésképpen, adott hőmérséklet és nyomás esetén ($T = konstans$ és $P = konstans$) az egyik fázisban rögzített valamely koncentrációértékhez szigorúan egy koncentrációérték tartozik a másik fázisban.
2. Mindkét fázisból hiányzik a hordozóközeg, ilyen például a desztilláció. Ebben az esetben a rendszer két fázisból ($F = 2$), illetve két, a fázisok között megoszló komponensből ($K = 2$) áll, így a szabadsági foka csupán kettő: $S_z = K + 2 - F = 2 + 2 - 2 = 2$.
Figyelembe véve, hogy az anyagátbocsátási folyamatok általában állandó nyomáson mennek végbe ($p = konstans$), megállapítható, hogy az x_A fáziskoncentráció változása esetén a hőmérsékletnek is változnia kell. Ugyanakkor, ha ilyen folyamatot állandó hőmérséklet esetén ($T = konstans$) vezetnénk, akkor a fázisok különböző koncentrációértékeinek különböző nyomásértékek felelnének meg.

Az így értelmezett független változók közötti összefüggések koordináta-rendszerekben ábrázolhatók, az úgynevezett fázisdiagramokon. Az anyagátbocsátási folyamatok számítására használt összefüggéseket szemléltető diagramokat, a nyomás-koncentráció diagramot ($T = konstans$ esetre), a hőmérséklet-koncentráció diagramot ($p = konstans$ esetre) és a fázisok egyensúlyi koncentrációi közötti összefüggést mutató diagramokat az egyes műveleteknél ismertetjük.

16.2.2. Fázisegyensúly, egyensúlyi görbék.

Az egyensúly értelmezéséhez vizsgáljuk meg például azt az esetet, amikor ammóniát oldunk, „nyeletünk el”, ammónia-levegő gázelegyből tiszta vízben. Egy zárt tartályba meghatározott mennyiségű, folyékony halmazállapotú tiszta vizet teszünk ammóniából és levegőből álló gáz eleggyel együtt úgy, hogy a rendszert állandó hőmérsékleten és nyomáson lehessen tartani. Az ammónia nagyon jól oldódik vízben, ezért az ammóniamolekulák azonnal diffundálni kezdenek a gázból a folyadékba a két fázist elválasztó határfelületen keresztül. A gázban az ammónia koncentrációja, amelyet parciális nyomással mérünk, csökkenni fog. Az ammóniamolekulák, amelyek a gázfázisból átmennek a folyadékfázisba, molekuláris mozgásuknál fogva a folyadék belseje felé diffundálnak és végül az egész folyadékfázisban eloszlának. A folyadékbeli ammóniamolekulák egy része visszajut a gázfázisba olyan sebességgel, melynek nagysága, arányos a folyadékfelületen levő ammónia koncentrációjával. Amint több ammónia kerül a folyadékba, annak koncentrációja a folyadékban nő, és ezzel együtt nő az a sebesség is, amellyel az ammónia visszatér a gázba. Végül a sebesség, amellyel az ammónia bejut a folyadékba, egyenlővé válik azzal a sebességgel, amellyel elhagyja a folyadékot. Ugyanakkor a diffúzió mechanizmusából adódóan a koncentráció mindegyik fázison belül egyenletessé válik, de nem lesz ugyanaz mindegyik fázisban. Egyensúly jön létre, bár az ammónia molekulák folytonosan mozognak egyik fázisból a másikba, de az egyes fázisokon belül a koncentráció tovább már nem változik, bármennyi ideig is érintkeznek egymással a fázisok. Úgy tűnik, hogy a diffúzió megállt. Ha újabb ammóniát juttatunk a tartályba, az új egyensúlyi koncentráció mindkét fázisban nagyobb lesz, mint előző esetben volt. További ammónia hozzáadásával egy összefüggést nyerhetünk a két fázis egyensúlyi koncentrációi között. Ha az ammóniát A anyagként jelöljük, a koncentrációját a gáz fázisban p_A parciális nyomással mérjük, és y_A móltörtben-, és a folyadékbeli koncentrációját szintén x_A móltörtben adjuk meg, és az egyensúlyi értékeket koordináta rendszerben ábrázoljuk, akkor az egyensúlyi értékekre a **129. ábra** hasonló görbét kapunk. Ez a görbe független a víz és a levegő kezdeti arányától, csak a háromkomponensű rendszerre vonatkozó állapotjelzőktől, a hőmérséklettől és a nyomástól függ. Általánosságban kimondhatjuk, hogy ha egy anyag két, egymásban nem oldódó fázisok között oszlik meg, hasonló típusú dinamikus egyensúlyt ad. Az egyensúlyi görbe jellemzi a rendszert. Ha például a fent leírt esetben a vizet más folyadékkal, például benzollal vagy szilárd adszorbenssel, például aktív szénnel, az ammóniát más oldódó anyaggal, például kéndioxiddal vagy sósav gázzal helyettesítjük, akkor mindegyik eset egy-egy új görbét eredményez, amely egyáltalán nincs összefüggésben az előzőekkel. Két folyadékfázisra kapott egyensúly nincs kapcsolatban azzal, amelyet szilárd - folyadék rendszerre kaptunk. A különböző esetek egyensúlyi görbéinek alakbeli jellegzetességeit és az állapotjellemzők (a hőmérséklet és a nyomás) hatását az egyes műveletek tanulmányozásával kapcsolatban vizsgáljuk.



129. ábra: Oldott anyag egyensúlyi megoszlása gáz- és folyadékfázis között, állandó hőmérsékleten

A következő alapelvek azonban közősek minden olyan rendszerre nézve, amelyben valamilyen anyag két, egymásban nem oldódó fázis között oszlik meg:

-A hőmérséklet és a nyomás adott értékeihez az egyensúlyi összefüggések sorozata tartozik, amely grafikusán egyensúlyi-megoszlási görbével ábrázolható, ha a két fázis egyensúlyi koncentrációit egymás függvényében felrajzoljuk.

Egyensúlyban levő rendszerben a komponensek látszólag nem diffundálnak a fázisok között. Azt mondhatjuk, hogy a rendszer makroszkopikusan statikus.

Egyensúlyban nem levő rendszerben a fázisok közötti komponensek diffúziója következik be olyan irányban, hogy az a rendszert az egyensúly felé vigye. Ha elegendő idő áll rendelkezésre, végül be fognak állni az egyensúlyi koncentrációk.

16.2.3. Fázisegyensúly termodinamikai megfogalmazása

Általánosan megfogalmazva, egy folyamat önként mindig az egyensúly irányába megy végbe. Az egyensúly egy kitüntetett állapotot jelent. A termodinamika több olyan potenciálfüggvényt ismer, amellyel az egyensúlyi állapot kifejezhető. A bennünket érdeklő mérhető paramétereket a p nyomást, a T hőmérsékletet és az N_j mólok számát azonban a Gibbs féle szabadentalpia függvény tartalmazza független változókén:

$$(2.10) \quad G = G(T, p, N_1, N_2, \dots, N_k)$$

A (2.10) egyenlet k anyag-, illetve molekula fajtát tartalmaz. Mivel G potenciál függvény, ezért létezik a teljes differenciálja:

$$(2.11) \quad dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{p, N_j} dT + \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_{T, N_j} dp + \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial G}{\partial N_j} \right)_{p, T} dN_j$$

A (2.11) egyenletben a parciális differenciálhányadosoknak konkrét fizikai tartalmuk van, ezek rendre az S entrópia, a V térfogat és a μ_j a j -edik komponens kémiai potenciálja. Mindezek alapján a (2.11) egyenlet a következő alakban írható

$$(2.12) \quad dG = -SdT + Vdp + \sum_{j=1}^k \mu_j dN_j$$

Egyensúly esetén a folyamatot jellemző potenciál függvénynek szélső értéke van, azaz a teljes differenciálja nullával egyenlő

$$(2.13) \quad dG = -SdT + Vdp + \sum_{j=1}^k \mu_j dN_j = 0$$

A (2.13) egyenletből világosan kitűnik, a termikus, a mechanikai és a kémiai egyensúly. A termikus egyensúly feltétele a $dT = 0$, illetve $T = konstans$. A mechanikai egyensúly feltétele a $dp = 0$, illetve $p = konstans$. Mivel kémiai reakció nem játszódik le, bennünket most csak a fázisegyensúly érdekel. Vizsgálatainkat egyszerűsítsük, két α - és β -fázis között, egyetlen komponens megoszlására egyensúly esetében:

$$(2.14) \quad dG = dG^\alpha + dG^\beta = 0$$

A fázisegyensúly arra ad felvilágosítást, hogy állandó nyomáson és hőmérsékleten az egyes komponensek hogyan oszlanak meg a két fázis között. Mivel eleve feltételeztük az állandó nyomást, $dp=0$, és az állandó hőmérsékletet, $dT=0$, ezért a két fázis között megoszló egyetlen komponensre a Gibbs féle szabadentalpia függvény a következő alakú lesz:

$$(2.15) \quad dG = dG^\alpha + dG^\beta = \mu_1^\alpha dN_1^\alpha + \mu_1^\beta dN_1^\beta = 0$$

$$(2.16) \quad \mu_1^\alpha dN_1^\alpha = -\mu_1^\beta dN_1^\beta$$

A komponens megmaradás elve értelmében, amennyivel nő az adott komponens mennyisége az egyik fázisban ugyanannyival kell csökkennie ugyanannak a komponensnek a másik fázisban, vagyis:

$$(2.17) \quad dN_1^\alpha = -dN_1^\beta$$

A (2.17) egyenletből következik, hogy a fázisegyensúly feltétele a kémiai potenciálok egyenlősége:

$$(2.18) \quad \mu_1^\alpha = \mu_1^\beta$$

A nehézséget az okozza, hogy ellentétben a hőmérséklettel és a nyomással a kémiai potenciál nem mérhető mennyiség, ezért a kémiai potenciálokat mérhető mennyiségekkel kell helyettesíteni. Kémiai potenciálok a két fázisban:

$$(2.19) \quad \mu_1^\alpha = \mu_1^{0\alpha} + RT \ln a_1^\alpha = \mu_1^{0\alpha} + RT \ln c_1^\alpha + RT \ln \gamma_1^\alpha$$

$$(2.20) \quad \mu_1^\beta = \mu_1^{0\beta} + RT \ln a_1^\beta = \mu_1^{0\beta} + RT \ln c_1^\beta + RT \ln \gamma_1^\beta$$

A (2.19) és (2.20) egyenletekben $\mu_1^{0\alpha}$ és $\mu_1^{0\beta}$ a kérdéses komponens standard kémiai potenciáljait a fázisokban, a_1^α és a_1^β komponens aktivitásait, és γ_1^α és γ_1^β a komponens aktivitási koefficienseit jelöli az egyes fázisokban. Ideális elegyek esetében az aktivitási koefficiens $\gamma=1$, és logaritmusai nulla. A (2.18) egyenlet figyelembevételével, a kémiai potenciálok egyenlőségéből következik:

$$(2.21) \quad \mu_1^{0\alpha} + RT \ln c_1^\alpha = \mu_1^{0\beta} + RT \ln c_1^\beta$$

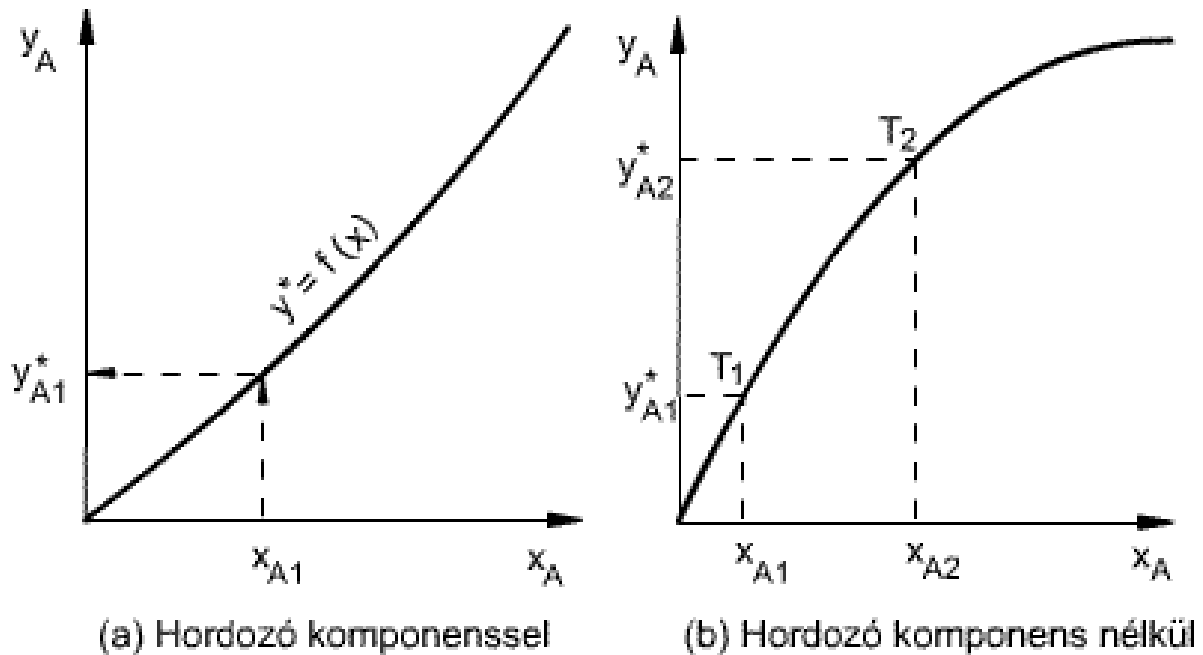
$$(2.22) \quad \frac{\mu_1^{0\beta} - \mu_1^{0\alpha}}{RT} = \ln \frac{c_1^\alpha}{c_1^\beta} = \ln m$$

$$(2.23) \quad m = \frac{c_1^\alpha}{c_1^\beta} = \frac{y^*}{x}$$

A (2.23) egyenletben az egyik fázis x koncentrációjához a másik fázis y^* egyensúlyi koncentráció tartozik, és a hányadosukat megoszlási hányadosnak nevezzük. A koncentrációkat a praktikussági okok miatt különböző mértékegységekben (móltört, tömegtört, parciális nyomás, mól koncentráció, tömeg koncentráció) szokták megadni. Az egyensúlyi állapotban a fázisok között megoszló komponens koncentrációi az anyag átbocsátási folyamat hőmérsékletének és nyomásának megfelelő határértéket vagy *egyensúlyi értéket* vesznek fel. Az egyensúlyi feltételek között valamely fázis x koncentrációjához szigorúan meghatározott egyensúlyi koncentrációérték felel meg a másik fázisban, amit y^* jelöl. A hajtóerőt tehát az aktuális y és az $y^* = mx$ egyensúlyi koncentrációk közötti különbséggel $y - y^* = y - mx$, adjuk meg. A jelölés analógiájára, az y koncentrációnak is megfelel egy egyensúlyi x^* koncentráció. Az ideális elegyeknél az egyensúlyi összetétel az origóból kiinduló lineáris izoterma egyenlete, míg a nemideális elegyek egyensúlyi összetételét egy nem lineáris izoterma egyenlete jellemzi. Általános esetben a fázisok között a megoszló komponensek koncentrációi között egyensúlyi állapotot egy függvénykapcsolat jellemez:

$$(2.24) \quad y^* = f_1(x)$$

A (2.24) egyenletet nem ideális esetben, valamilyen empirikus, vagy félempirikus összefüggéssel számíthatjuk. Igen gyakori, hogy az összetartozó egyensúlyi értékpárokat, a feltüntetett adott nyomás és adott hőmérséklet mellett, táblázatosan adják meg, és ebből lehet megszerkeszteni az egyensúlyi görbét, vagy az adott pontokra egy tetszőleges fokszámú polinomot illeszthetünk. A **130. ábra** egyensúlyi összefüggéseket két típusát mutatjuk be.



130. ábra: Egyensúlyi görbe két típusa

Mindkét összefüggés grafikusán *egyensúlyi vonallal* szemléltethető, amely vagy görbe vagy, bizonyos speciális esetekben, például ideális elegyeknél vagy híg oldatoknál egyenes. A **130. ábra** látható egyensúlyi görbe hordozókomponenseket tartalmazó rendszerre vonatkozik és kifejezheti a gázfázis y^* egyensúlyi koncentrációit a folyadékfázis x koncentrációinak függvényében, $p = konstans$ és $T = konstans$ értékek mellett. A **130. ábra** egy desztilláció egyensúlyi görbéjére látható példa, $p = konstans$ esetre. A görbe minden pontjához különböző hőmérsékletek tartoznak ($T_1 > T_2$). Híg oldatok egyensúlyi görbéje is közel egyenes, az m megoszlási hányados gyakorlatilag állandó és megegyezik az egyensúlyi egyenes irántangensével. A (2.23) egyenlet konkrét alakjai, az egyensúlyi megoszlásra vonatkozó törvények. Ha egy ideális oldattal egyensúlyban levő gázelegy követi az ideális gáztörvényt is, akkor az adott gáz A komponensének p_A parciális nyomása a gőzfázisban és az A komponens folyadékfázisban oldott x_A koncentrációja közötti függvénykapcsolatot, a *Rault törvény* adja:

$$(2.25) \quad p_A^* = p_A^0 x_A$$

ahol az arányossági tényező p_A^0 , a tiszta A komponens egyensúlyi gőznyomása az adott hőmérsékleten. *Dalton törvény* szerint egy gázelegy p_δ összes nyomását a parciális nyomások összege adja, $p_\delta = \sum p_A$. Ezek szerint egy ideális gázelegyben az A gáz p_A parciális nyomása arányos az A komponens móltörtjével a gáz- vagy gőzfázisban és az arányossági tényező a gázfázis összes nyomása.

$$(2.26) \quad p_A = p_\delta y_A$$

Az ideális gőz-folyadék rendszerben a két fázis közötti egyensúlyi összefüggést, a *Rault-Dalton törvény* adja:

$$(2.27) \quad y_A^* = \frac{p_A^0}{p_\delta} x_A$$

Olyan oldatok, melyek nem ideálisak a Raoult törvény nem érvényes. ekkor alkalmazható a Henry törvény. A gázok oldhatóságát híg oldatokban, a Henry törvény írja le:

$$(2. 28) \quad p_A^* = Hx_A$$

Henry törvény kimondja, hogy egy A gáz p_A (Pa) parciális nyomása a vele érintkezésben levő folyadék fölött, az egyensúly beállta után, arányos a folyadékban oldódott A gáz x_A móltörtjével (koncentrációjával). A H (Pa/móltört, atm/móltört) arányossági tényezőt Henry állandónak nevezzük. A Henry törvényt más koncentráció egységekkel is kifejezhetjük, ekkor természetesen a Henry állandó dimenziója értelemszerűen megváltozik.

Ideális gáz-folyadék rendszerekben a két fázis koncentrációi közötti összefüggést a *Henry-Dalton* törvény szabja meg:

$$(2. 29) \quad y_A^* = \frac{H}{p_\sigma} x_A$$

A két egymással érintkező, de nem elegyedő folyadékfázisok közötti komponens megoszlást a *Nernst törvény* határozza meg:

$$(2. 30) \quad y_A^* = mx_A$$

ahol y_A az A komponens koncentrációja az extraktumban, és x_A az A komponens koncentrációja a raffinátumban.

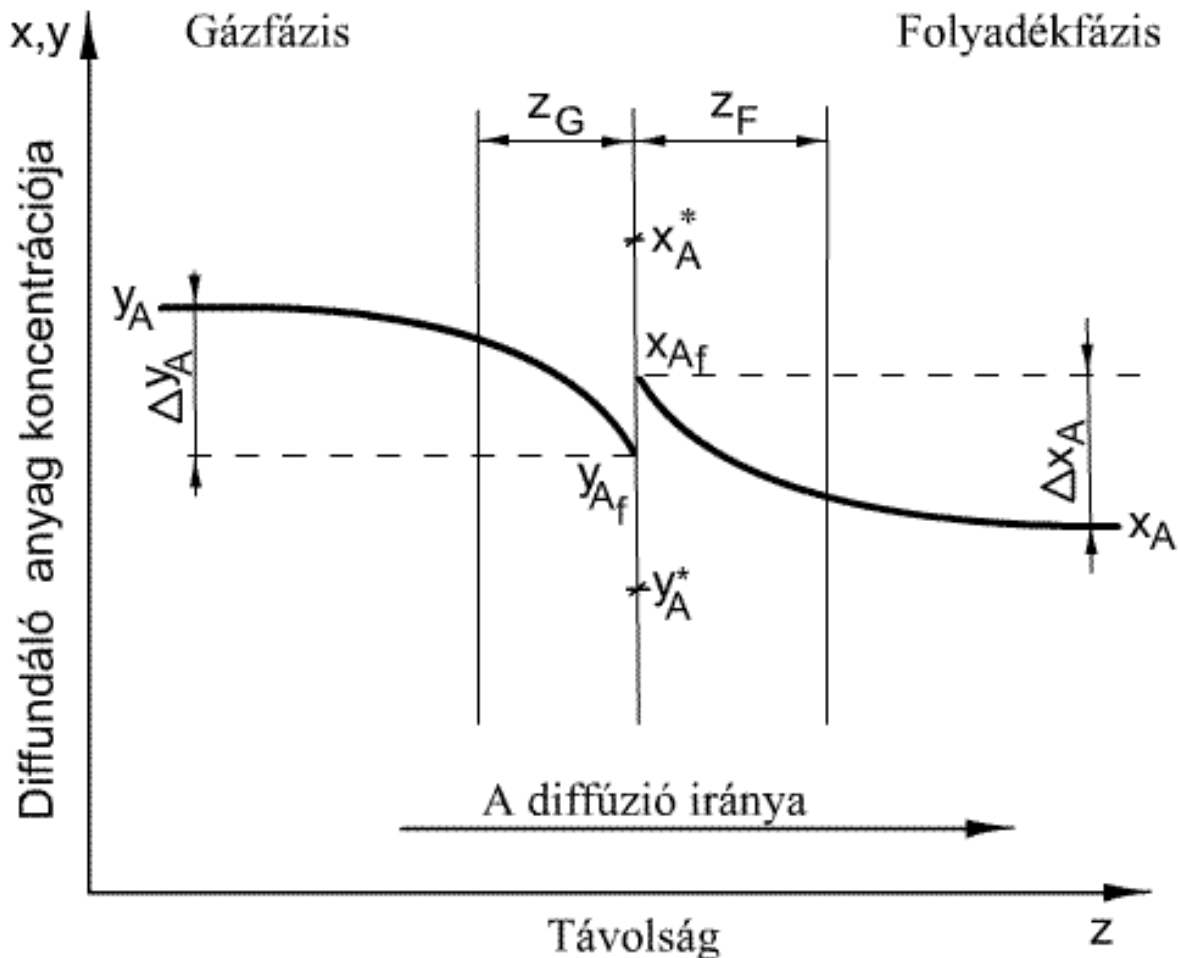
16.3. Diffúzió a fázisok között

Miután megállapítottuk, hogy a diffúzió hajtóerejét az egyensúlytól való eltérés adja, most a diffúzió sebességét a hajtóerőkkel kifejezve tanulmányozzuk. Számos anyagátadással kapcsolatos műveletet végeznek állandósult áramlásban, az érintkező fázisok folytonos és változatlan áramlásával stacionárius körülmények között. A koncentrációk a készülék egyes helyein időben állandóak. Vizsgáljunk egy oldható gáz, például ammónia abszorpcióját valamilyen gázelegyből. Legyen a gázelegy levegő és ammónia elegye, és abszorbensként alkalmazzunk vizet. A műveletet elvégezhetjük egyszerű készülékekben például egy cső alakú nedvesített falú abszorberben, ahol az ammónia-levegő elegy a készülék alján lépjen be és felfelé áramlik, a víz ellenáramban felülről lefelé folyik a cső belső fala mentén. A gázelegy ammónia koncentrációja a felfelé áramlás közben csökken, mivel a víz ammóniát old, és a készülék alján vizes ammóniaoldatként távozik. Hasonló megoldáshoz jutunk, ha a csövet vízszintesen lefektetjük, a vizet a cső alsó részében-, és a víz fölött az ammónia-levegő gázelegyet a cső felső részében ellentétes irányban áramoltatjuk. Állandósult állapotban a koncentráció a készülék bármely pontján időben állandó.

Vizsgáljuk a koncentráció viszonyokat a cső bizonyos pontjában, például a közepén. Mivel az oldott anyag a gázfázisból a folyadékba diffundál, a diffúzió irányában mindkét fázisban koncentráció gradiensnek kell lennie. A koncentráció gradiens hatására történik az anyagátmenet a két fázis között. A gázfázis diffúziós ellenállásának, amelyet a koncentráció gradiens leküzd, nagyobbik része a két fázis határfelületénél levő vékony lamináris filmen belül van, kisebbik része pedig a gáz turbulens áramlásban levő főtömegében. A teljes diffúziós ellenállás leírható egy olyan fiktív vagy ténylegesen létező filmmel, amelynek a molekuláris

diffúzióval szemben tanúsított ellenállása ugyanakkora, mint a valóban fennálló tényleges molekuláris és turbulens diffúziós ellenállások összege. Hasonló a helyzet a folyadékfázisban is. Az anyagátmenetnek ezt az egyszerű mechanizmusát először *Lewis és Whitman* dolgozták ki. Feltételezték, hogy az egymással érintkező fázisok érintkező felületének mindkét oldalán egy-egy vékony filmréteg alakul ki, ezért ezt az elméletet két-film elméletnek nevezzük.

A film még a közeg főtömegének turbulens áramlása esetén is részben, néhány molekulányi vastagságban mozdulatlan, részben pedig laminárisan áramlik. Mivel a filmekben az áramlás irányára merőlegesen semmiféle mozgás nincs, a fázisok közötti anyagátadás csak diffúzióval történhet. Ezeket a koncentráció gradienseket a fázisokon belül a távolság függvényében grafikususan lehet ábrázolni. A **131. ábra** a diffundáló anyag koncentrációit tüntették fel a két érintkező fázis keresztmetszetén átmenő, távolság függvényében.



131. ábra: A hajtóerők helykoordináta szerinti változása a két-film elmélet alapján

Az *A* anyag átlagos koncentrációja a gázfázisban y_A , és a koncentráció a határfelületig y_{Af} -re csökken, nagyrészt a z_G , effektív filmvastagságú filmen belül. A folyadékfázisban a koncentráció a határfelületi x_{Af} -ről x_A -ra, az átlagos koncentrációra csökken. Az uralkodó vagy átlagos koncentrációk, y_A és x_A , nyilvánvalóan nem egyensúlyi értékek, mivel másképpen az oldott anyag diffúziója nem következhetne be. *Lewis és Whitman* azt az elgondolást is felvetették, hogy a diffundáló oldott anyag átvitelével szemben magán a határfelületen nincs ellenállás. Ez a feltételezés azt jelenti, hogy a határfelületnél levő koncentrációk (y_{Af} és x_{Af}) mindkét fázisban egyensúlyi koncentrációk, azaz olyan értékek, amelyek ugyanekkorák maradnának, ha a felületek hosszú ideig érintkezésben lennének.

A két-film elméletet a gáz-folyadékfázis közötti komponensátadásra az alábbi hat pontban tudjuk röviden összefoglalni, és a koncentrációkat egységesen c -vel jelöljük:

1. A két fázis határán mindkét oldalon egy-egy film alakul ki. A film laminárisan áramlik, benne a komponensek diffúzióval mozognak.
2. Az átadás stacionárius, a filmben nincs felhalmozódás, azaz

$$(2.31) \quad \left(\frac{\partial c}{\partial t} \right)_{\text{Film}} = 0$$

A koncentráció a határfelülettel párhuzamos, de az áramlás irányára merőleges irányban nem változik a két filmben.

$$(2.32) \quad \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_{\text{Film}} = 0$$

3. A fázisok belseje tökéletesen kevert. A megoszló komponens konvekcióval jut el a filmig.

$$(2.33) \quad \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)_{\text{Fázis}} = 0$$

4. A fázishatáron a folyadék és a gázkoncentráció egymással egyensúlyban vannak.

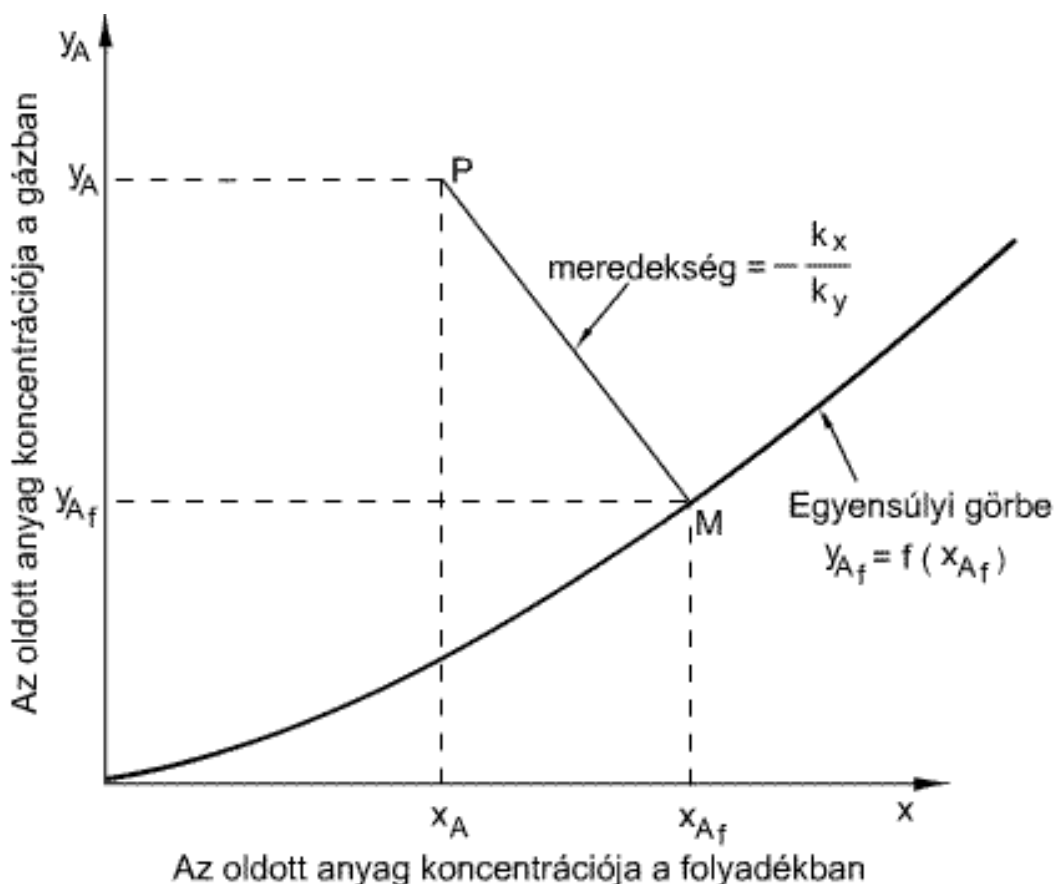
$$(2.34) \quad c_F^* = HRTc_G^* = H'c_G^*$$

5. Az egyensúlyi törvény (itt a Henry törvény), érvényes.

$$(2.35) \quad p_A^* = Hx_A = H^*c_A$$

6. Kémiai reakció nem játszódik le.

A **132. ábra** a két fázis összetartozó koncentrációit ábrázoljuk, melynek koordinátái a **129. ábra** azonosak.



132. ábra: Hajtóerők a kétfázisú rendszerben

A P pont koordinátái az oldott anyag átlagos koncentrációi a két fázisban, az M pont koordinátái a határfelületi koncentráció értékeknek felelnek meg. Az M pont a vizsgált rendszer egyensúlyi görbéjén fekszik. Az effektív filmvastagság olyan kicsiny, hogy magának a filmnek az oldott anyagtartalma elhanyagolhatónak tekinthető. Állandósult állapotban az A anyagnak a gázból a határfelületre diffundáló minden móljára az A anyagnak egy mólja jut, amely a folyadék belsejébe diffundál, ahonnan azután a folyadék elszállítja. Mindegyik fázisra fel lehet írni az anyagátadás megfelelő sebességi egyenletét, és mivel nincs felhalmozódás egyenlővé lehet tenni azokat:

$$(2.36) \quad j_A = \frac{\dot{N}_A}{A} = k_y (y_A - y_{A_f}) = k_x (x_{A_f} - x_A) = k_y \Delta y_A = k_x \Delta x_A$$

A Δy_A és Δx_A hajtóerőket a **132. ábra** szemlélteti. Az (2.36) egyenlet átrendezése

$$(2.37) \quad -\frac{k_x}{k_y} = \frac{y_A - y_{A_f}}{x_A - x_{A_f}}$$

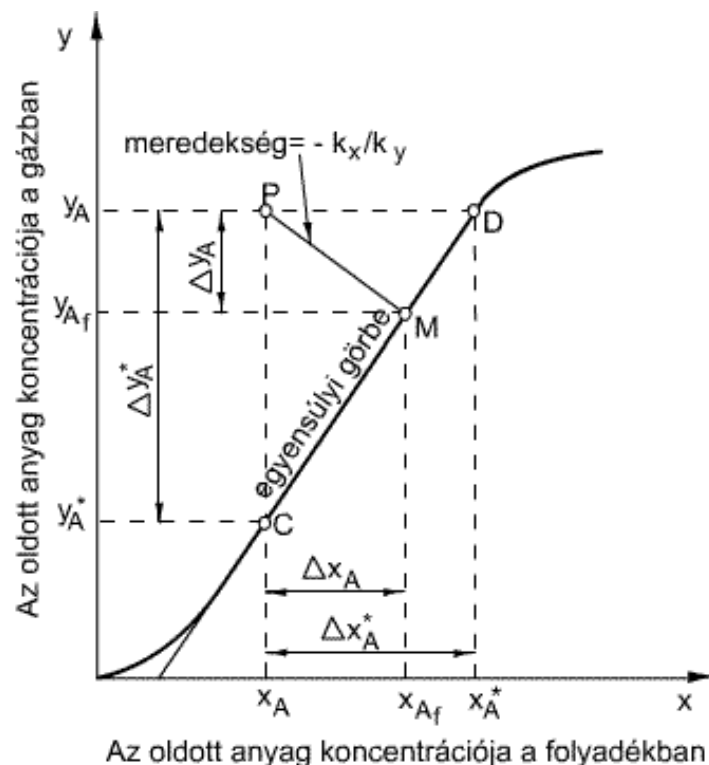
adja a PM egyenes iránytangensét. Ha az anyagátadási együtthatók ismeretesek, a x_{A_f} és y_{A_f} értékek, a hajtóerők, és végső soron a j_A a komponens átadás áramsűrűsége az adott körülmények között meghatározható, akár grafikusán a PM egyenes ábrázolásával, akár analitikusan az (2.37) egyenletnek és a

$$(2.38) \quad p_{A_f} = f(c_{A_f})$$

egyensúlyi görbe algebrai kifejezésének egyidejű megoldásával. Fontos ez alkalommal annak a hangsúlyozása, hogy a **131. ábra** és **132. ábra** ábrázolt állapot egy pontra vonatkozó úgynevezett helyi állapot, amely a nedvesített falú torony vagy más, fázisok érintkeztetésére szolgáló készülék egy megadott magasságában áll fenn. A készülék más helyein, például a nedvesített falú torony tetején vagy alján a P pont koordinátái különbözők lehetnek.

16.4. Anyagátbocsátási együtthatók

A gyakorlati esetek többségében nincs megfelelő összefüggés az anyagátadási együtthatók számítására. Kísérleti módszerekkel a határfelületi koncentrációkat nem tudjuk meghatározni. Mintavételes eljárással viszont meg lehet mérni a két fázis fő tömegében a koncentrációkat, azaz a y_A és x_A értékeket. Ilyen körülmények között elkerülhetünk néhány nehézséget, amennyiben az egyensúlyi összefüggés elég egyszerű. Tekintsük a **133. ábra**. Ez egy olyan rendszer, amelynek egyensúlyi görbéje egyenes azok között az összetételhatárok között, amelyeket vizsgálni akarunk.



133. ábra: A teljes hajtóerők lineáris egyensúlyi görbe esetében

A görbe egyenes szakaszán az egyensúlyi koncentrációkat, a

$$(2.39) \quad y_{Af} = mx_{Af} + b$$

egyenes adja. Amíg a $-(k_x/k_y)$ arány állandó marad és az egyensúlyi görbe egyenes szakaszán vagyunk, Δy_A arányos Δy_A^* -val. Az egyensúly görbén levő, a x_A koncentrációnak megfelelő C pontnak a y_A^* parciális nyomás felel meg, ezért

$$(2.40) \quad y_A^* = mx_A + b$$

és a $y_A - y_A^* = \Delta y_A^*$ különbség is arányos Δy_A -val. A (2.36) sebességi egyenlet ezért a következőképpen is írható:

$$(2.41) \quad j_A = \frac{\dot{N}_A}{A} = k_y (y_A - x_{Af}) = K_y (y_A - y_A^*) = K_y \Delta x_A^*$$

ahol K_y a két fázisban levő együttes diffúziós ellenállásnak megfelelő anyagátbocsátási együttható, amely a gáz koncentrációval kifejezett hajtóerőre vonatkozik. Az y_A^* koncentráció ténylegesen nem létezik a készülék vizsgált helyén, hanem olyan gázfázis összetételnek felel meg, amely egyensúlyban lenne az ebben a pontban levő átlagos folyadék összetétellel, és az **133. ábra** y_A^* -gal jelzett pontban lenne a helye. Hasonló módon a **133. ábra** levő egyensúlyi görbén is kiválasztható egy D pont úgy, hogy

$$(2.42) \quad y_A = mx_A^* + b$$

ahol x_A^* egyensúlyban van y_A -val. Mindezek az 2.3. ábrán is láthatók. Mivel Δx_A^* arányos Δx_A -val és Δy_A -nal,

$$(2.43) \quad j_A = \frac{\dot{N}_A}{A} = k_x (x_{Af} - x_A) = K_x (x_A^* - x_A) = K_x \Delta x_A^*$$

ahol K_x a két fázis együttes diffúziós ellenállására vonatkozó anyagátbocsátási együttható, amely a folyadékbeli koncentráció különbségre vonatkozik. Amennyiben a k_x/k_y arány a készüléknek abban a részében, ahol a fázisok érintkeznek, helyről helyre változna, vagy ha az egyensúlyi görbe nem lenne egyenes a vizsgált koncentráció határok között, a két fluidum-film viszonylagos ellenállásai változnának és az anyagátbocsátási együtthatók használata helytelen lenne, kivéve azt az esetet, amikor azok a helyi- illetve pontfeltételeket képviselnek.

A **133. ábra** alapján

$$(2.44) \quad \Delta y_A^* = \frac{k_x}{k_y} \Delta x_A + m \Delta x_A = \left(\frac{k_x}{k_y} + m \right) \Delta x_A$$

Továbbá

$$(2.45) \quad j_A = \frac{\dot{N}_A}{A} = K_y \Delta y_A^* = K_y \left(\frac{k_x}{k_y} + m \right) \Delta x_A = k_x \Delta x_A$$

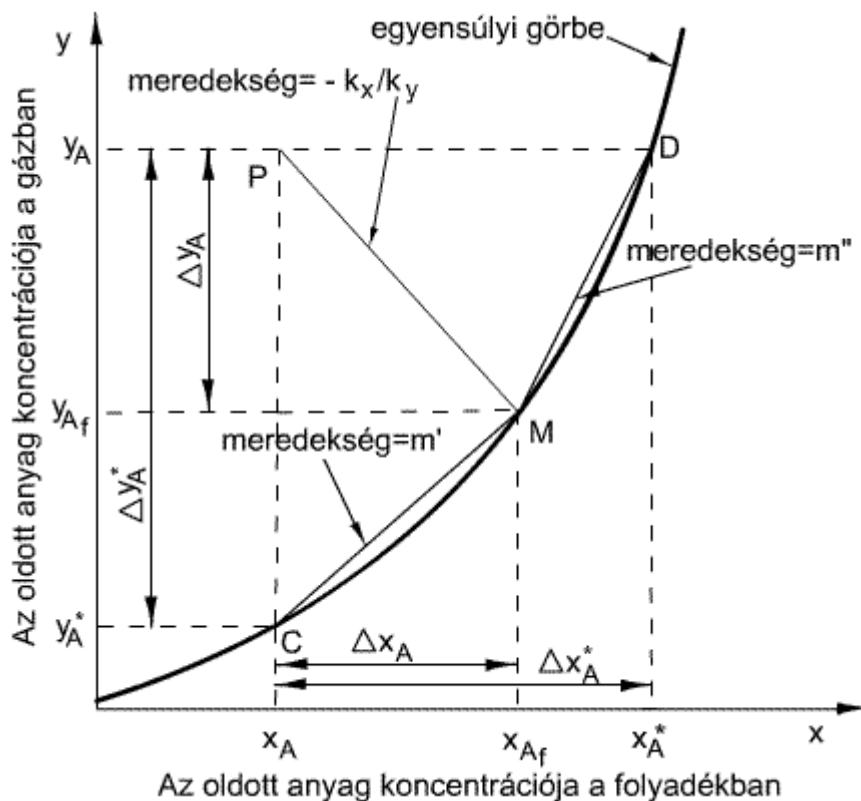
A (2.45) egyenlet egyszerűsítve, majd átrendezve:

$$(2.46) \quad K_y \left(\frac{k_x}{k_y} + m \right) = k_x$$

$$(2.47) \quad \frac{1}{K_y} = \frac{1}{k_y} + \frac{m}{k_x}$$

Ehhez hasonlóan:

$$(2.48) \quad \frac{1}{K_x} = \frac{1}{mk_y} + \frac{1}{k_x}$$



134. ábra: A teljes hajtóerők nem lineáris egyensúlyi görbe esetében

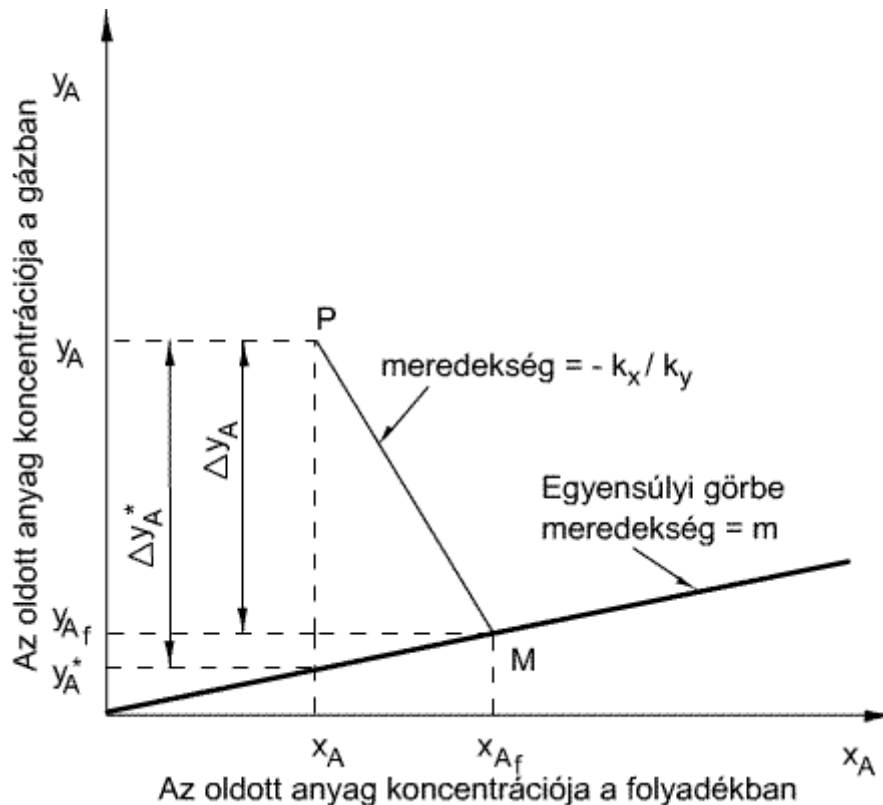
A **134. ábra** a teljes hajtóerőket ábrázolja, nem lineáris egyensúlyi görbe esetében. Itt az egyensúlyi görbe két lineáris szakasszal van helyettesítve, az M pont alatti lineáris szakasz meredeksége m' , és az M pont feletti lineáris szakaszé m'' . Ebben az esetben a (2.47) egyenletben az m helyett m' , és a (2.48) egyenletben m helyett m'' szerepel. A (2.47) és (2.48) egyenlet jobb oldalának tagjai az egyes fázisokon belül levő viszonylagos diffúziós ellenállásokat képviselik. Feltételezve, hogy k_y és k_x numerikus értékei közelítőleg egyenlők, ki lehet mutatni, hogy az m együttható hogyan befolyásolja a nagyobb diffúziós ellenállás helyét. Ha a lineáris izoterma esetén az m illetve a nemlineáris izoterma esetén az m' kicsi, egyensúlyban az A anyag gázfázisban levő kis koncentrációjának a folyadékban nagy koncentráció felel meg, vagyis az A anyag nagyon jól oldódik a folyadékban. A (2.47) egyenletben az m/k_x , illetve az m'/k_x kifejezése kicsi lesz, és a nagyobb ellenállást az $1/k_y$ kifejezés képviseli. A nagyobb diffúziós ellenállás a gázfázisba esik, és ez azt jelenti, hogy a gázfilm határozza meg a folyamat sebességét. Szélsőséges esetben

$$(2.49) \quad \frac{1}{K_y} \approx \frac{1}{k_x}$$

vagyis

$$(2.50) \quad \Delta y_A^* \approx \Delta y_A$$

Ezt az állapotot mutatja a **135. ábra**.



135. ábra: Hajtóerők m kis értékénél.

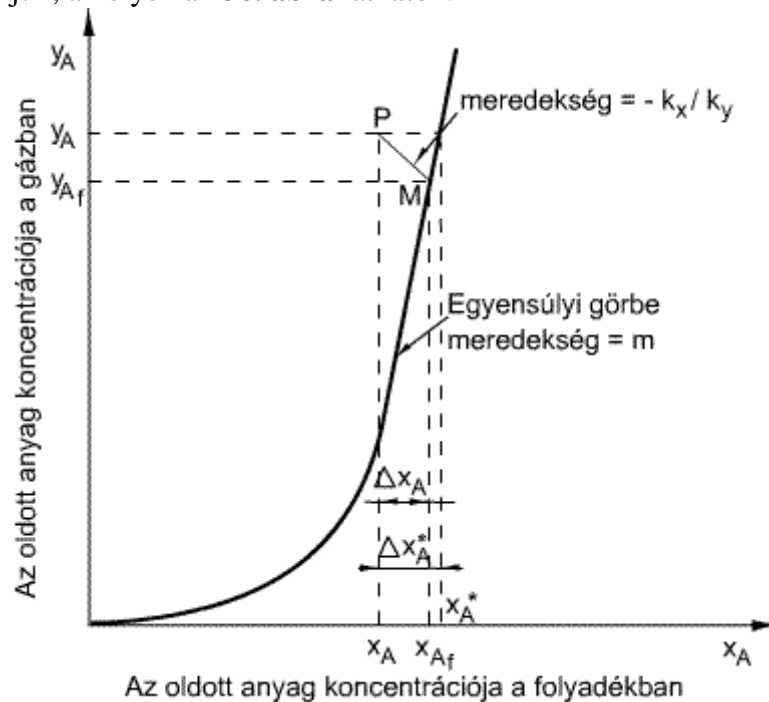
Ilyen körülmények között még a k_x nagy százalékos változása sem változtatja meg jelentősen a K_y értékét. Ezért, ha egy ismeretlen rendszerben azt látjuk, hogy ha a k_x értéke jelentősen változik például a folyadékok erős keverésénél, ez azonban az anyagátvitel sebességében csak kis változást okoz, akkor arra következtethetünk, hogy a gázfilm határozza meg a folyamat sebességét. Hasonló következtetések néha segítséget nyújtanak a készülék kiválasztásában vagy két különböző típusú készülék viszonylagos teljesítőképességének megítélésében. Például valamely folyadékban nagyon jól oldódó gáz abszorpciójának esetében általában várható, hogy a folyadékcspepek sűrű permetezése a folytonos gázfázison át hatásosabb, mint a gáz átbuborékoltatása a folytonos folyadékfázison keresztül. Ez abból a tényből következik, hogy a diffundáló anyag egy gázbuborék belsejében van, és az anyagátvitel nagyrészt a molekuláris diffúzióval megy végbe. Ezért, amennyire csak lehetséges, célszerű a gázfázisú ellenállás csökkentése. Ez a folyadékcspepek esőztetésével, vagy permetezésével előálló erőteljes keveredéssel érhető el. A folyadékcspepek ellenállása a diffúzióval szemben az m kis értéke miatt viszonylag csekély. Tehát, ha az m illetve az m' értéke kicsi, azaz az egyensúlyi görbe lapos, illetve ha kis parciális nyomásváltozás nagy folyadék koncentrációváltozást okoz, akkor az m/k_x értéke a (2.47) egyenletben elhanyagolható. Ebben az esetben a diffúzió összes ellenállása egyenlőnek vehető a gázfilm ellenállásával, és a folyamatot a gázfilm ellenállása szabályozza.

Vizsgáljuk most az ellenkező esetet, amikor m illetve az m'' nagyon nagy, az A anyag viszonylag oldhatatlan a folyadékban, és k_y és k_x közel egyenlők. Ekkor a (2.48) egyenlet jobb oldalának első tagja lesz a kisebb, a diffúzióval szemben a nagyobb ellenállás a folyadékfázisban van, és a folyadékfilm határozza meg a folyamat sebességét. Ekkor a

$$(2.51) \quad \frac{1}{K_x} \approx \frac{1}{k_x}$$

$$(2.52) \quad \Delta x_A^* \approx \Delta y_A$$

egyenleteket nyerjük, amelyek a **136. ábra** láthatók.



136. ábra: Hajtóerők az m nagy értékénél

Ilyen esetben az anyagátvitel sebességét számottevően a k_x folyadékfilm együttthatót befolyásoló körülményekkel lehet megváltoztatni. A **136. ábra** alsó része azt a helyzetet is mutatja, amikor ugyanabban a rendszerben a nagyobb befolyás a folyadékfilmről a gázfilmre mehet át. Ez viszont azt jelzi, hogy az anyagátbocsátási együttthatók lineáris egyensúlyi görbével rendelkező rendszerek esetében is csak korlátozottan használhatók. Összegezve, ha az m , illetve az m'' értéke nagy, az egyensúlyi görbe meredek, illetve kis folyadék-koncentráció változás nagy parciális nyomásváltozást (nagy gázoldali koncentrációváltozást) okoz, akkor a (2.48) egyenletben az $1/mk_y$, illetve $1/m''k_y$ érték elhanyagolható. Ebben az esetben a diffúzió összes ellenállása egyenlőnek vehető a folyadékfilm ellenállásával, és műveletet a folyadékfilm ellenállása szabályozza.

Azokban az esetekben, amikor a k_x és k_y közelítőleg sem egyenlők, a (2.44) egyenlet azt mutatja, hogy a k_x/k_y és m aránya a lényeges a nagyobb befolyást gyakorló ellenállás helyének meghatározásában, mivel a zárójelben levő első tag a gázfázis relatív ellenállását képviseli, a második tag pedig a folyadékfázisét. Az anyagátadási együttthatók többek között az áramlási sebességnek is függvényei. A folyamat sebességét meghatározó ellenállás nemcsak az m megoszlási együttthatóval, hanem más körülményekkel is befolyásolható.

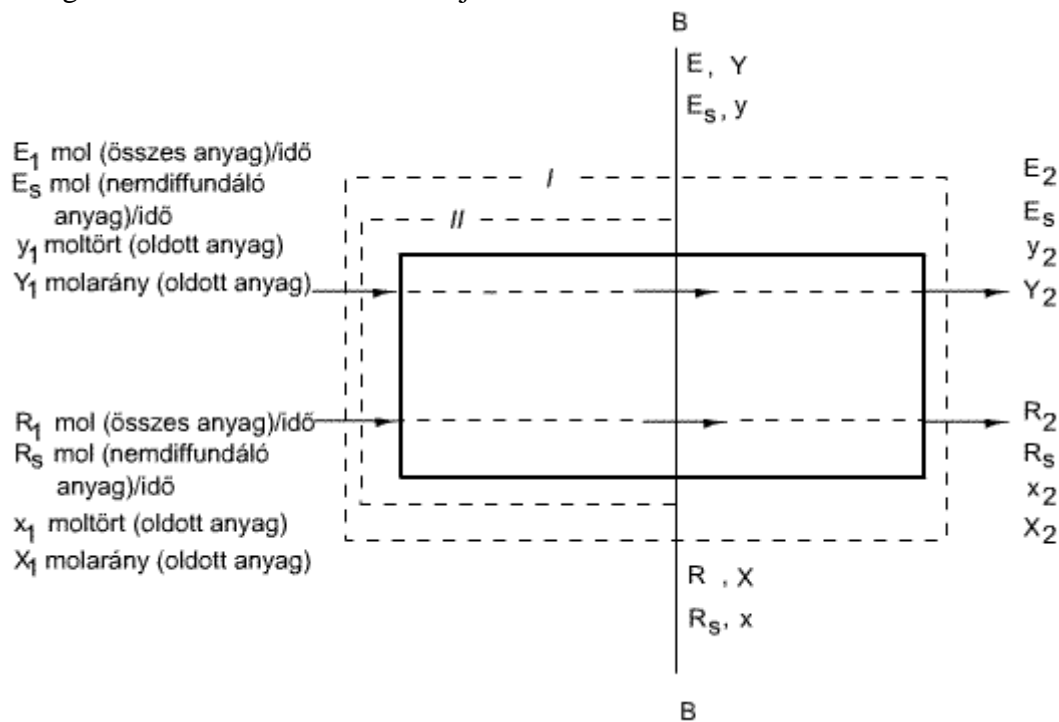
A filmelmélet mibenlétének és az anyagátbocsátási együttthatók fogalmának megvilágítása céljából példaként egy olyan gázabszorpciós műveletet választottunk, amelyben az oldott anyag a gázfázisban nem diffundáló hordozógázon át, a folyadékfázisban pedig nem diffundáló oldószeren át diffundál. Az alapelveket semmi sem korlátozza erre az egy műveletre, hanem azokat másokra is lehet alkalmazni abból a célból, hogy megfelelő anyagátadási együttthatók egyesítésével az anyagátbocsátási együttthatót megállapítsuk. Például a folyadék extrakció esetében két folyadékfilm együttthatót egyesítünk az anyagátbocsátási tényező meghatározására. Különböző művelteknél praktikussági okok miatt különböző koncentráció egységeket használunk.

16.5. Anyagmérlegek

A koncentráció különbségből adódó hajtóerők, a nem elegyedő fázisok érintkeztetésére szolgáló készülék csak egyetlen helyére vonatkoznak. Állandósult állapotú folyamatok esetében az oldott anyagnak az egyik fázisból a másikba való átmenete miatt mindegyik fázis koncentrációja változik a készüléken való áthaladása közben. Hasonlóképpen szakaszos eljárások esetében a koncentráció mindegyik fázisban változik időben. Ezek a változások a hajtóerőkben is változásokat okoznak, ezért szükséges, a koncentráció változások követése, amit az anyagmérlegek segítségével tehetünk. A fázisok érintkeztetése megvalósítható szakaszos és folyamatos berendezésekben. A folyamatos berendezések lehetnek fokozatszerűek és kolonna típusúak.

16.5.1. Állandósult állapotú egyenáramú folyamatok.

Vizsgáljunk valamely anyagátviteli műveletet, amelyet állandósult állapotban, egyenáramban hajtunk végre. mint azt a **137. ábra** láthatjuk.



137. ábra: Stacionárius állapotú egyenáramú folyamat

Ezt egyszerűen egy derékszögű négyszöggel ábrázoltuk. A két, egymásban oldhatatlan fázist E és R fázisként jelöljük, és jelenleg csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor egyetlen A anyag diffundál az R fázisból az E fázisba. A fázisok másik alkotórészét, a diffundáló oldott anyag oldószereit tekintjük úgy, mintha nem diffundálnának. A készülékbe, amelyben a fázisok érintkeznek, az R fázis R_1 mol/s összes anyagtartalommal lép be, amelyben R_S mol/s nem diffundáló oldószer és diffundáló oldott A anyag van, amelynek koncentrációja x_1 móltört. Amint az R fázis a készüléken áthalad, az A anyag az E fázisba diffundál, és ennek következtében a kilépésnél az R összes mennyisége R_2 mol/s értékre csökken, míg az R_S nem diffundáló oldószer áramlási sebessége ugyanaz, mint a belépésnél, az A anyag móltörtje x_2 -re csökken. Hasonlóképpen az E fázis a belépésnél E_1 mol/s összes anyagot tartalmaz, amelyből E_S mol a nem diffundáló oldószer és az A koncentrációja y_1 móltört. Az A anyagnak y_2 móltört

koncentrációra való növekedése következtében az E fázis a kilépésnél E_2 mol/s mennyiségre nő, míg E_S oldószertartalma állandó marad.

A készülék köré rajzolt szabálytalan alakú I zárt szaggatott vonal, segítségünkre lesz az A anyag anyagmérlegének megállapításában, mivel az áramok A anyagáramát minden olyan helyen figyelembe kell készíteni, ahol a görbét valamelyik nyílal jelölt áram keresztezi. A belépő R fázis A anyag tartalma R_1x_1 , az E fázisban E_1y_1 . Hasonlóképpen a kilépő áramok A anyag tartalma R_2x_2 , illetve E_2y_2 . Mindezek alapján az A anyagra felírt mérlegegyenlet:

$$(2.53) \quad R_1x_1 + E_1y_1 = R_2x_2 + E_2y_2$$

$$(2.54) \quad R_1x_1 - R_2x_2 = E_2y_2 - E_1y_1$$

Az A anyag R_1x_1 mól számának és a nem diffundáló R_S oldószert mól számának hányadosa megegyezik az A anyag x_1 mól törtjének és a fázis nem A -anyag $1-x_1$ mól törtjének hányadosával:

$$(2.55) \quad \frac{R_1x_1}{R_S} = \frac{x_1}{1-x_1} \text{ és}$$

$$(2.56) \quad R_1x_1 = R_S \frac{x_1}{1-x_1} = R_S X_1$$

ahol X_1 az A anyag mól arányában kifejezett koncentráció a belépési pontban (A mol/nem- A mol). Az E fázis is hasonlóképpen felírható ez a mólarány, és a (2.54) egyenlet így a következő alakra hozható:

$$(2.57) \quad R_S(X_1 - X_2) = E_S(Y_2 - Y_1)$$

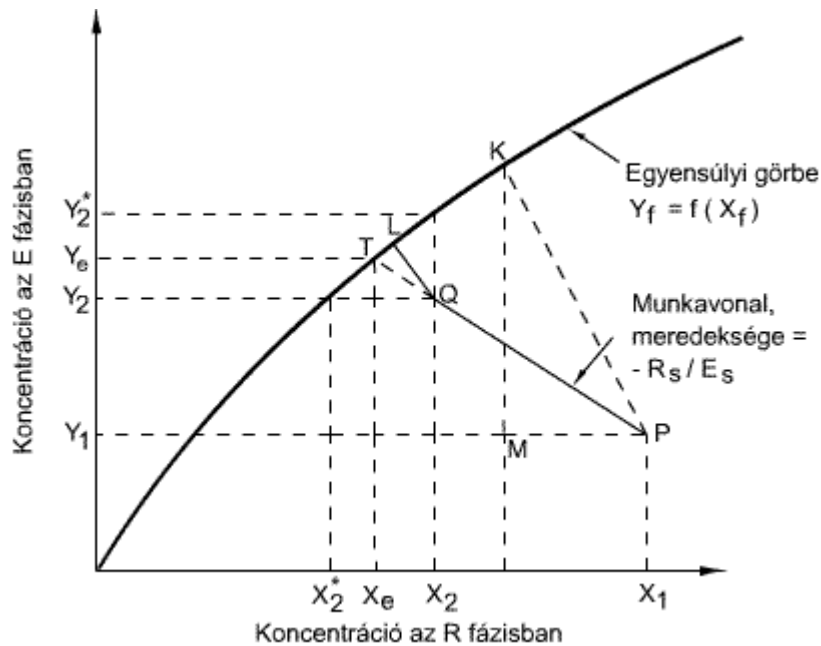
A (2.57) egyenlet, egy egyenes egyenlete, és az egész egyenáramú műveleti egységre felírt úgynevezett integrális mérlegegyenlet reprezentál.

A készülék bármely $B-B$ metszetében az A anyag mól törtje x és y , mól aránya pedig X és Y az R , illetve az E fázisban. Ha a 2. zárt szaggatott vonalú téglalapot úgy rajzoljuk meg, hogy az a készüléknek a belépéstől a $B-B$ metszetig terjedő részét foglalja magába, az A anyag anyagmérlege a következőképpen alakul:

$$(2.58) \quad R_S(X_1 - X) = E_S(Y - Y_1)$$

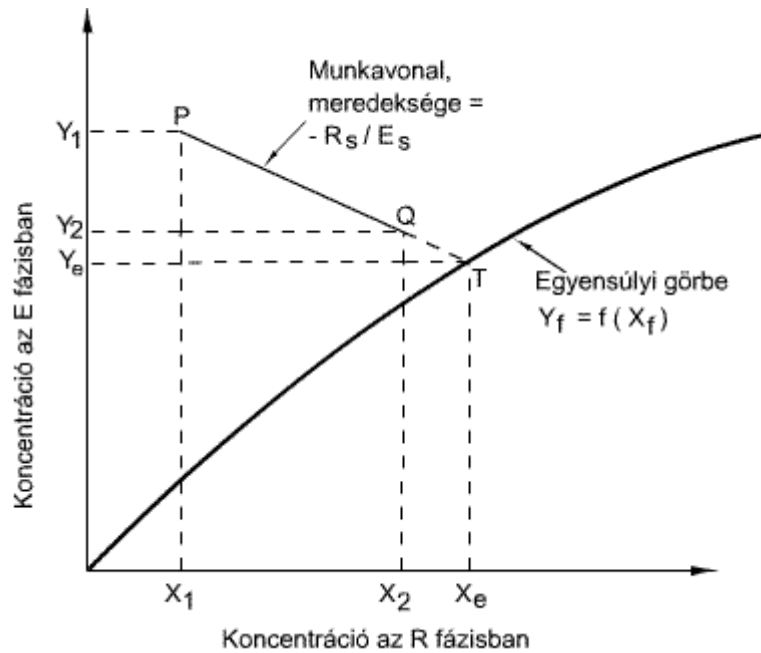
$$(2.59) \quad Y = -\frac{R_S}{E_S} X + \frac{R_S}{E_S} X_1 + Y_1.$$

a (2.59) egyenlet az (X, Y) koordináta rendszerben szintén egy negatív iránytangensű egyenes egyenlete, amelynek hajlásszöge $-R_S/E_S$, és amely az (X_1, Y_1) és (X, Y) futó pontokon halad át. A két egyenes hajlásszöge ugyanaz és egy pontjuk közös, ezért ezek az egyenesek egybeesnek és a (2.59) egyenlet a készülékben levő fázisok összetételére vonatkozó általános kifejezés a belépéstől bizonyos távolságra levő helyen. Mivel X és Y a két fázis koncentrációit jelenti, az egyensúlyi összefüggés kifejezhető ezekkel a koordinátákkal is. A **138. ábra** mutatja az egyensúlyi összefüggés ábrázolását, valamint az (2.57) és (2.58) egyenlet QP egyenesét.



138. ábra: Egyenáramú diffúziós folyamat, az oldott anyag átvitele az R fázisból az E fázisba

A QP egyenest *munkavonalnak* nevezzük, és nem tévesztendő össze az előzőekben tárgyalt hajtóerő egyenesekkel. A készülékbe való belépésnél az anyagátviteli együtthatók a két fázisban a KP hajtóerő egyenest eredményezhetik, ahol K jelenti a határfelületi összetételt a belépésnél, és a KM , illetve MP távolságok jelentik a hajtóerőt az E , illetve az R fázisban. Hasonlóképpen a kilépésnél L pont ábrázolhatja a határfelületi összetételt, és LQ a hajtóerőket jelentő egyenest. Ha a készülék hosszabb lenne, mint azt a **137. ábra** mutatja, úgyhogy a végén egyensúly állna be a két fázis között, a megfelelő X_e és Y_e egyensúlyi összetételeket úgy nyerjük, hogy a munkavonalat meghosszabbítjuk addig, amíg az egyensúlyi görbét annak T pontjában metszi. A hajtóerők, és ennek következtében a diffúzió sebessége is, ebben a pontban nullára csökkennek. Ha a diffúzió iránya ellenkező lenne, azaz az E fázisból az R fázisba, a munkavonal az ellenkező oldalra kerülne, amint azt a **139. ábra** mutatja.



139. ábra: Egyenáramú diffúziós folyamat, az oldott anyag átvitele az E fázisból az R fázisba

A munkavonal *egyenessége* azoktól az egységektől függ, amelyekkel az anyagmérleg koncentrációit kifejeztük. A 138. ábra és 139. ábra egyenes vonalak vannak, mert a mól arányban kifejezett koncentrációkat az E_S és az R_S változatlan mennyiségekre alapoztuk.

Ha az (2.54) egyenletet móltörtös koordináta-rendszerben ábrázoljuk, vagy móltörtökkel arányos valamilyen más koncentrációegységet, például parciális nyomást használunk, görbét kapunk. E görbe irántangense minden pontban $-R/E$, és mivel az R és E mennyiségek változnak, az irántangens is változik. Ez esetben a végső egyensúlyi viszonyoknak megfelelő T pont helyének extrapolálása mindenestre sokkal nehezebb, mint a mólarány koordináták használata esetében. Az olyan műveletben viszont, ahol az egyes fázisok teljes mennyisége E és R állandó marad, mialatt összetételük az egyes komponensek diffúziójának következtében változik, a móltörtökkel ábrázolt diagram fog egyenes munkavonalat adni, amint azt az (2.54) és (3.42) egyenletek mutatják ($E_1 = E_2 = E$ és $R_1 = R_2 = R$). Ha mindegyik komponens diffundál, úgyhogy egyik fázis összes mennyisége sem marad állandó, a munkavonal általában görbe lesz.

16.5.2. Állandósult állapotú ellenáramú folyamatok.

Ha az előzőekben vizsgált folyamatot ellenáramban valósítjuk a 140. ábra, az anyagmérleg móltörtökben és mólarányokkal kifejezett koncentrációkkal:

$$(2.60) \quad R_1 x_1 + E_2 y_2 = R_2 x_2 + E_1 y_1$$

$$(2.61) \quad R_S (X_1 - X_2) = E_S (Y_1 - Y_2)$$

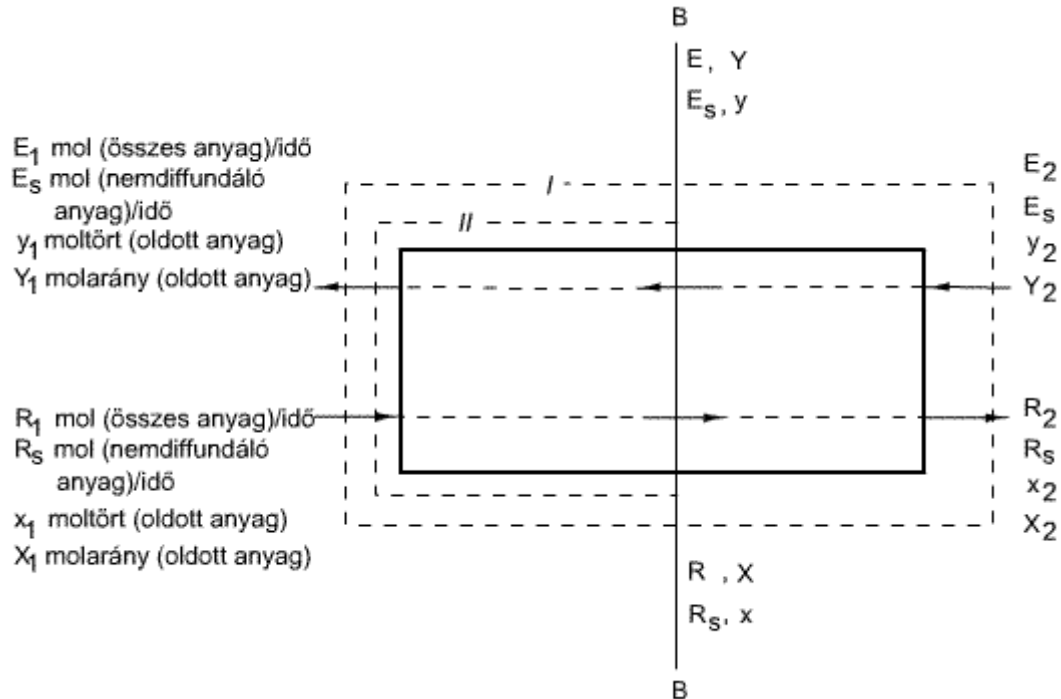
Az 1 index jelzi a készüléknek azt a végét, ahol az R fázis belép, 2 index azt a végét, ahol az R fázis kilép. Az anyagmérleg a készülék egy tetszőleges B keresztmetszetére:

$$(2.62) \quad R_1 x_1 + E y = R x + E_1 y_1$$

$$(2.63) \quad R_S (X_1 - X) = E_S (Y_1 - Y)$$

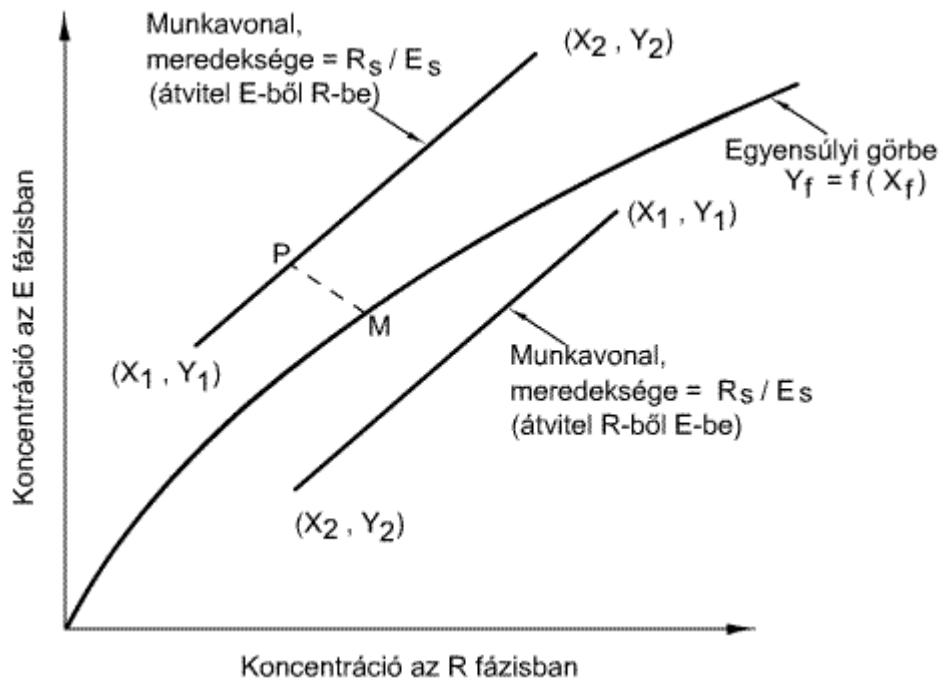
Az egyenes egyenlete a szokásos alakban:

$$(2.64) \quad Y = \frac{R_S}{E_S} X + Y_1 - \frac{R_S}{E_S} X_1$$



140. ábra: Állandósult állapotú ellenáramú folyamat

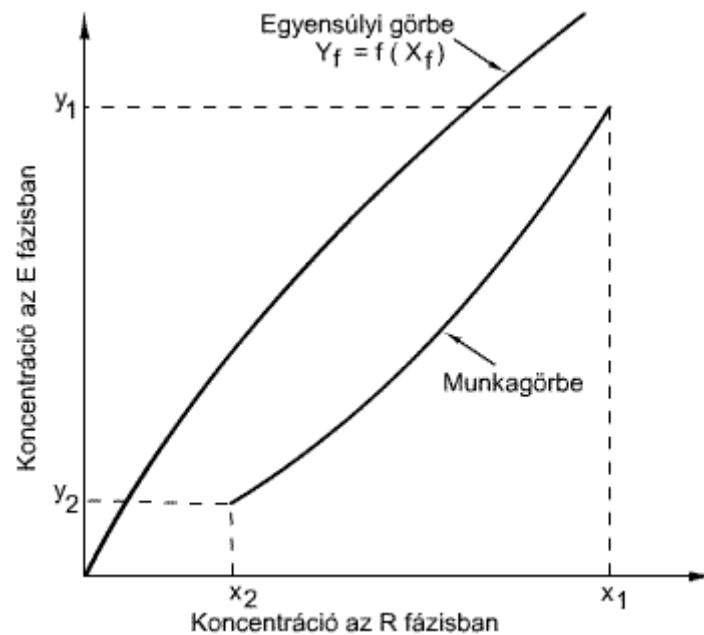
A (2.62) és (2.63) egyenlet a fázisokban levő koncentrációk közötti általános összefüggést adja meg valamely tetszőleges keresztmetszetben, az (2.60) és (2.61) egyenlet pedig a teljes anyagmennyiséget írja le. A (2.61) az (X, Y) koordináta rendszerben egy egyenes egyenlete, amelynek iránytangense R_S/E_S és amely áthalad az (X_1, Y_1) és (X_2, Y_2) pontokon, amint azt a **141. ábr**aláthatjuk.



141. ábra: Ellenáramú diffúziós művelet munkavonalai

Az egyenes az egyensúlyi görbe felett fekszik, ha a diffúzió az E fázisból az R fázisba irányul, és alatta, ha a diffúzió ellentétes irányú. Az előbbi esetben, egy olyan pontban, ahol a fázisok koncentrációit P adja meg, a hajtóerőt a PM egyenes jelzi. Ennek hajlásszöge a fázisok relatív diffúziós ellenállásától függ. A hajtóerők nagysága nyilvánvalóan változik a készülék egyik végétől a másikig. Ha a munkavonal valahol eléri az egyensúlyi görbét, az érintkező fázisok egyensúlyban lesznek, a hajtóerő és ezért a diffúzió sebessége is nullává, a véges anyagmennyiség átviteléhez szükséges idő pedig végtelenné válik. Ez meghatározott koncentrációváltozásra vonatkozólag azzal jellemezhető, hogy a fázisok áramlási sebességének aránya, azaz a munkavonal iránytangense szélsőértéket vesz fel.

Az egyenáram esetében és itt is, a munkavonal egyenessége a koncentrációk kifejezésének módjától függ. A **141. ábra** munkavonalai egyenesek, mert az X és Y mólarányban kifejezett koncentrációk az R_s és E_s mennyiségekre vonatkoznak, amelyekre nézve feltételeztük, hogy állandók. Ha móltörtet, vagy olyan mennyiségeket használunk, amelyek a móltörttel arányosak, mint például a parciális nyomások, a munkavonalak görbék lesznek, amint az a **142. ábr**alátható, és hajlásszögük bármely pontban R/E .



142. ábra: Ellenáramú diffúziós folyamat görbe munkavonallal

Olyan esetekben ahol mind az E , mind az R fázis teljes mennyisége állandó, miközben összetételük változik, és a móltörtek függvényében ábrázolt diagram egyenes munkavonalat ad, amint azt a (2.60) egyenlet mutatja ($E=E_1=E_2$ és $R=R_1=R_2$). A munkavonal általában görbe lesz, ha minden komponens diffundál, úgyhogy egyik fázis összes mennyisége sem marad állandó.

Összehasonlítva az egyenáramú és az ellenáramú diffúziós folyamatok munkavonal egyenleteit, megállapíthatjuk, hogy egyenáram esetében **138. ábra** és **139. ábra**, a T pont az egyenáramú üzemmód határteljesítményét jelenti, vagyis azt az üzemállapotot, amelynél a két kilépő fázis egymással egyensúlyba kerül. Az átadás $y-y^* = y-mx$ hajtóereje ebben a pontban nullává válik. A két munkavonal helyzetéből következik, hogy egyenáram esetén az átadási folyamatban a hajtóerő mindig csökken. Ellenáramú folyamatokban, **141. ábra**, a hajtóerő csökkenhet vagy nőhet, illetve állandó értéken is maradhat. Ha az ellenáramú művelet munkavonalai az egyensúlyi vonallal párhuzamos, az elválasztásnak nem szab határt az egyensúly elérése. Az ellenáramúság tehát a hajtóerővel való célszerűbb gazdálkodást jelenti, következésképpen nagyobb mértékű elválasztásra teszi alkalmassá a műveleti egységet.

16.6. Az anyagátadási folyamat megvalósításának módjai

Az anyagátviteli folyamatok kivitelezhetők mind a fázisok folyamatos érintkeztetésével egyetlen készüléken való átáramoltatással, mind ismételt érintkeztetés és elkülönítés közben a fokozatok sorba kapcsolásával (kaskád), amikor is az egyes fokozatok lényegében egyenáramban működnek. A fázisok folytonos érintkeztetésével működő készülékeket kolonna típusú vagy csőszerű berendezéseknek, míg az egyes tökéletesen kevert, üstszerűnek tekintett berendezéseket fokozatoknak nevezzük.

16.6.1. Átadás kolonna típusú berendezésekben, az átviteli egység

Egy jól üzemelő kolonna típusú berendezésben például töltelékes kolonnában, az axiális irányú keveredés elhanyagolható a konvektív áramhoz képest, így a Benedek-László transzport egyenletből csak a konvektív és az átadási tag marad. vagyis az átadás mindkét fázisra

$$(2.65) \quad -v_x \frac{dX_A}{dz} + K_y a (Y_A - mX_A) = 0$$

$$(2.66) \quad v_y \frac{dY_A}{dz} - K_y a (Y_A - mX_A) = 0$$

Rendezzük át a (2.65) egyenletet, és kijelölve az integrálást:

$$(2.67) \quad \frac{v_y}{K_y a} \int_{Y_{A1}}^{Y_{A2}} \frac{dY_A}{Y_A - mX_A} = \int_0^H dz = H$$

A (2.67) egyenletben H az oszlop magassága, amit két függvény, a $v_y/K_y a = \dot{A}EM$, a hosszúság dimenziójú, átviteli egység magasságának, és a

$$(2.68) \quad \int_{Y_{A1}}^{Y_{A2}} \frac{dY_A}{Y_A - mX_A} = \dot{A}ESz$$

dimenziómentes, átviteli egység számának, $\dot{A}ESz$, szorzatával határozhatunk meg.

A (2.68) egyenlet megoldásához induljunk ki a (2.63) ellenáramú folyamat általános egyenletéből, és fejezzük ki az R fázis X_A mól arányában megadott koncentrációt:

$$(2.69) \quad X_A = X_{A1} + \frac{E_S}{R_S} (Y_A - Y_{A1})$$

A (2.69) összefüggést helyettesítsük be a (2.68) integrálegyenletbe, és végezzük el az integrálást:

$$(2.70) \quad \dot{A}ESz = \frac{1}{1-B} \ln \left[\frac{Y_{A1} - mX_{A1}}{Y_{A2} - mX_{A1}} (1-B) + B \right]$$

ahol

$$B = \frac{mR_s}{E_s} X \quad \text{ha} \quad B \neq 1$$

Amennyiben $B = 1$, akkor

$$(2.71) \quad \acute{A}ES_z = \frac{Y_{A1} - Y_{A2}}{Y_{A2} - mX_{A1}}$$

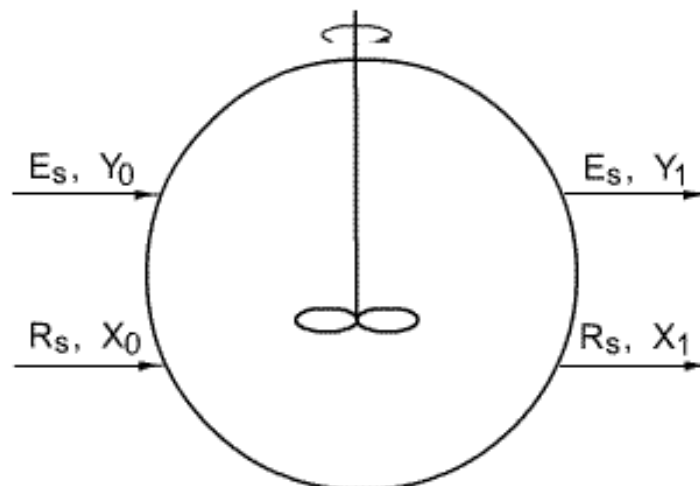
A kolonna magassága:

$$(2.72) \quad H = \acute{A}ES_z \cdot \acute{A}EM$$

Az átviteli egységmagasság a típustervezésnél, az adott hidrodinamikai tartományban állandó, vagy állandónak vehető, a tervezési munka az $\acute{A}ES_z$ megadása után, a töltet rétegmagassága a (2.72) egyenlettel egyszerűen számítható.

16.6.2. Átadás egy fokozatszerű berendezésekben

Egy fokozaton olyan készüléket értünk, amelyben két egymással nem elegendő fázist hathatósan érintkeztetünk abból a célból, hogy az anyagátadás a fázisok között tökéletesen végbemenjen. Ezután az egymással egyensúlyba levő fázisokat mechanikailag szétválasztjuk. *Egyensúlyi, ideális* vagy *elméleti fokozat* tehát az készülék, vagy készülékrész, amelyben a fázisok érintkezési ideje elegendően hosszú ahhoz, hogy a kilépő fázisok egymással egyensúlyba kerüljenek. Egy elméleti fokozatot egyszerűen úgy alakíthatunk ki, ha az anyagátadási folyamatot például a **143. ábra** látható tökéletesen keveredő üstszerű berendezésben valósítjuk meg. Most az anyagáram iránya legyen az E fázisból az R fázisba, tehát az E_s fázis Y_0 koncentrációja Y_1 koncentrációra csökken, mialatt az R_s fázis az X_0 koncentrációról X_1 koncentrációra nő a **143. ábra** megfelelően.



143. ábra: Anyagátadás tökéletesen kevert térben

A berendezés komponens mérlege:

$$(2.73) \quad E_s(Y_0 - Y_1) = R_s(X_1 - X_0)$$

Az átadási egyenletek:

$$(2.74) \quad E_s(Y_0 - Y_1) = +VK_Y a(Y_1 - mX_1)$$

$$(2.75) \quad R_s(X_0 - X_1) = -VK_Y a(Y_1 - mX_1)$$

Az utóbbi egyenlet átrendezésével:

$$(2.76) \quad X_1 \left(1 + \frac{VK_Y a}{R_s} m \right) = X_0 + \frac{VK_Y a}{R_s} Y_1$$

Ha az üstszerű berendezésben a keverés intenzitását növeljük, a K_Y és a (fajlagos felület) erőteljesen növekedni fog. Emellett a berendezés átlagos tartózkodási ideje is elegendően nagy, akkor teljesülhetnek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$(2.77) \quad \frac{VK_Y a m}{R_s} \gg 1 \quad \text{és} \quad \frac{VK_Y a}{R_s} Y_1 \gg X_0$$

akkor a (2.76) egyenlet bal oldalán az 1 , jobb oldalt az X_0 elhanyagolható.

$$(2.78) \quad X_1 \frac{VK_Y a}{R_s} m = \frac{VK_Y a}{R_s} Y_1$$

Az egyszerűsítés után, az alábbi közelítő összefüggést kapjuk:

$$(2.79) \quad X_1 m = Y_1$$

Vagyis a berendezést elhagyó két fázis jó közelítésben egyensúlyinak tekinthető. Hasonló eredményt kaphatunk a (2.74) egyenlet (másik fázis) *összefüggéseinek* diszkussziójával is.

Az olyan műveleti egységet vagy egység részt, melyből az érintkező fázisok egyensúlyi összetételben lépnek ki, egyensúlyi egységnek vagy egyensúlyi tényérnek, fokozatnak nevezzük. A feltételekből látható, hogy igen nagy $K_Y a$ értékkel lehet csak az egyensúlyi egység kritériumot jól megközelíteni. Intenzív keveréssel és nagy felület kialakításával ez a kritérium kevert terekben 35-90 %-ban, két-három sorba kapcsolt egységgel 95-99 %-ban is teljesíthető. Az elméleti és az egyensúlyi egység kialakításában résztvevő, tehát a valóságban felhasznált sorba kapcsolt kevert terek számának hányadosa a művelet hatásfokára utal. Folytonos berendezések azon hosszát, melyen teljesül az egyensúlyi egység kritériuma egyensúlyi egységmagasságnak, vagy tényér magasságnak nevezzük. Egy valós berendezés teljes hossza, illetve magassága tehát:

$$(2.80) \quad H = EEM \cdot EESz$$

Ahol EEM az egyensúlyi egység- vagy tényérmagasság, és EESZ az elméleti tényérok vagy egyensúlyi egységek száma.

Az egyensúlyi és átviteli egység fogalom definíciójában, következőképpen tartalmában eltér. Vagyis annak ellenére, hogy bizonyos esetekben az $\dot{A}EM$ és az EEM adott rendszerre azonos értékű, nem tekinthető általánosítható tervezési szabálynak. Az $\dot{A}EM$ és az EEM számszerű értékei egyértelműen minősítik az adott diffúziós berendezés hatékonyságát. Miután rögzítik azt a berendezés hosszúságot, melyen az *egységnyi átalakulás* végbemegy. Különböző berendezésekre

és műveletekre az értékek 0,1-1,0 m nagyságrendben változhat. Ha arra gondolunk, hogy a beruházási, karbantartási és egyéb járulékos költségek a berendezés hosszával arányosak, világgossá válik az *ÁEM* és *EEM* üzemgazdasági szerepe is.

Az állandósult állapotú, stacionárius egyenáramú anyagátadási folyamatnak, amit a **137. ábra** szemléltet, az eredménye lehet az is, hogy a két kilépő fázisok koncentrációi egyensúlyba kerülnek. Ez a folyamat ebben az esetben egy *egyfokozatú* műveletet valósít meg és az egyensúlyi állapot a **138. ábra** a *T* pontnak felel meg. Az egyensúlynak egy tényleges fokozatban elérhető megközelítése a *fokozathatásfok*, amely különböző módon fejezhető ki. Így például a **138. ábra** alapján azzal, hogy a *QP* munkavonal távolság a *TP* munkavonal távolságnak hányad része. A leggyakrabban használt kifejezőmód az η fokozathatásfok. Ez olyan tört, amelynek számlálója az egyik fázis összetételének változása az adott fokozaton való áthaladás közben, nevezője pedig az összetétel változás, amely akkor következik be, ha ez a fázis egyensúlyban lenne a kilépő másik fázissal. A **138. ábra** megfelelően ez vagy az *E* fázisban, vagy az *R* fázisban levő koncentrációkkal fejezhető ki.

$$(2.81) \quad \eta_E = \frac{Y_2 - Y_1}{Y_2^* - Y_1}, \quad \eta_R = \frac{X_1 - X_2}{X_1 - X_2^*}$$

16.6.3. Szakaszos diffúziós folyamatok

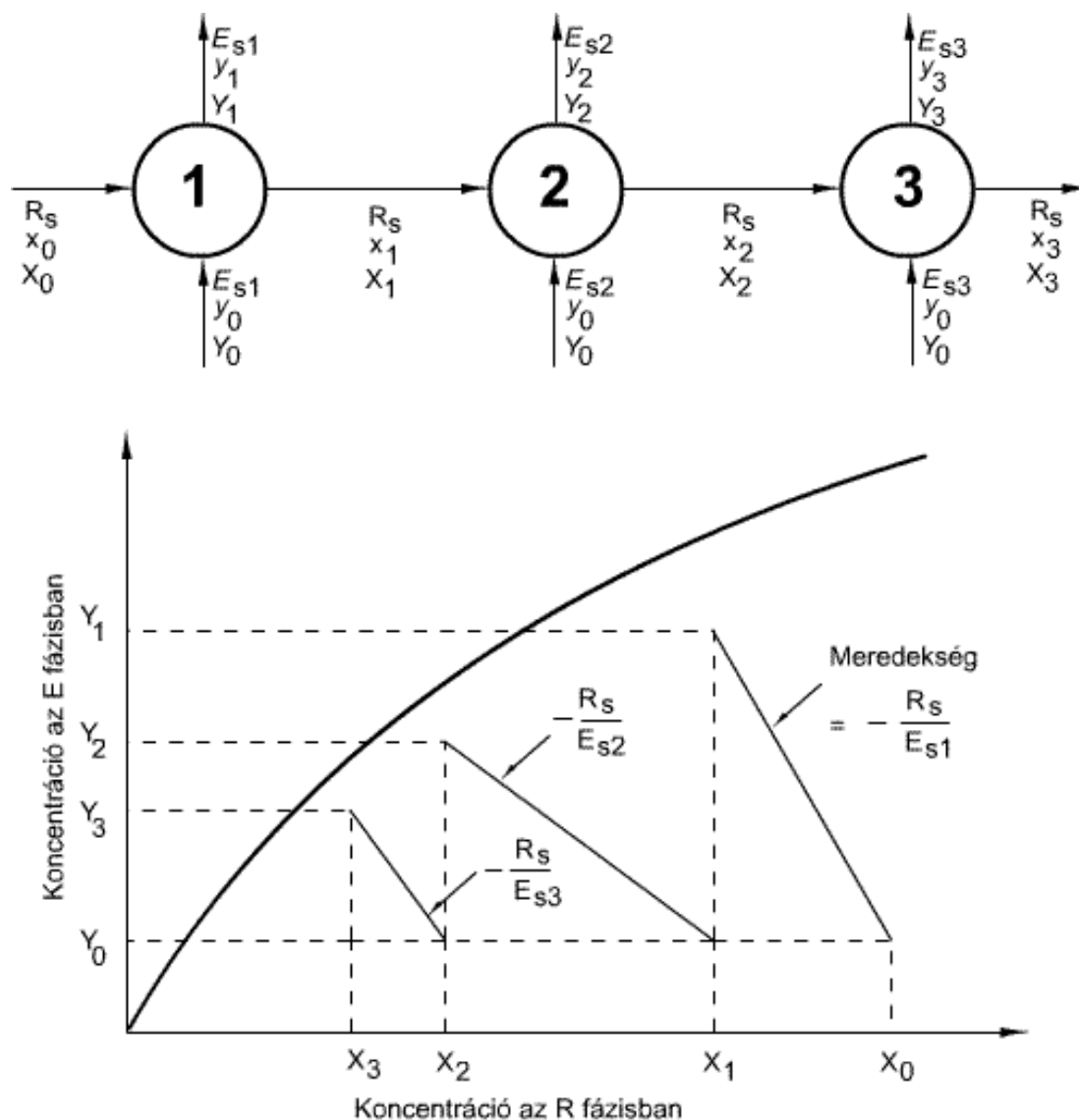
A *szakaszos* diffúziós műveletekre jellemző, hogy komponensre nézve zárt rendszert alkotnak. A fázisok nem áramlanak át a készüléken, a koncentrációk mindegyik fázison belül az idő függvényében változik. Kezdetben az érintkezésbe hozott fázisok nem egyensúlyi összetételűek, de egy bizonyos idő elteltével meg fogják közelíteni az egyensúlyi állapotot. A szakaszos műveletek anyagmérlegét az állandósult állapotú egyenáramú műveletekre vonatkozó anyagmérlegek (2.58) és (2.59) egyenletei írják le. Ezek az egyenletek a művelet kezdete után bármely időpontban a fázisokban levő *X* és *Y* koncentrációk között összefüggést adják. A **138. ábra** és **139. ábra** grafikusán mutatja be ezeket a koncentrációkat. Ezek az ábrákon a *T* pont adja azt a végső összetételt, amelyet az egyensúlyban nyerünk. A szakaszos művelet egy *egyfokozatú* műveletnek felel meg.

16.6.4. Kaszkádok

Az egyes egyensúlyi fokozatok egy csoportja, melyek kapcsolatban vannak, egymással kaszkádokat alkotnak. A kaszkádok kialakításának célja az anyagátadási folyamat hatékonyságának növelése az *egyfokozatú* folyamathoz képest. Tehát egy kaszkádban az elválasztás jobb, mintha azt egy fokozatban valósítanánk meg. Egy kaszkádban a folyamat hatékonyságát az elméleti – és az adott elválasztáshoz gyakorlatban szükséges kaszkádszám hányadosával jellemezzük. Két vagy több fokozat sorba kapcsolásával, a fázisok egymáshoz viszonyított árama szerint a műveletet megvalósíthatjuk egyenáramú, keresztáramú vagy ellenáramú üzemeltetési módban. Az egyenáramú üzemmód egyetlen fokozatnak felel meg, tehát ehhez az üzemmóddhoz nem szükséges kaszkádot kialakítani. Mindezek alapján a kaszkádokat kereszt áramban, vagy ellenáramban üzemeltetik.

16.6.4.1. Keresztáramú kaszkádok

A **144. ábra** egy kör reprezentál egy elméleti fokozatot, és minden fokozat felfogható a **143. ábra** bemutatott tökéletesen kevert üstnek, vagy egy egyenáramú fokozatnak.



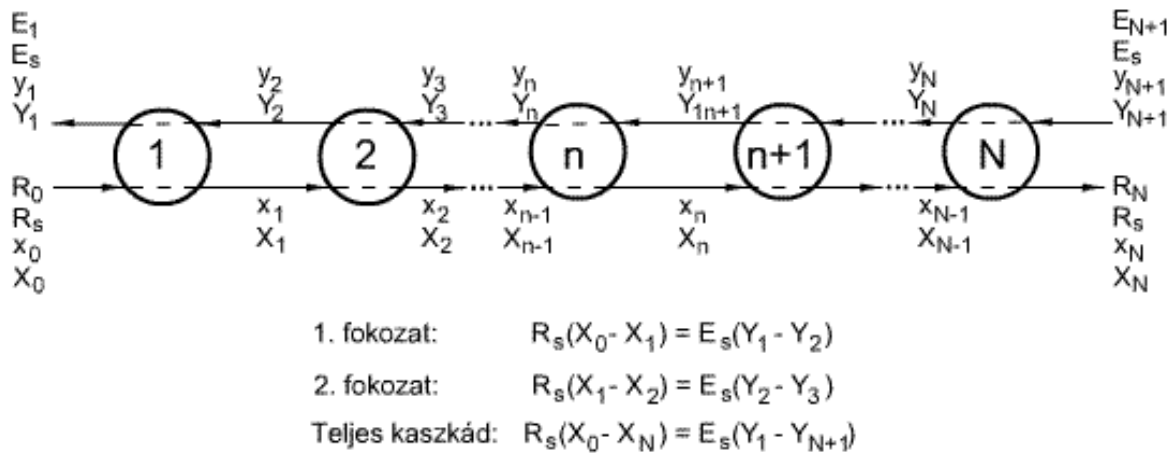
144. ábra: Három reális fokozat keresztáramú kaszkádja

Az R fázis áramlik az egyes fokozatból a következőbe, miközben minden fokozatban friss E fázissal kerül érintkezésbe. Az E fázisok térfogatáramai minden egyes fokozatban különbözőek lehetnek, és az egyes fokozatok hatásfokai is különbözhetnek. Az anyagszámot minden egyes fokozatra ki kell számolni, az egyensúlyi diagram természetesen adott. A keresztáramú műveletet használják néha az adszorpciónál, a kilúgozásnál, szárításnál és az extrakciónál, máshol ritkább esetekben.

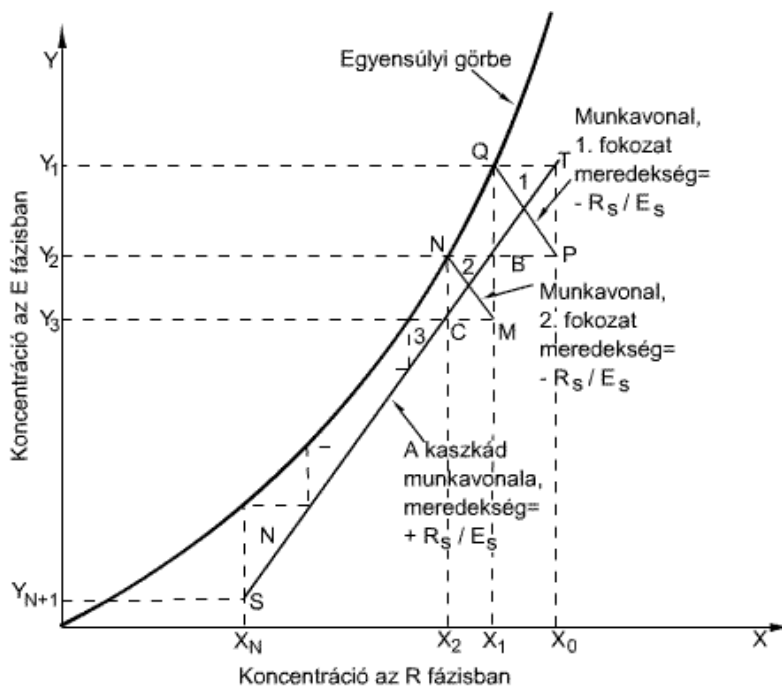
16.6.4.2. Ellenáramú kaszkádok

A kaszkádok között a leghatékonyabb elválasztást az ellenáramú kaszkádokban valósítható meg, illetve az adott szétválasztáshoz ebben az üzemmódban szükséges a legkevesebb kaszkádszám, ezért a kaszkádok üzemeltetésénél ezt az üzemmódot alkalmazzák a leggyakrabban. A 145. ábra egy N darab egyensúlyi egységből álló kaszkád látható. A kilépő áramok koncentrációi a fokozatok számozásának felelnek meg, így például az Y_2 a 2. fokozatot elhagyó E fázis koncentrációja, és így tovább. Mindegyik fokozat működése azonos a 138. ábra levő egyenáramú kolonna típusú, vagy a 143. ábra egy tökéletesen kevert üst működésével. Ugyanis mindkét berendezésből elvileg egymással egyensúlyban lévő fázisok léphetnek ki. Az egész kaszkádot pedig a 140. ábra ellenáramú folyamatának paramétereivel jellemezhetjük. Az ábrán

az első két fokozat egyenáramú munkavonal egyenlete a fokozatok alá van írva. Mivel mindegyik fokozat ideális a kilépő fázisok egyensúlyban vannak, az Y_2 egyensúlyban van az X_2 -vel és így tovább. Az összefüggéseket grafikusán a **145. ábra** mutatja.



145. ábra: Többfokozatú ellenáramú kaszkád



146. ábra: Ellenáramú többfokozatú kaszkád, átadás az R fázisból az E fázisba

A PQ egyenes az 1. fokozat munkavonala, az MN a 2. fokozaté, és így tovább. Az X_1 és Y_1 koordináták az egyensúlyi görbére esnek, mivel a fokozat ideális, ezért az olyan pontok, mint a Q vagy az N az ábrán a fokozat kilépő áraminak koncentrációit jelentik. Az ST egyenes a (2.61) vagy a (2.64) egyenlet, az egész kaszkád (fokozatsorozat) munkavonala, és az olyan pontok, mint B , C , egészen S -ig a kaszkád valamely szintjén vagy metszetében levő összetételt jelképezik a **146. ábra**. A B pont a nem egyensúlyban levő, a fokozatok között egymás mellett elhaladó ezért a munkavonalon levő, a 2-es és az 1-es fokozatokba belépő fluidum áramok X_1 és Y_2 koncentrációit, a C pont a 3-as és a 2-es fokozatokba belépő X_2 és Y_3 koncentrációkat és így tovább, jelöl. A kaszkád munkavonala és az egyensúlyi görbe közötti $TQBNCS$ zezugos vonal megrajzolásával meghatározhatjuk az ellenáramú folyamathoz szükséges ideális fokozatok számát. Ha az egyensúlyi görbe és a kaszkád munkavonala valahol érintkezik, a

lépések sűrűsödnek, és a kívánt összetétel változás eléréséhez végtelen számú lépésre lenne szükség.

16.6.5. Fokozatok és anyagátviteli sebességek.

Az előzőekből kitűnik, hogy mindegyik folyamat vizsgálható mind a jelképező fokozatok számával, mind a megfelelő anyagátviteli sebességek alapján. Például a szakaszos vagy a folyamatos változást az egyenáramú folyamatok megismétlésével lehet elérni, amikor az első fokozatból kilépő fázisok egyikét friss kezelőfázissal újra érintkezésbe hozzuk. Hasonlóképpen ellenáramú, többfokozatú kaszkádot is lehet alkalmazni. Ha az ellenáramú műveletet folytonos érintkeztetéssel valósítjuk meg, a fázisok ismételt elkülönítése és újraérintkeztetése nélkül, még mindig le lehet írni a műveletet a vele egyenértékű fokozatszámok segítségével. Azonban az ilyen esetekre jellemző differenciális összetétel változások miatt helyesebb ezeket a műveleteket az átlagos anyagátadási együtthatókkal vagy ezekkel egyenértékű kifejezésekkel jellemezni. Az ideális fokozatok számának kiszámításához az egyensúlyi és az anyagmérleg összefüggések szükségesek.

17. Gáz- folyadék rendszerek közötti anyagtranszport, gáz abszorpció és deszorpció

Gázok nedvesítése, nedvességelvonás gázokból, gázabszorpció, gáz deszorpció közös követelménye egy gáz- és egy folyadékfázis érintkeztetése abból a célból, hogy a fázisok között diffúziós anyagátmenet jöjjön létre. A nedvesítésnél a folyadék tiszta anyag, koncentráció különbség és az anyag diffúziója csupán a gázfázisban jön létre. Az abszorpciónál koncentráció különbség van mind a folyadék-, mind a gázfázisban, és legalább egy komponens diffúziója mindkettőben előfordul. A felsorolt műveletek közül a környezetvédelem szempontjából nagy jelentőséggel bíró gázok abszorpciójával és deszorpciójával foglalkozunk.

A gázabszorpció egy elválasztási művelet, amelyben a gázelegyet folyadékkal, (abszorbenssel) érintkeztetjük abból a célból, hogy a gáz egy vagy több komponensét folyadékfázisba vigyük át. A gázelegy egy vagy több komponensét abszorbenssel kioldjuk a gázfázisból, és a folyadékfázisban ezek a komponensek egy oldatot alkotnak. Az iparban az abszorpciós folyamatot elsősorban gázelegyek értékes komponenseinek kinyerésére vagy a gázelegyek szennyeződéseitől való megtisztítására használják. Például egy kokszkemencében a melléktermékként keletkező gázból az ammóniát vízzel abszorbeálják, majd olajjal a benzol- és toluol gőzöket. A nemkívánatos kénhidrogént akár ebből a kocsz gázból, akár a földgázból, akár a természetes szénhidrogéngázokból különböző lúgos oldatokkal mossák ki, amikor a kénhidrogén a folyadékfázisban elnyelődik. A gázárammal elvitt értékes oldószergőzöket újrahasznosítás céljára vissza lehet nyerni, ha a gázt az olajgőzök számára alkalmas oldószerrel mossák. A környezetvédelemben, különösen a levegőtisztaság védelem területén a mérgező gázkomponensek levegőbe kerülésének megakadályozására (például sósav gáz, kénhidrogén, ammónia stb.) abszorpciót alkalmaznak. Az abszorpciónak két fajtája van. a fizikai és a kémiai abszorpció (kemoszorpció). A kemoszorpciónál az elnyelődött komponens az abszorbenssel kémiai vegyületet képez. Ezekben a műveletekben anyagátadásra van szükség a gázáramból a folyadékba. A fizikai abszorpció az esetek többségében megfordítható. Ha az anyagátadás az ellenkező irányban megy végbe, azaz a folyadékból a gázba, a művelet neve deszorpció vagy kihajtás. Az abszorpció és a deszorpció összekapcsolása lehetővé teszi az abszorbens többszöri felhasználását, és az abszorbeált komponens kinyerését tiszta anyag formájában. Például a benzolt és toluolt úgy távolíthatjuk el a fent említett abszorpciós olajból, hogy azt vízgőzzel hozzuk érintkezésbe, aminek következtében a vízgőz elviszi az oldószergőzöket és az abszorpciós olajt ismét felhasználhatjuk. Az abszorpció és deszorpció alapelvei lényegileg azonosak, és a két műveletet együtt tanulmányozhatjuk.

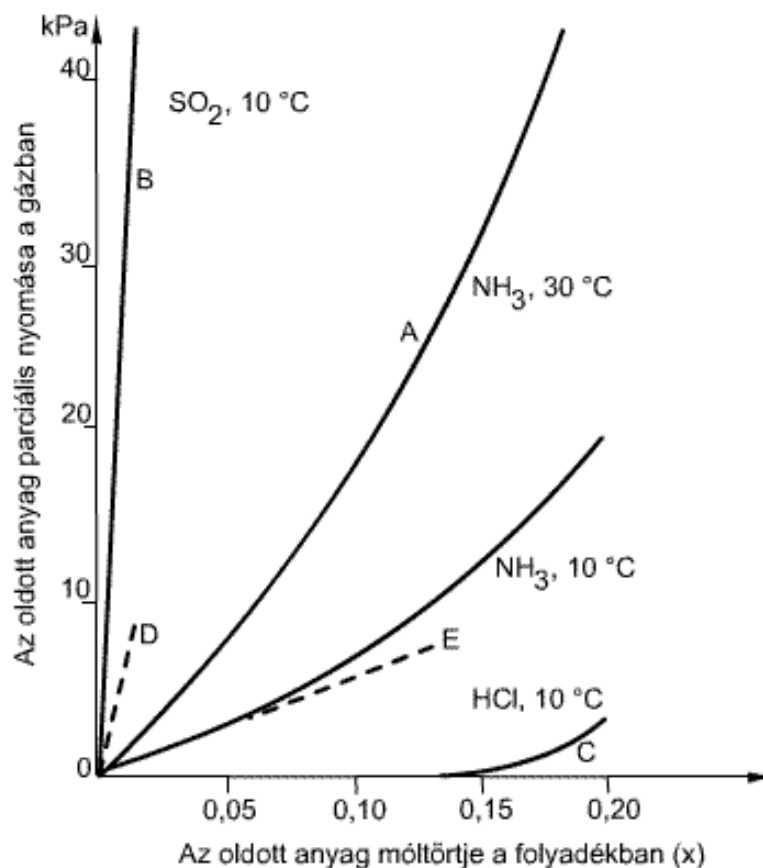
17.1. Gázok egyensúlyi oldhatósága folyadéokban

Az a sebesség, amellyel valamely gázelegy egyik komponense oldódik az abszorbeáló folyadékban, az egyensúlytól való eltéréstől függ és ezért tárgyalnunk kell a gáz-folyadék rendszerek egyensúlyi jellemzőit.

17.1.1. Kétkomponensű rendszerek

Képzeld el, egy zárt tartályt például egy autoklávot, amiben egy tiszta gázt és egy tiszta, viszonylag nem illékony folyadékot engedünk, amiben a gáz könnyen oldódik. Az autokláv el van látva nyomásmérővel és belső csőspirállal, amellyel a hőmérsékletet a készülékben állandó értéken tudjuk tartani. Mérjük a gáz nyomását, és a hőmérsékletet állandó értéken tartjuk. A gáz molekulái behatolnak a folyadékba, oldódnak, miközben a gáz nyomása csökken, és végül

az egész folyadék fázis koncentrációja azonossá válik. A gáz molekulái az oldat elhagyására is törekszenek és visszalépnek a gázfázisba olyan sebességgel, amint a gáz koncentrációja az oldatban növekszik, míg végül az oldat által kifejtett gáznyomás csökkenése megáll és konstans értékű lesz. Ettől kezdve az oldat koncentrációja nem változik tovább, és beáll a gáz- és folyadékfázisok között *a dinamikus egyensúly*. Ekkor a gáz koncentrációját az oldatban, az *adott nyomáson és hőmérsékleten*, a gáz folyadékban való oldhatóságának nevezzük. Ha most újabb tiszta gáz bevezetésével a nyomást növeljük, a gáz tovább fog oldódni, míg az új egyensúlyt el nem érjük, ezúttal nagyobb koncentrációban lesz jelen a folyadékfázisban. Így meghatározhatjuk a gáz koncentrációját vagy oldhatóságát és a megfelelő nyomást, és ezeket az adatokat a **147. ábra** grafikusán ábrázoljuk az A görbe az ammónia vízben való egyensúlyi oldhatóságának egy részét mutatja 30 °C-on.



147. ábra: Gázok oldhatósága vízben

A különböző gázok és folyadékok egyedi oldhatósági görbéket adnak, amelyeket minden rendszerre az esetek többségében kísérletileg kell megállapítani. Ha a gáz egyensúlyi nyomása az adott folyadékkoncentráció mellett nagy, mint a **147. ábra** a B görbe, akkor a gázt a folyadékban viszonylag oldhatatlan. Ha a gáz egyensúlyi nyomása kicsi, a C görbe, akkor az oldhatóság nagy. De ez csak egy relatív értelmezés, mert elegendően nagy nyomás alkalmazásával a folyadékban bármely végső gázkoncentrációt elő lehet állítani, mert a gáz cseppfolyósodott állapotában tökéletesen oldható a folyadékban. Minden gáz oldhatóságát a van't Hoff törvény szerint befolyásolhatjuk a hőmérséklettel. Ha az egyensúlyban levő rendszer hőmérsékletét emeljük, olyan változás következik be, amely hőt fogyaszt. A gáz oldódása rendszerint, hő fejlődéssel jár, és ebből következik, hogy a legtöbb esetben a gáz oldhatósága csökken a hőmérséklet emelésével. Például a **147. ábra** az A ammónia-víz görbe 30 °C-on a 10 °C-nak megfelelő görbe fölött fekszik. Az oldószer forráspontján, feltéve, hogy gőznyomása kisebb, mint a gázé vagy az oldott gőzé, a gáz oldhatósága zérus lesz.

17.1.2. Többkomponensű rendszerek

Ha gázok elegyét hozzuk érintkezésbe folyadékkal, bizonyos feltételek mellett az egyes gázok egyensúlyi oldhatósága független lesz a többitől feltéve, ha az egyensúlyt a gázelegyben a *parciális nyomásokkal* fejezzük ki. Ha a gáz összes komponensei egy kivételével gyakorlatilag oldhatatlanok, ezek koncentrációja a folyadékban olyan kicsi lesz, hogy nem befolyásolják a viszonylag jól oldódó komponens oldhatóságát, és az általánosítás alkalmazható. Például a **147. ábra** az *A* görbe akkor is ábrázolja az ammónia vízben való oldhatóságát, ha az ammóniát levegő hígítja, mivel a levegő alig oldódik vízben, feltéve, ha a diagram ordinátáját úgy tekintjük, mint az ammónia parciális nyomását a gázelegyben. Ez egy fontos megállapítás, mert így az oldhatósági adatok összegyűjtésére irányuló kísérleti munka jelentősen csökkenthető. Az általánosítás csak akkor alkalmazható, ha az elegy több komponense jelentékeny mértékben oldódik, és az oldott gázok közömbösek a folyadék minőségével szemben, ami csak ideális oldatok esetében áll fenn. Például propán- és butángáz elegye egymástól függetlenül oldódik a nem illó paraffinolajban, mert a keletkező oldat lényegileg ideális. Ezzel szemben az ammónia oldhatóságát a vízben befolyásolhatjuk metil-amin jelenlétével, mert e gázok keletkező oldata nem ideális. A gáz oldhatóságát ugyancsak befolyásolja a nem illó oldott anyag jelenléte a folyadékban, mint például sók vizes oldatában, feltéve ha ezek az oldatok nem ideálisak.

17.1.3. Ideális oldatok

Ha a folyadékfázist ideálisnak tekinthetjük, a gáz egyensúlyi parciális nyomását kiszámíthatjuk az oldatból anélkül, hogy kísérleti meghatározáshoz kellene végeznünk. Az ideális oldatoknak négy fontos, egymással összefüggő tulajdonsága van:

1. Az oldatban a vonzás és taszítás átlagos intermolekuláris erői változatlanok maradnak az alkotórészek elegyítésekor.
2. Az oldat térfogata lineárisan változik az összetétellel.
3. Az alkotórészek elegyítésekor sem hő elnyelés, sem hő fejlődés nem mutatkozik. A gázok folyadékban való oldódásának esetében azonban ez a kritérium nem foglalja magában a gáz folyékony állapotba való kondenzációjának latens hőjét.
4. Az oldat teljes gőznyomása lineárisan változik a mól törtben kifejezett összetétellel.

A valóságban nincsenek ideális oldatok, és a valódi oldatok csak megközelítik az ideális állapotot, mint határt. Az ideális állapot azt kívánná, hogy a komponensek molekulái méret, szerkezet és kémiai összetétel szempontjából hasonlóak legyenek. Gyakorlatilag azonban sok oldat majdnem ideális, mert a gyakorlatban ilyenek tekinthetjük őket. Ebbe a kategóriába tartoznak főleg a szerves vegyületek homológ sorainak szomszédos vagy majdnem szomszédos tagjai, így például benzolnak toluolban, etil- és propil-alkohol- vagy paraffin-szénhidrogén gázoknak paraffinolajokban, mint oldószerben levő oldatait ideális oldatoknak tekinthetjük.

Rault törvénye szerint, ha az ideális oldattal egyensúlyban levő gázelegy követi az ideális gáztörvényt is, az oldott *A* gáz p_A^* parciális nyomása egyenlő ugyanezen a hőmérsékleten vett gőznyomásának, P_A^o , és az oldatban levő *x* móltörtjének szorzatával.

$$(3.1) \quad p_A^* = P_A^o x_A$$

Az oldószerfolyadék minősége csak olyan fokig jut szerephez, amennyiben megalapozza az oldat ideális állapotát, és ebből következik, hogy valamely oldószer ideális oldatában való oldhatósága mindig ugyanaz. Ha az összes nyomás olyan nagy, hogy az ideális gáztörvény már nem alkalmazható, Raoult törvényét gyakran használhatjuk a fugacitásokkal, amelyeket a nyomás kifejezésébe helyettesítünk

17.1.4. Nem ideális oldatok

A nem ideális oldatokban, a (3.1) egyenlet hibás eredményt ad. Például a **147. ábra** a *D* vonal a vizes oldattal egyensúlyban levő ammónia számított parciális nyomása 10 °C-on feltételezve, hogy Raoult törvénye alkalmazható, ekkor nem kapunk valódi adatokat. Másrészt az *E* egyenes vonal jól írja le 10 °C-on az ammónia-víz adatokat a folyadék 0,06 móltört értékéig. Az ilyen vonal egyenletét a Henry törvény adja meg:

$$(3.2) \quad p_A^* = Hx_A$$

ahol *H* Henry állandó. Látható, hogy különböző *H* értékekkel alkalmazható az ábrán feltüntetett minden gázra, legalábbis a kis folyadék koncentrációk tartományában. Széles koncentráció tartományban eltérést okoz a Henry-törvénytől a folyadékkal való kémiai reakció vagy elektrolitikus disszociáció, mint az ammónia-víz esetében. Eltérést okoz a gázfázis nem ideális volta is. A kevésbé oldható gázok, mint például nitrogén vagy oxigén vízben, várható módon követik a törvényt egészen a légköri 1,01325 · 10⁵ Pa egyensúlyi parciális nyomásig. A kritikus hőmérsékletük alatt a gőzök is általában követik a Henry törvényt az adott hőmérséklethez tartozó telítési nyomásnak körülbelül 50%-ig feltéve, hogy a folyadékban nincs kémiai reakció. A *H* értékét minden esetben kísérletileg kell meghatározni. A Henry-állandó függ az abszorbens és a gáz tulajdonságaitól, a hőmérséklettől, de független a nyomástól. A **7. táblázat** néhány gáz Henry állandóit tüntették fel

7. táblázat: Néhány gáz Henry állandói vízben (H×10⁻⁴)

T(°C)	CO ₂	CO	C ₂ H ₆	C ₂ H ₄	He	H ₂	H ₂ S	CH ₄	N ₂	O ₂	SO ₂
0	0,073	3,52	1,26	0,552	12,9	5,79	0,0268	2,24	5,29	2,55	-----
10	0,104	4,42	1,89	0,768	12,6	6,36	0,0367	2,97	6,68	3,27	-----
20	0,142	5,36	2,63	1,02	12,5	6,83	0,0483	3,76	8,04	4,01	0,0014
30	0,186	6,20	3,42	1,27	12,4	7,29	0,0609	4,49	9,24	4,75	0,0016
40	0,233	6,96	4,23	-----	12,1	7,51	0,0745	5,20	10,4	5,35	-----

$p_A^* = Hx_A$, $p_A^* = A$ komponens parciális nyomása atm -ban. $x_A = A$ komponens móltörtje, *H*=Henry állandó atm vagy Pa mértékegységben. Például az O₂ Henry állandója 30 °C-on $H = 4,75 \cdot 10^4 \text{ atm} = 4,813 \cdot 10^9 \text{ Pa}$.

Ha a (3.2) egyenlet mindkét oldalát elosztjuk a p_0 összes nyomással, akkor a Dalton törvény értelmében:

$$(3.3) \quad y_A^* = \frac{p_A^*}{P} = \frac{H}{P} x_A = H' x_A$$

A Biner (A és B) gázelegy folyadékban való oldása esetén (a fázisok közt megoszló komponens A, a hordozó B) két fázis lép kölcsönhatásba, tehát a fázisok száma *f* = 2. A komponensek száma: *K*=3. A rendszer szabadsági foka:

$$(3.4) \quad S_z = K + 2 - F = 3 + 2 - 2 = 3.$$

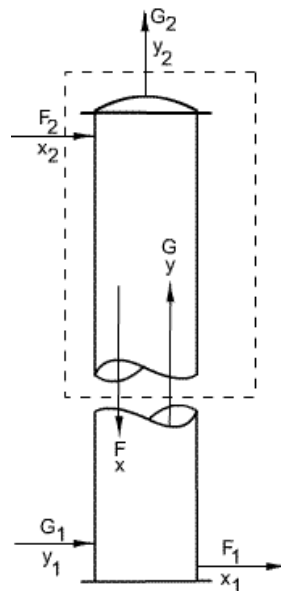
Az abszorpciónál a változó paraméterek a hőmérséklet, a nyomás, valamint a két fázis koncentrációja. Ebből az következik, hogy egyensúlyi állapotban adott hőmérséklet és összes nyomás mellett az egyik fázis koncentrációja, például a gázfázisban a megoszló komponens parciális nyomása egyértelműen meghatározza a másik fázis, jelen esetben a folyadék koncentrációját. Ezt fejezik ki a Raoult- és a Henry törvények.

17.2. Az abszorpció anyagmérlege

Az anyagmérleg az anyagmegmaradás elvén alapszik és a munkavonal egyenletét írja le. Ellenáramú- és egyenáramú illetve egyfokozatú abszorpciónál a munkavonalak különböznek.

17.2.1. Ellenáramú folytonos abszorber anyagmérlege.

A **148. ábra** egy ellenáramú abszorpciós tornyot tüntet fel, amely lehet akár töltelékessé vagy permetező-torony, lehetnek benne bármely olyan belső szerkezet, amely előidézi a folyadék és gáz érintkezését.



148. ábra: Ellenáramú abszorpciós kolonna

A teljes gázáram áramsűrűsége a torony valamely tetszőleges pontjában G (mol/m^2s), amely az A diffundáló anyagból y (moltört, p_A parciális nyomás) vagy Y (molarány) és a nem diffundáló, az oldószerben gyakorlatilag oldhatatlan G_S (mol/m^2s) vivő gázból tevődik össze. Ezek között az összefüggés:

$$(3.5) \quad Y = \frac{y}{1-y} = \frac{p}{p_\delta - p}$$

$$(3.6) \quad G_S = G(1-y) = \frac{G}{1+Y}$$

Hasonlóképpen a teljes folyadékáram áramsűrűsége, F (mol/m^2s) amelyben az oldódó gázt x (moltört vagy X molarány) jellemzi és amely F_S (mol/m^2s) gyakorlatilag nem illékony oldószert tartalmaz.

$$(3.7) \quad X = \frac{x}{1-x}$$

$$(3.8) \quad F_S = F(1-x) = \frac{F}{1+X}$$

Tehát az A anyag egy része a gáz fázisban van Y molarány (A anyag móljainak száma/inert gáz móljainak száma) koncentrációban, illetve a folyadékfázisban X molarány (A anyag móljainak száma/oldószer móljainak száma) koncentrációban. Mivel a vivő (inert) gáz és a folyadék oldószer mennyisége, mialatt áthaladnak a tornyon, lényegileg változatlanok maradnak, célszerű az anyagmérleget, ezekkel kifejezni. Az oldott anyag mérlege a torony felső részén egy tetszőleges magasságban:

$$(3.9) \quad G_S(Y - Y_2) = F_S(X - X_2)$$

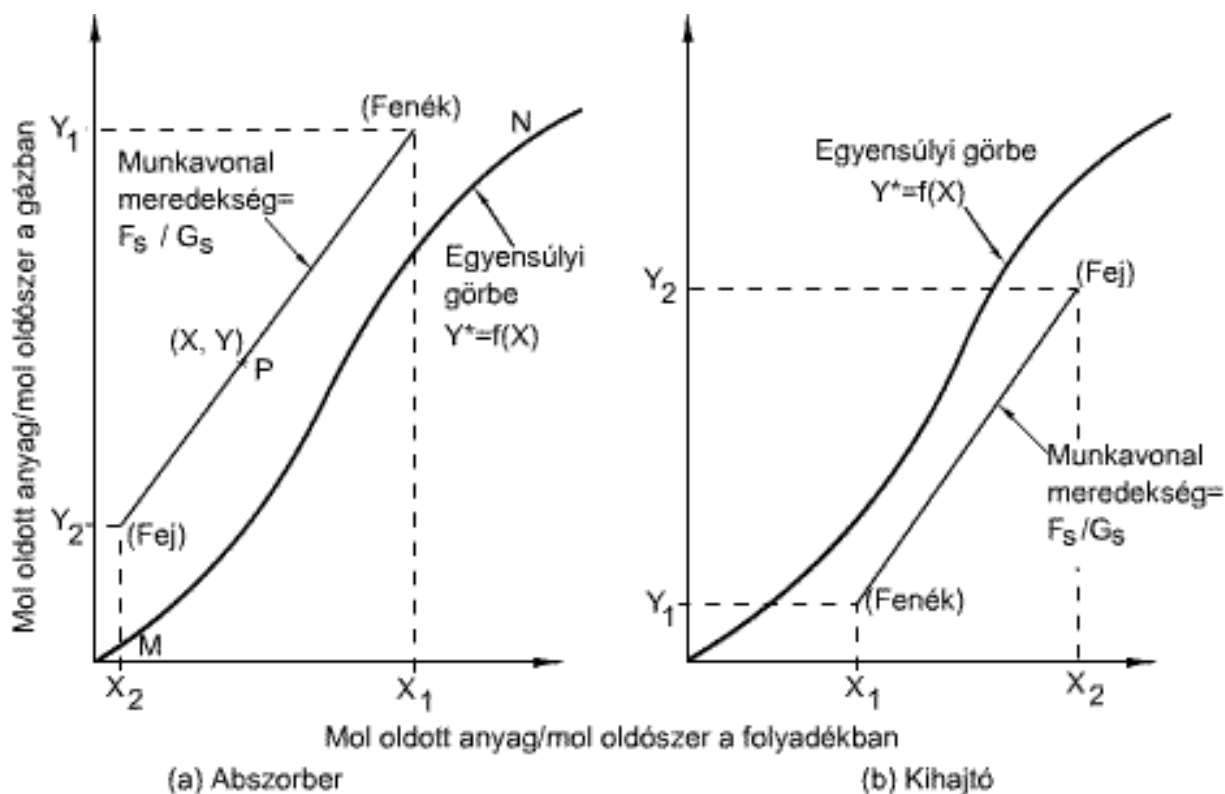
és az egyenes egyenlete

$$(3.10) \quad Y = \frac{F_S}{G_S} X + Y_2 - \frac{F_S}{G_S} X_2$$

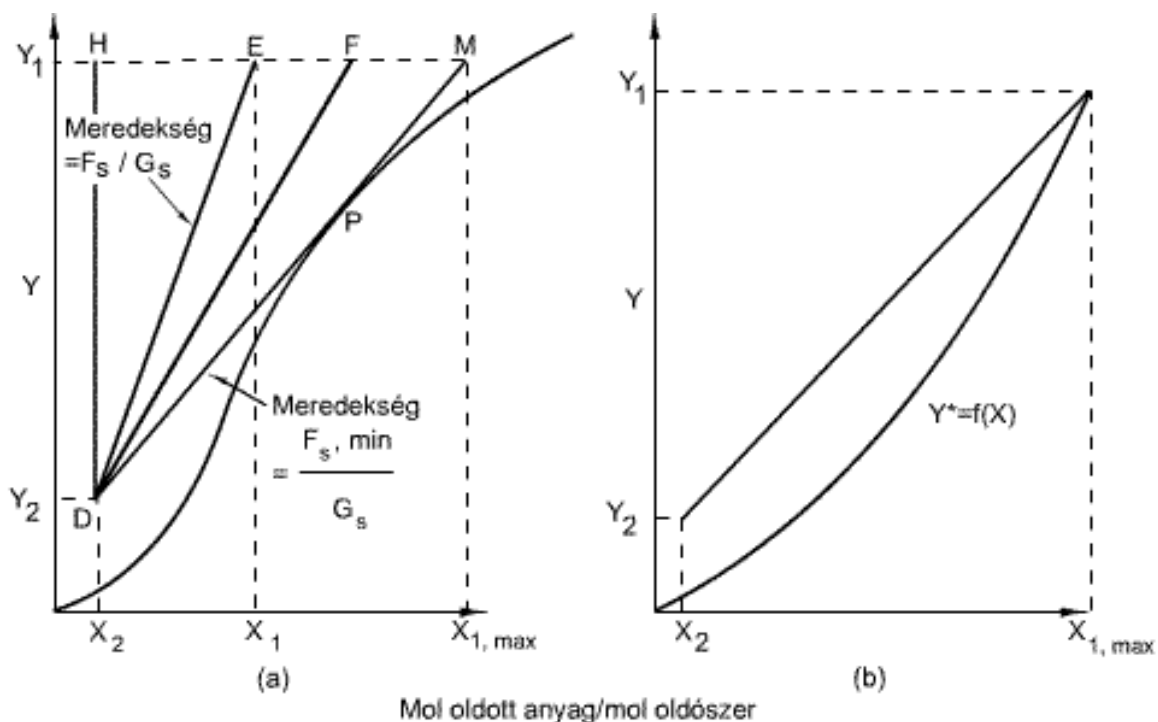
A (3.10) egyenlet az X , Y koordinátarendszerben egy egyenes, amit munkavonal egyenletének nevezünk, iránytangense L_S/G_S , és amely átmegy az (X_2, Y_2) ponton. Ha X_1 és Y_1 értéket helyettesítjük X és Y helyébe, az egyenes átmegy az (X_1, Y_1) pontokon. Ezt mutatja abszorber esetére a **149. ábra**. Ez az egyenes ábrázolja a folyadék és gáz koncentrációinak összefüggését a torony bármely keresztmetszetében, mint például a P pontban. Az oldott gáz egyensúlyi oldhatósági adatait a folyadékban (oldószerben) ugyanezekben a koncentráció egységekben, ugyanezen a diagramon is ábrázolhatjuk. Ilyen az MN görbe, melynek minden pontjában a gáz koncentrációja, bizonyos helyi koncentrációjú és hőmérsékletű folyadékkal van egyensúlyban. Az abszorber esetében, ahol az anyag átadása a gázból folyadékba történik, a munkavonal mindig az egyensúlyi görbe *fölött* van, míg a kihajtó (sztrippelő) kolonna esetében, ahol az anyagátadás a folyadékból a gázba történik, a vonal mindig az egyensúlyi görbe *alatta van*, amint az a **149. ábra** látható.

A munkavonal egyenes, ha molarány egységekben ábrázoljuk. Mól törtek vagy parciális nyomások alkalmazása esetén a vonal lehet görbe is.

Az abszorberek tervezése illetve üzemeltetése alkalmával adottnak tekintjük a G vagy G_S gázmennyiséget, az Y_1 és Y_2 a belépő és kilépő gázkoncentrációkat és a belépő folyadék X_2 koncentrációját. Ezeket az adatokat az eljárás követelményei rögzítik, de az alkalmazandó F vagy F_S folyadékmennyiség szabadon választható. Tekintsük a **150. ábra**. A munkavonalnak át kell mennie a D ponton, és az Y_1 ordináta magasságában kell végződnie.



149. ábra: Az abszorpciós- és a kihajtó kolonna munkavonalai



150. ábra: Minimális folyadék-gáz arány

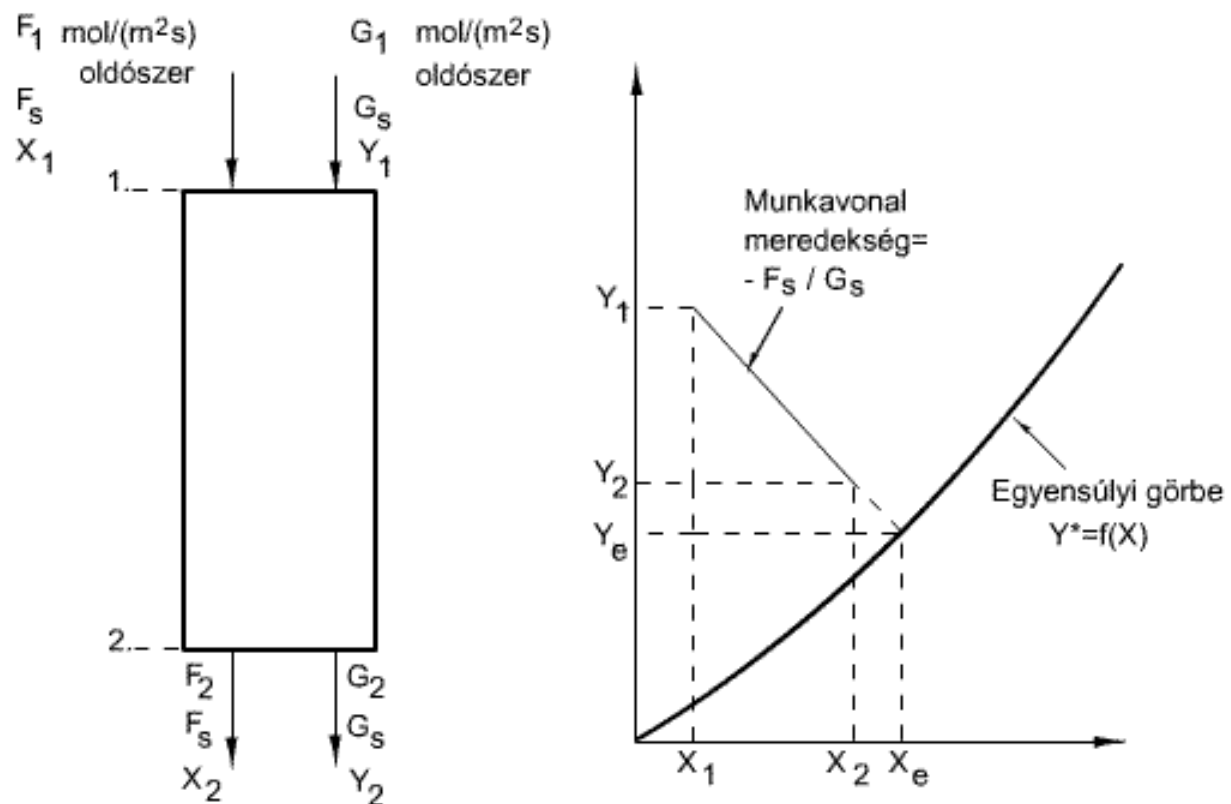
Ha olyan folyadék mennyiséget használunk, amely a DE munkavonalat adja, a kilépő folyadék összetétele X_1 lesz. Ha kevesebb folyadékot használunk, a kilépő folyadék összetétel nagyobb lesz, például az F pontbeli összetétel. Mivel a diffúzió hajtóereje kisebb, a gáz és a folyadék érintkezési idejének nagyobbak kell lennie, és ennek megfelelően magasabb abszorberre van szükség. Az alkalmazható minimális folyadék mennyiség megfelel a DM munkavonalnak, amelynek az egyensúlyi görbével találkozó munkavonalak közül a legnagyobb az

iránytangense és amely P pontban érinti a görbét. A P pontban a diffúzió hajtóereje zérus, a folyadékarány (F_s/G_s) minimális. A kívánt koncentrációváltozáshoz szükséges érintkezési idő végtelen, ez végtelen magas tornyot eredményezne, ami a folyadék-gáz arány egyik határértékét jelenti. Az egyensúlyi görbe gyakran felfelé konkáv, amit a **150. ábra** láthatunk, és a minimális folyadék-gáz arány ekkor olyan kilépő folyadék koncentrációnak felel meg, amely a belépő gázzal egyensúlyban van. Ekkor is végtelen magasságú oszlopra lenne szükség. Amennyiben az abszorbens áramát végtelen nagyra növelnénk, a folyadékarány (F_s/G_s) végtelen nagy lenne, az abszorbens koncentrációja az abszorpció során nem változik, $X_2 =$ állandó, és a munkavonal párhuzamos az Y tengellyel. A folyamat hajtóereje maximális, és ebben az esetben minimális magasságú oszlopra lenne szükség, ami a folyadék-gáz arány másik határértékét jelenti. Egy reális abszorpciós kolonna a minimális és a maximális folyadékarány közötti optimális folyadékarány környezetében üzemel. Az optimális folyadékarányt a minimális folyadékarány 1,2-1,5 szeresével szokták megadni. Abszorpciónál igen gyakran 1,5-es szorzót alkalmaznak.

Ezek az alapelvek alkalmazhatók a kihajtásra is, ahol az a munkavonal, amely valahol találkozik az egyensúlyi görbével, a maximális folyadék-gáz arányt és a minimális kilépő folyadék koncentrációt ábrázolja.

17.2.2. Egyenáramú folytonos és az egyfokozatú abszorpció anyagmérlege

A **151. ábra** egy egyenáramú abszorber látható. Ez az abszorber működés szempontjából lehet egyenáramú folytonos, vagy egy fokozatú (kevert üstben, vagy buboréksapkás tányéron) megvalósított abszorpció, mivel elvileg mindegyik eljárásnál beállhat a gáz-folyadék egyensúly.



151. ábra: Egyenáramú abszorber

Ha a gáz és folyadék egyenáramban áramlik, a munkavonal egyenlete:

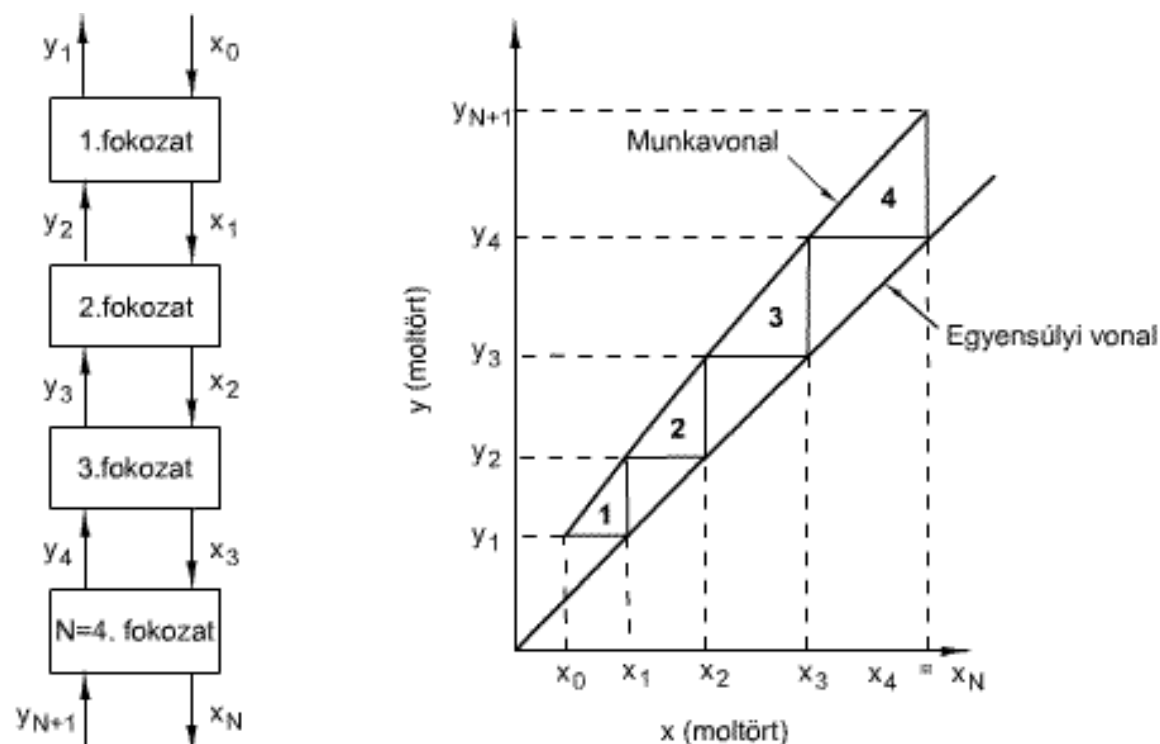
$$(3.11) \quad G_S(Y - Y_2) = F_S(X_2 - X)$$

$$(3.12) \quad Y = -\frac{F_S}{G_S} X + Y_2 + \frac{F_S}{G_S} X_2$$

A (3.12) egyenletből kitűnik, hogy a munkavonal iránytangense $-F_S/G_S$ negatív. Ennek az aránynak nincs határértéke, de a végtelen magasságú torony egymással egyensúlyban levő folyadék- és gázkilépést eredményezne, mint (X_e, Y_e) pontban. Az egyenáramú folytonos abszorpció alkalmazása nem gyakori. Ugyanez vonatkozik a kevert terekben lejátszódó abszorpcióra is. Ha a keveredés elég intenzív, a fajlagos felület nagy, és elegendően hosszú idő áll rendelkezésre, akkor elvileg beáll az egyensúly.

17.3. Az elméleti fokozatok számának meghatározása

Az abszorpció megvalósítható ellenáramú többfokozatú készülékekben, kolonnákban és más hasonló készülékekben. A készülékben a folyadék és gáz fokozatonkénti érintkezése jön létre, ezért ezek a berendezések ellenáramú többfokozatú kaszkádok. Ha a már említett kolonna buboréksapkás torony, akkor minden egyes tányéron a gáz és a folyadék bensőséges érintkezését a buborék sapkák segítségével hozzuk létre, majd elválasztjuk a folyadék- és a gázáramot egymástól, a **152. ábra** hasonló módon és így a tányér alkotja a fokozatot.



152. ábra: Ellenáramú többfokozatú abszorpció

A buboréksapkás tányéros kolonna alkalmas arra, hogy önkényesen választott standardnak tekintsük a tervezésben és a valódi tányérok teljesítőképességének mérésében, tekintet nélkül működési elvükre.

17.3.1. Elméleti tányérszám grafikus meghatározása

Ebből a célból definiáljuk az *elméleti*- vagy *ideális* tányért úgy, hogy az arról távozó összes gáz átlagos összetétele egyensúlyban van a távozó folyadék átlagos összetételével. A **152. ábra** feltüntetett abszorber esetében minden egyes tányérnak megfelelő folyadék- és gázösszetételt megjelöltünk. Például a 3. ideális tányér a folyadék összetételét x_2 -től x_3 -ig és a gázösszetételét y_4 -től y_3 -ig változtatja meg. A lépcsők ezért az ideális tányérokot képviselik a 3.6.b. diagramon, minél közelebb van a munkavonal az egyensúlyi görbéhez, annál több lépcsőre van szükség. Ha a két görbe bármely, minimális F_S/G_S (a koncentrációk X és Y molarányok), illetve F/G (a koncentrációk x és y mólfrakciók), aránynak megfelelő pontban elérné egymást, a lépcsők és tányérok száma végtelen lenne. A lépcsők egyformán jól szerkeszthetők, bármilyen koncentrációegységgel rajzoljuk meg a diagramot, például móltörttel vagy parciális nyomással. A szerkesztés a kihajtásra is ugyanaz, természetesen azzal a módosítással, hogy a munkavonal az egyensúlyi görbe alatt fekszik.

17.3.2. Elméleti tányérszám analitikus meghatározása

Azokban az esetekben, amelyekben mind a munkavonal, mind az egyensúlyi görbe egyenes vagy egyenesnek tekinthető, az elméleti tányérok számát grafikus módszer mellett analitikusan is meghatározhatjuk. Ez gyakran előfordul a viszonylag híg gáz- és folyadékkeverékek esetében. Henry törvényét gyakran alkalmazzák híg oldatokra. Ha az elnyelt gáz mennyisége kicsi, az abszorberbe belépő és onnan távozó teljes folyadék mennyiség gyakorlatilag állandó marad, $F_1 = F_2 = F_n = F$ (összesmol/m²s), és hasonlóképpen közel konstans a teljes gázmennyiség is G (mol/m²s). Ekkor a mólfrakcióval ábrázolt munkavonal egyenes lesz. A 3.6. ábrán feltüntetett abszorber I tányérjának anyagmérlege

$$(3.13) \quad G(y_2 - y_1) = F(x_1 - x_0)$$

A Henry törvény $y_1 = m x_1$ egyenletéből az x_1 -et behelyettesítjük a (3.13) egyenletbe

$$(3.14) \quad G(y_2 - y_1) = F \left(\frac{y_1}{m} - x_0 \right)$$

A (3.14) egyenletet y_1 -re megoldjuk:

$$(3.15) \quad y_1 = \frac{y_2 + Amx_0}{1 + A} = \frac{y_2(A - 1) + Amx_0(A - 1)}{A^2 - 1}$$

ahol $A = F/mG$ hányadost abszorpciós faktornak nevezzük.

Hasonlóképpen járunk el a 2. fokozatnál is. Felírjuk a mérlegegyenletet a 2. tányérra, és y_2 -re megoldjuk:

$$(3.16) \quad y_2 = \frac{y_3 + Amx_1}{1 + A} = \frac{y_3 + Ay_1}{1 + A}$$

A (3.15) egyenletet behelyettesítjük a (3.16) egyenletbe. Ezután a 3. tányérra írjuk fel a mérlegegyenletet, megoldjuk y_3 -ra és ebbe helyettesítjük be az y_2 -t, és így tovább, amíg eljutunk az N -edik tányérig, majd az N -et kifejezzük. A megoldás $A \neq 1$ esetben [2]:

$$(3.17) \quad N = \frac{\ln \left[\frac{y_{N+1} - mx_0}{y_1 - mx_0} \left(1 - \frac{1}{A} \right) + \frac{1}{A} \right]}{\ln A}$$

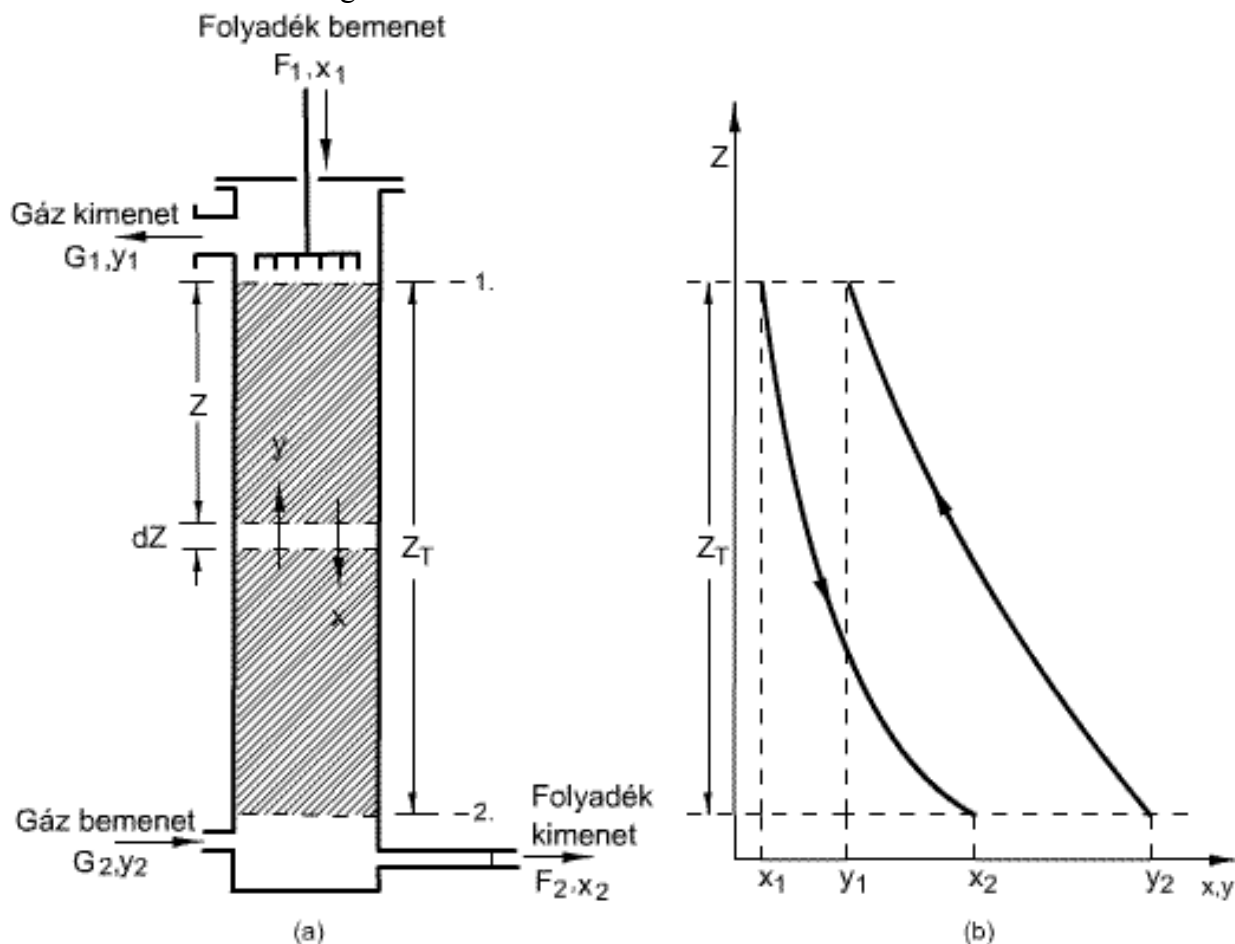
$A = 1$ esetben:

$$(3.18) \quad N = \frac{y_{N+1} - y_1}{y_1 - mx_0}$$

Ideális elegyek esetében, ahol a munkavonal is és az egyensúlyi vonal is egyenes, a (3.17 és a (3.18) egyenletekkel meghatározhatjuk az elméleti tányérok, (fokozatok) számát. A tányérhatásfok ismeretében kiszámíthatjuk a gyakorlatban szükséges tányérok számát, a gyakorlati tányérszámot. A kolonna magasságának meghatározásához ismernünk kell a tányértávolságot is. A tányértávolságot általában először a szerkesztés, karbantartás és költségtényezők gyakorlati adatai alapján választjuk meg, majd az elárasztás ellen megfelelő biztonság szempontjából ellenőrizzük. A kolonna magasságát a gyakorlati tányérszám és a tányérmagasság szorzata adja.

17.4. Az átviteli egység magasság és átviteli egységszám meghatározása

A folytonos érintkezésű berendezések közül abszorpciós műveletek megvalósítására az ellenáramú töltelékes oszlopokat és permetező tornyokat gyakran használják. Ezek a berendezések tányéros tornyoktól eltérő módon működnek, a fluidumok a tornyon keresztülhaladva folytonosan, megszakítások nélkül érintkeznek egymással. Ezért a töltelékes toronyban a folyadék és gáz összetétele folytonosan változik a töltelék magasságának függvényében. Egy adott helyen az egymással érintkező fázisok koncentrációját, az abszorbeálódott komponensre felírható, anyagmegmaradást kifejező, mérlegegyenlet (munkavonal) segítségével adhatjuk meg. A munkavonal minden egyes pontja valahol a toronyban található állapotot képvisel, míg a tányéros tornyok esetében csak a munkavonal egyes pontjainak van fizikai tartalma. Ugyanis a tányéros tornyoknál a munkavonal egy-egy pontja a két tányér között, az egymás mellett elhaladó, a tányérról ki- és a tányérra belépő, nem egyensúlyban lévő folyadék és gázfázis koncentrációi közötti kapcsolatot fejezi ki. Az abszorpciót általában ellenáramú berendezésekben hajtják végre. Egy folytonos, például töltött abszorber hosszúság menti koncentráció eloszlását szemléltetjük a **153. ábra**. Az x és y koncentrációk léptékei természetesen nem szükségszerűen azonosak.



153. ábra: Abszorber vázlatja és a koncentrációk hossz menti változása

17.4.1. Átviteli egység magasság számítása

A film-, vagy a töltelkes abszorberek magasságának meghatározásához induljunk ki a Benedek-László egyenlet egydimenziós alakjából, amelyben az axiális visszakeveredés zérus, dugószerű az áramlás, stacionárius állapotú a kolonna. Ebben az esetben a mérlegegyenlet csak konvektív és átadási tagot tartalmaz:

$$(3.19) \quad v_G \frac{dY}{dz} + K_y a \Delta Y = 0$$

A (3.19) egyenletben v_G a gázelegy műveleti egységen belüli, üres keresztmetszetre vonatkoztatott átlagos lineáris sebességét, a fajlagos felületet, a K_y gázelegy, adott komponensének az anyagátadási tényezőjét jelöli. A fenti egyenletet átrendezve és a jobb oldalra hajtóerőként az y^* egyensúlyi koncentrációtól mért eltérést írjuk be:

$$(3.20) \quad -v_G \frac{dY}{dz} = K_y a (Y - Y^*)$$

A negatív előjel azért szerepel, mert a torony z magasságának növelésével a gáztöménység csökken. Az abszorber sémáját és a gáztöménység csökkenését a **153. ábra** láthatjuk. Az egyszerűség kedvéért a torony alján $z = 0$ helyen a koncentrációkat jelöljük 2-es a torony tetején ($z = Z_T$ helyen) a koncentrációkat 1-es index-szel. Szeparáljuk és integráljuk a (3.20) egyenletet a torony (1) és (2) végpontjai között:

$$(3.21) \quad \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{dY}{Y - Y^*} = \frac{aK_y}{v_G} \int_0^{Z_T} dz = \frac{aK_y}{v_G} (Z_T - 0) = \frac{aK_y}{v_G} Z_T$$

A (3.21) egyenletet átrendezve:

$$(3.22) \quad \frac{v_G}{aK_y} \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{dY}{Y - Y^*} = Z_T$$

A (3.22) egyenlet jobb oldalán az abszorber magassága szerepel, amelyet két tényező szorzataként adhatunk meg. Az integrál jel előtti tényező hosszúság dimenziójú, az integrál kifejezés dimenzió nélküli. Az előbbi az átviteli egység magassága (*ÁEM* vagy *HTU*), az utóbbi az átviteli egység szám (*ÁESZ* vagy *NTU*).

Ezek szerint az átviteli egység magassága:

$$(3.23) \quad HTU = \acute{A}EM = \frac{v_G}{aK_y} = \frac{\dot{V}_G}{aK_y A}$$

A (3.23) egyenletben a lineáris sebességet a gáz \dot{V}_G (m³/s) térfogatáramának és az A (m²) áramlási keresztmetszet hányadosaként is megadhatjuk.

17.4.2. Átviteli egység számítása

Az átviteli egység számot a (3.22) egyenletből az alábbi integrál egyenlet alapján számíthatjuk:

$$(3.24) \quad NTU = \dot{A}ES_z = \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{dY}{Y - Y^*}$$

Az átviteli egység számot az integrálás elvégzésével számíthatjuk. Ez több módon végezhető el. Az analitikus integrálás akkor lehetséges, ha mind a munkavonal, mind pedig az egyensúlyi összefüggés analitikus formában adott. Például, ha a munkavonal és az egyensúlyi vonal egyenes, valamint az abszorpciót tiszta abszorbenssel végezzük:

$$(3.25) \quad Y = \frac{F_s}{G_s} X + Y_2$$

$$(3.26) \quad Y^* = mX$$

A két egyenletből X -et kifejezve a két összefüggés másik oldala is egyenlő egymással

$$(3.27) \quad \frac{Y^*}{m} = \frac{G_s}{F_s} (Y - Y_2)$$

$$(3.28) \quad Y^* = \frac{mG_s}{F_s} (Y - Y_2) = B(Y - Y_2)$$

ahol $B = \frac{mG_s}{F_s}$ az abszorpciós tényező. A (3.28) egyenletet az $\dot{A}ES_z$ (3.24) egyenletébe helyettesítve

$$(3.29) \quad \dot{A}ES_z = \int_2^1 \frac{dY}{Y - Y^*} = \int_2^1 \frac{dY}{Y - B(Y - Y_2)}$$

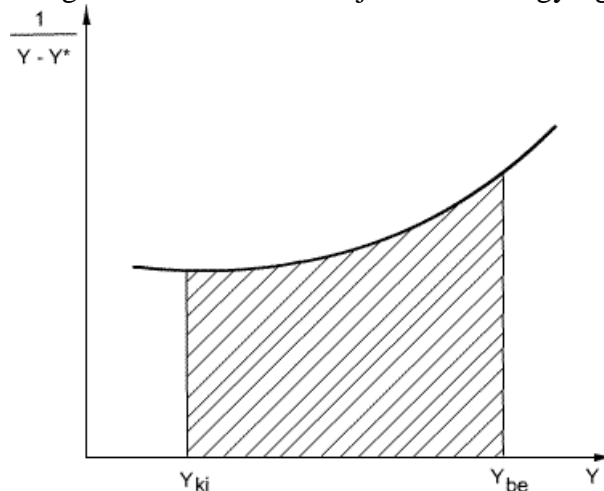
Az integrálás eredménye a következő:

$$(3.30) \quad \dot{A}ES_z = \frac{1}{1 - B} \ln \left[(1 - B) \frac{Y_1}{Y_2} + B \right]$$

ahol Y_1 a bemenő és Y_2 a kimenő gázfázis koncentrációja.

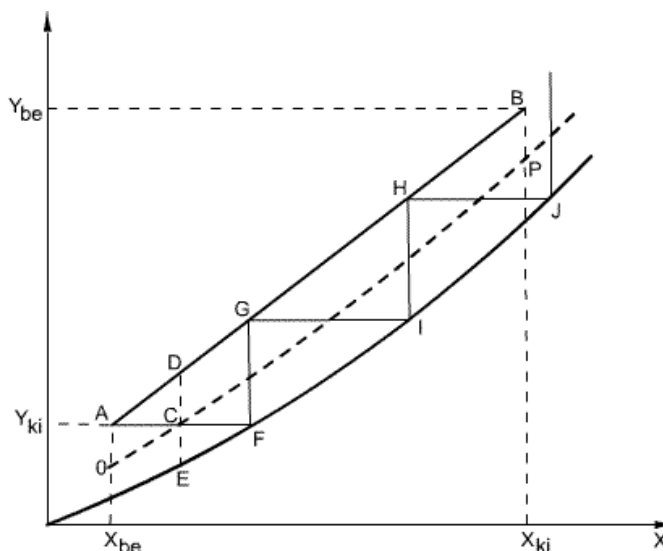
17.4.3. Átviteli egység szám grafikus meghatározása

Ha az egyensúlyi összefüggés analitikusan nem adott, akkor a grafikus vagy numerikus-integrálás a legcélravezetőbb. A gázkoncentráció függvényében felvesszük a hajtóerő reciprokját, **154. ábra**, és a görbe alatti területet adja az átviteli egység számot.



154. ábra: Átviteli egység szám meghatározása grafikus módszerrel.

Baker egy szerkesztési módszert dolgozott ki az $\bar{A}ESZ$ meghatározására. Ez a módszer akkor alkalmazható, ha az egyensúlyi görbének csak kicsi a görbülete, a munkavonal pedig egyenes. Ebben az esetben a **155. ábra** látható szerkesztés végezhető el. Az \overline{AB} munkavonal és az egyensúlyi vonal közé berajzoljuk az $O-P$ segédgörbét, úgy, hogy az felezze a munkavonal és az egyensúlyi vonal közötti ordináta-különbségeket, majd az A pontból kiindulva vízszintes vonalat húzunk a segédgörbéig. Az ACD háromszög és az AFG háromszög hasonlóságából és az $O-P$ vonal szerkesztéséből következik, hogy a \overline{DE} és a \overline{GF} szakaszok egyenlők, vagyis a gázfázisban létrejött koncentrációváltozás (\overline{GF}) megegyezik az adott szakaszon fennálló átlagos hajtóerővel (\overline{DE}). A munkavonalnak ez a szakasza tehát egy átviteli egységet reprezentál.



155. ábra: Átviteli egység szám meghatározása Baker grafikus módszerével

A szerkesztési ugyanilyen módon végezzük a munkavonal végpontjáig. Az átviteli egység tört része is értelmezhető, tehát amennyiben a **152. ábra** hasonlóan az utolsó átviteli egység a

munkavonal végpontján túl végződik, a tényleges számot a vízszintes vonalon mérhető $\overline{HI} / \overline{HJ}$ arányból állapítjuk meg.

17.4.4. Az abszorpciós torony magassága és átmérője

Az abszorber (torony) magasságát tehát az (3.22) egyenlet alapján az átviteli egységyszám és az átviteli egység magasság szorzataként adjuk meg

$$(3.31) \quad H = (\dot{A}EM) (\dot{A}ES_z) = \frac{v_G}{aK_y} (\dot{A}ES_z)$$

Az üzemeltetésnél a cél az $\dot{A}EM$ csökkentése, tehát az, hogy a K_y és az a értéke minél nagyobb legyen. A gázsebesség az $\dot{A}EM$ -ra gyakorolt (3.31) egyenletből látható közvetlen hatáson kívül a K_y -t és az a -t is befolyásolja, tehát megválasztása bonyolultabb feladat.

Az abszorpciós oszlop átmérőjét a feldolgozandó gáz mennyiségének és az optimális gázsebességnek az ismeretében választjuk meg a következő összefüggés alapján:

$$(3.32) \quad D = \sqrt{\frac{4\dot{V}_G}{v_G \pi}}$$

ahol D az oszlop átmérője, és a \dot{V}_G a gáz térfogatárama.

A gázsebesség megválasztásánál a következő szempontok a mérvadók. Az áramok sebességének növelésével növekszik a komponensátadási tényező, esetleg a fajlagos átadási felület (emulgeációs tartomány). Ezzel együtt a készülék hidraulikus ellenállása és a művelet energiaszükséglete nő. Ezért az optimális gázsebesség meghatározása műszaki-gazdasági számítást tesz szükségessé.

17.5. Deszorpció

A deszorpció az abszorpcióval ellentétes irányú és célú folyamat. Ha a komponens koncentrációja a gázfázisban kisebb egy megfelelő egyensúlyi koncentrációnál, az adott komponens a folyadékfázisból a gázfázisba megy át. A deszorpció célja az elnyeletett gáz tiszta állapotban való előállítása, illetve az abszorbens regenerálása az ismételt felhasználás előtt. A deszorpció többféleképpen valósítható meg.

1. Kigázosítás inert gázzal vagy gőzzel: a deszorbeáló közeget általában ellenáramú tányéros vagy töltött oszlopban érintkezésbe hozzák az oldattal. A deszorbeáló közegben a megoszló komponens parciális nyomása kisebb, mint az oldat fölött, ezért az a gázáramba megy át. Inert gázként általában levegőt használnak. Ezt a módszert akkor használják, ha a megoszló gáz nem értékes, nem kívánják visszanyerni. Vízgőzt akkor alkalmaznak deszorbeáló közegként, amikor vízben oldhatatlan gázokat akarnak kinyerni, a gáz-gáz elegyet a deszorberből kondenzátorba vezetik, ahol a vízgőz kondenzálódik és a gázt tisztán kapják.
2. Az abszorbens melegítése: A deszorberrel hőt közölve az oldatból a deszorbeálendő komponensen kívül az abszorbens egy része is elpárolog. A keletkező elegyet rektifikálással választhatják szét.
3. A nyomáscsökkentés az abszorbens felett: Különösen nyomás alatti abszorpció esetén ez a legegyszerűbb megoldás, mivel a deszorpció az atmoszfériusra való

nyomáscsökkentéssel is végbemegy. Atmoszférikus abszorpció esetén vákuumot kell alkalmazni.

A fentiekben ismertetett deszorpciós eljárásokat természetesen kombinálni is lehet.

17.6. Az oldószer kiválasztására az abszorpcióhoz

Ha az abszorpciós művelet fő célja valamilyen sajátos oldat előállítása, például a sósavoldat gyártásánál, akkor az oldószert a termék minősége határozza meg. Ha a fő cél egy bizonyos alkotórész eltávolítása a gázból, gyakran van lehetőség bizonyos mértékű választásra. A víz természetesen a legolcsóbb és rendelkezésre álló oldószer, de az alábbi tulajdonságok figyelembevételére igen fontos

A gáz oldhatósága. A gáz oldhatósága lehetőleg nagy legyen, mert megnöveli az abszorpció sebességét és csökkenti a szükséges oldószermennyiséget. Általában az abszorbeálandó (oldott) anyaghoz kémiaiilag hasonló természetű oldószerek jó oldhatóságot biztosítanak, így szénhidrogén olajokat, és nem vizet, használunk a benzol eltávolítására a kokszkemence gázból. Azokban az esetekben, amikor a keletkező oldatok ideálisak, a gáz oldhatósága mól törvényben kifejezve minden oldószerben ugyanaz. Tömeg törvényben kifejezve azonban a kis molekula tömegű oldószerekben nagyobb az oldhatóság, és az ilyen oldószerekből tömegegységekben mérve, kisebb mennyiségre van szükség. Az oldószer és az oldott anyag közötti kémiai reakció igen gyakran nagy gázoldhatóságot eredményez, de ha az oldószert újból felhasználás céljából vissza kell nyerni, a reakciónak reverzibilisnek kell lenni. Például a kénhidrogén eltávolítható gázelegyekből etanolamin-oldatokkal, mert a kénhidrogén könnyen elnyelődik alacsony hőmérsékleten és könnyen kihajtható magas hőmérsékleten. A nátrium-hidroxid kiválóan abszorbeálja a kénhidrogént, de a reakció irreverzibilis lévén, a kihajtási művelet során a H_2S nem szabadítható fel.

Illékonyág. Az oldószernak kicsi legyen a gőznyomása, mert az abszorpciós műveletből távozó gáz rendszerint telítve van az oldószerral és ezzel sok megveszendőbe. Ha szükséges, egy második, kevésbé illó folyadék használható az első elpárolgott részének visszanyerésére. Ez fordul elő például néha szénhidrogén abszorberes esetekben, amikor az abszorber fő részében jobb oldó hatása miatt viszonylag illékony oldószert alkalmazunk és az elillant oldószert magasabb forráspontú olajjal nyerjük vissza a gázból. Hasonlóképpen a kénhidrogént nátrium-fenolát vizes oldatában abszorbeálhatjuk, de a kénmentesített gázt tovább mossuk vízzel az elpárolgott fenol visszanyerésére.

További fontos szempont a *korrózió*. A készülékhez szükséges szerkezeti anyagok ne legyenek különlegesek vagy költségesek, az oldószerek legyenek *olcsók*, és *kis viszkozitásúak*. A kis viszkozitás előnyös a gyors abszorpció szempontjából, továbbá az abszorpciós tornyok kedvezőbb elárasztási viszonyai, a szivattyúzás kis nyomásesése és a jó hőátadás érdekében.

Egyéb szempontok. Az oldószer lehetőleg ne legyen mérgező, gyúlékony, legyen kémiaiilag stabil és alacsony fagyáspontú és legyen környezetbarát.

Természetesen valamennyi követelménynek az oldószer nem felel meg, ezek a szempontok néha egymást kizárják, de törekedni kell az optimális oldószer kiválasztására.

17.7. Abszorpciós berendezések.

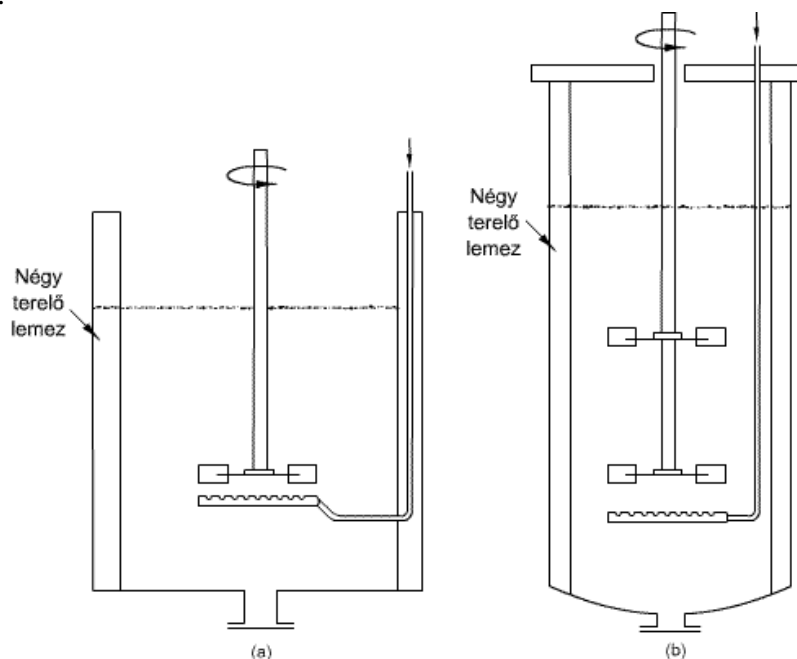
Mindezen abszorpciós művelet esetében a berendezés elsőrendű feladata a lehető leghatásosabb érintkezés biztosítása a gáz és a folyadék között azért, hogy a komponensek fázisok közötti diffúziója lehetővé váljék. Az anyagátadás sebessége közvetlenül függ a fázisok határfelületétől, és az egyik közegnek a másikban való eloszlása elsőrendű fontosságú. A készülékeket általánosságban abból a szempontból osztályozzuk, hogy a gáz vagy a folyadék a diszperz fázis.

17.7.1. Gáz diszpergáló készülékek

Ebbe a csoportba tartozó berendezések a keverős készülékek és a tányéros tornyok különböző típusai, amelyekben a gázfázis buborékokká vagy cseppekké oszlik szét. A legfontosabb ebben a csoportban a buboréksapkás tányéros torony.

17.7.1.1. Keverős készülékek.

Gázt bizonyos mennyiségű folyadékban a legegyszerűbb módon úgy lehet szétosztani, hogy perforált csövön vagy permetező rózsán keresztül a folyadék felszíne alá vezetjük. Az ilyen permetezőtől kilépő gázbuborékok viszonylagosan nagyok, és ennek megfelelően a fázisok közötti felület kicsi. Az elosztás mértéke fokozható azáltal, hogy a gázt szűkebb nyílásokon vezetjük keresztül. Ilyenek a porózus kerámia vagy fémlapok, a szűk nyílások miatt azonban nagyobb nyomás szükséges, és az eltömődés veszélye is fennáll. Az elosztás, illetve elosztás mértékét növelhetjük a **156. ábra** látható mechanikus keverők, például turbókeverő alkalmazásával.



156. ábra: Gáz diszpergáló keverős készülék

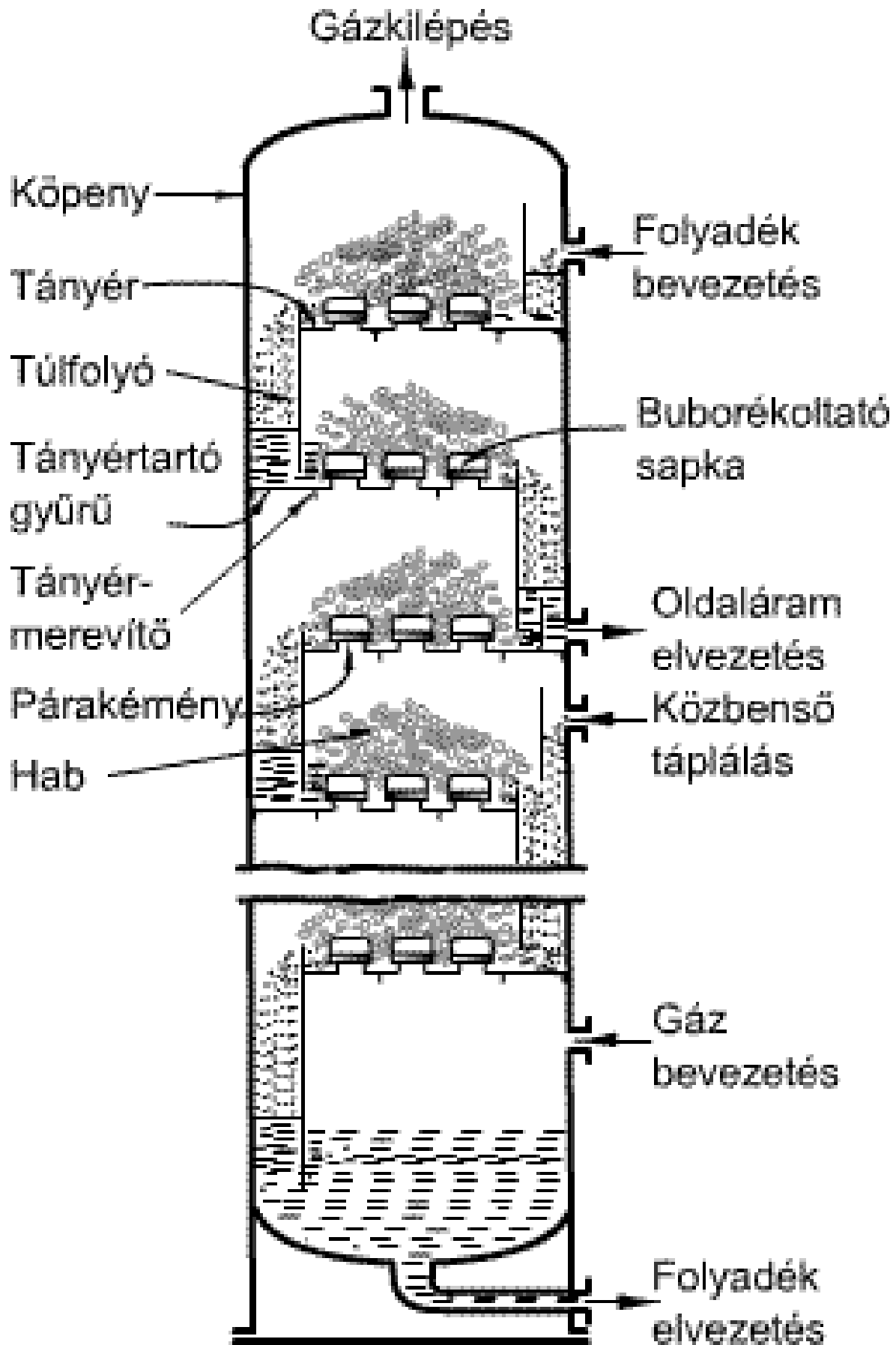
A gázt a folyadékszint alatt elhelyezett csöveken keresztül a keverő középpontja és kerülete közötti távolság felénél a keverő aljához vezetik, azért hogy elkerüljék a keverő közepénél a nagyméretű gázbuborék keletkezését. A keverő a gázbuborékokat kisméretű gázbuborékká diszpergálja a folyadékban. Van olyan keverős készülék, ahol a folyadék felszínéhez közel még egy másik keverőlapát is van beépítve, **156. ábra**, abból a célból, hogy a gázt a folyadékban lefelé terelje. Ilyen készüléket használnak például a hidrogénezési eljárásokhoz (hidrogén abszorpciója növényi olajokban). Ezek a keverő típusok akkor létesítenek finom gázelosztást, ha a bevezetett gáz sebessége a készülék keresztmetszetére számítva kisebb, mint $0,03 \text{ m/s}$. A keverős készülékek ezért elsősorban kis mennyiségű gáz folyadékban való szétosztására alkalmasak, szakaszos, félfolyamatos vagy folyamatos üzemben egyaránt. Különösen alkalmasak azokban az esetekben, amikor a folyadék szuszpendált szilárd anyagot tartalmaz, mint például kalcium-karbonát leválasztása, füstgázok széndioxid tartalmának méziszapban történő abszorpciója, vagy folyadék hidrogénezése szuszpendált szilárd katalizátor jelenlétében. Mivel egy jól méretezett turbókeverő a folyadék tökéletes keverését biztosítja, feltételezhető, hogy

ilyen készülékekben a folyadékfázis koncentrációja egyenletes. Folyamatos művelet esetén az ellenáram előnyei ennél fogva egyetlen tartállyal és keverővel nem biztosíthatók. A gáz és folyadék ellenáramát megvalósító többfokozatú berendezésekhez több, csővezetékkel összekötött keverős készülék szükséges. A gázt az egyik tartályból a folyadék felszíne fölötti térből a következő tartály aljához a folyadékszint- illetve a keverő alá- a folyadékot pedig ellenkező irányban készüléktől készülékig vezetik.

17.7.1.2. Buboréksapkás tányéros tornyok.

A buboréksapkás tányéros tornyok az előbb említett keverős többfokozatú ellenáramú berendezés továbbfejlesztett változata. Ez egy függőleges hengeres készülék, amelyekben a gáz tányérokra vagy tálcákra (fokozatokra), tányérról tányérra ellenáramban érintkezik a folyadékkal, mint azt a **157. ábra** vázlatosan bemutatja. A gőz vagy gáz a tányérok nyílásain keresztüláramlik felfelé a buborékolató sapkába, amelyek a tányérokra vannak elhelyezve. Mindegyik sapka kerülete mentén nyílások vannak, ezeken át buborékol a gáz a folyadékba. A folyadék a túlfolyókon keresztül tányérról tányérra lefelé folyik, keresztüláramlik minden tányéron, és a buboréksapka réseiből kiáramló gázzal érintkezik. A torony vagy oszlop tányérjainak száma a művelet anyagátadási nehézségeitől függ. A torony átmérője és a tányérok egymástól való távolsága viszont a tornyon az időegység alatt átáramló folyadék- és gázmennyiség függvénye. Ha egyszer a szükséges tányérszámot megállapítottuk, a legfontosabb feladat a torony méretezésénél az, hogy olyan méreteket és elrendezést válasszunk, amely néhány ellentétes követelmény kielégítésében az optimális kompromisszumot adja. Általánosságban azt találták, hogy jó anyagátadást biztosító feltételek végül üzemviteli nehézségekhez vezetnek. A toronyban mindegyik tányér lényegében véve egy fokozat. A tányérokra a gáz és a folyadék hathatósan érintkezik, fázisok között diffúzió jön létre, majd ezt követi a közegek fizikailag szétválása. Azért hogy a tányérok hatásfoka jó legyen, a diffúzió végbemeneteléhez szükséges érintkezési időnek (tányérokra az átlagos tartózkodási időnek) olyan hosszúnak kell lennie, amilyen csak lehetséges.

A fázisok közötti felületnek pedig a lehető legnagyobbnak kell lennie, és mindegyik közeg valamennyi részecskéjének érintkeznie kell a másik közeggel. Minél hosszabb érintkezési idő biztosítása végett, a folyadékszintet mindegyik tányéron a lehető legmagasabban kell tartani, hogy a gázbuborékok viszonylag hosszú idő alatt emelkedjenek fel a folyadékban. Ha a gáz csak lassan buborékok a sapkák résnyílásain keresztül, a buborékok nagyok lesznek, és kicsi a gáz térfogategységére vonatkoztatott fázisfelület, a folyadék viszonylag nyugodt, és nagy része átfolyhat a tányéron anélkül, hogy a gázzal érintkezett volna. Másrészt, ha a gáz sebessége viszonylag nagy, a gázelosztás a folyadékban nagyon jó, de azt habossá keveri fel. Így nagy fázisfelület képződik. Jó tányérhatásfok érdekében tehát magas folyadékszint és viszonylag nagy gázsebesség szükséges. Ezek az üzemi feltételek azonban nehézségeket okoznak, mert a felfelé áramló gáz folyadékcsöppeket ragad magával, és nagy lesz a gáz nyomásesése. Nagymértékű folyadékhabzás következtében a hab a tányérszint felett a megengedettnél nagyobb magasságot érhet el, és ha a gáz kiszabadul a folyadék fő tömegéből, a hab kis cseppjeit a következő tányérra ragadja magával. A toronyban így módon feljebb került folyadék csökkenti az anyagátadás által létrehozott koncentrációváltozást, és ennek következménye a tányérhatásfok romlik. Ezért szükségessé válik, hogy a tányérok között viszonylag nagy legyen a távolság a fenti hiányosság csökkentése érdekében. Ennek következtében a torony magassága és egyben a költségei növekednek. Továbbá, ha a tányéron nagy a folyadékmagasság, valamint nagy a gázsebesség, a tányéron való átáramlás a gáz nagy nyomásesését okozza. Abszorberek esetében a nagy nyomásesés miatt a gázok szállítására nagy ventilátorteljesítmény szükséges, ennek pedig magas üzemköltség a következménye. A nagy nyomásesés *elárasztást* is okozhat.



157. ábra: Buboréksapkás tányéros torony

Ha nagy a nyomáskülönbség a tányérok fölötti terek között, a kisebb nyomású tányérról lefolyó és a nagyobb nyomásra érkező folyadék szintje szükségképpen magasabban lesz a túlfolyóban, mint azt a **157. ábra** mutatja. Amint a nyomáskülönbség nő, akár a gáz, akár a folyadék áramlási mennyiségének növelése következtében, a folyadékszint a túlfolyóban tovább fog emelkedni azért, hogy a folyadék az alacsonyabban fekvő tányérra le tudjon folyni. Végül elérheti a felette levő tányér folyadékszintjét. A folyadék megtölti a tányérok közötti teljes térfogatot, és a torony ekkor el van árasztva. A tányérhatásfok nagyon kis értékre süllyed, a gáz áramlása ingadozó lesz, és a folyadékot a torony tetején levő gázkilépő csövön át ki is nyomhatja. Ezeket az ellentétes követelményeket a következőkben összegezzük. Magas folyadékszint a tányérokban a hosszú érintkezési idő következtében jó tányérhatásfokot eredményez, egyúttal azonban nagy lesz a tányéronkénti nyomásesés. Megfelelő határokon belül a nagy gázsebességgel a jó gázelosztás folytán jó folyadék-gázérintkezést lehet elérni, de nagymértékű a folyadékcseppek elragadása (cseppfelhordás) és nagy a nyomásesés. A különböző megoldások és méretek közül a tervezőnek azokat kell választania, amelyeket a gyakorlat, mint ésszerűen jó kompromisszumokat igazolt. A főméretek megállapításánál tapasztalati adatokat is használnak, annak biztosítására, hogy a nyomásesés és a készülék rugalmassága megfelelő legyen, vagyis a tornyot a kezdetben várható anyagmennyiségnél nagyobb mértékben is lehessen terhelni.

Az oszlop fontos jellemzője a tányértávolság. A tányértávolságot, először a szerkesztés, karbantartás és költségtenyezők gyakorlati adatai alapján választjuk meg, majd az elárasztás ellen megfelelő biztonság szempontjából ellenőrizzük. Különleges üzemi körülmények között, amikor a belső magassági méretek nagyon lényegesek, 0,05 m méretű, szűk tányértávolság is alkalmazható, de normál körülmények között a feldolgozó kapacitás rugalmassága érdekében a tányérosztás 0,15 m-nél kisebb ne legyen. Általában, kivéve a legkisebb toronyátmérőket, a tányérok tisztíthatósága szempontjából a 0,5 m az a legkisebb tányértávolság, ami minden esetben inkább megvalósítható. A legtöbb ásvány-olajfinomító berendezésben 1,5 m toronyátmérőig 0,5 m-t, és nagyobb átmérőknél még nagyobb távolságot alkalmaznak azért, hogy a tisztítást és a köpenyen levő búvó nyílásokon keresztül a tányérok szerelését megkönnyítsék. Az ajánlott méretek szakkönyvekben megtalálhatók.

A folyadék áramlása. A tányéron kilépéstől a belépésig emelkedik a folyadékmagasság. Ez a folyadék gradiens, ami a sapkák által a folyadékáramlással szemben létesített ellenállás következménye. Ha a folyadék gradiens túlzott mértékű, a gáz igyekszik azokon a sapkákon átáramlani, amelyek felett a folyadékszint a legkisebb, a kisebb nyomásesés miatt. Így a folyadék belépése közelében levő sapkáknál megszűnik a buborékolás, és a tányér hatásossága jelentősen csökken. Szélső esetben a folyadék a sapkákon, és a gázkérményeken keresztül éppen át is folyhat. A folyadék gradiens mérsékelhető a folyadék áramlásának útjában levő sapkasorok számának csökkentésével. Nagy átmérőjű tornyokban az előzőekben leírt egyszerű keresztáramlást sugárirányú vagy osztott áramlással lehet helyettesíteni. Igen nagy átmérők esetén különböző szintű, lépcsős (kaszkád-) tányérok használhatók, amelyek mindegyikének külön gátja van, ámbar ezek költsége jelentékeny. *Tányérstabilitás.* A tányér stabil, ha mindegyik sapka buborékolása biztosított, és kimutatták, hogy akkor a legjobb a tányér hatásfoka, ha mindegyik sapkasor a lehetőség határain belül azonos mennyiségű gázzal van terhelve. A folyadék gradiens hatása részben kiegyenlíthető, ha átlagosan minden sapkában nagy gázsebességet biztosítunk, bizonyos egyenlőtlenség azonban a gázelosztásban még mindig fog maradni. Szélső esetben a különböző sorokban levő sapkák a folyadékszint változását követve a tányértól különböző magasságban helyezhetők el, vagy a túlfolyóhoz közeli sorokban levő sapkák réseinek egy része megszüntethető avégett, hogy ezekben a sorokban is nagyobb legyen a nyomásesés.

17.7.1.3. Szitatányéros (lyuggatott lemez) tornyok.

A buborékolató sapkás tányérkonstrukciók előállítási költsége nagy, ezért az egyszerűbb szerkezetű, olcsóbb tányértípusokat is alkalmaznak, amilyen a szitatányér vagy lyuggatott lemez. A szitatányér alapjában megegyezik a buborékolató sapkás tányérral, csupán az a különbség, hogy a kémények és buborékolató sapkák által elfoglalt területen, ezek helyett sűrűn lyuggatott lemez van beépítve. Ezen keresztül buborékol a gáz a folyadékba. Megfelelő méretezés esetén a szitatányér az áramlási sebességek tág határai között stabil, és mind a tányérhatásfok, mind a gáz nyomásesése tekintetében nem rosszabb buborékolató sapkás tányéroknál. Kisebb méretű lyukak esetén nagyobb az anyagátadás sebessége, de a gáz nyomásesése is nagyobb. A gáz nyomásesése a száraz lemezen fellépő, valamint a tányéron levő folyadék-gázhab vastagságától függő nyomásesések összege.

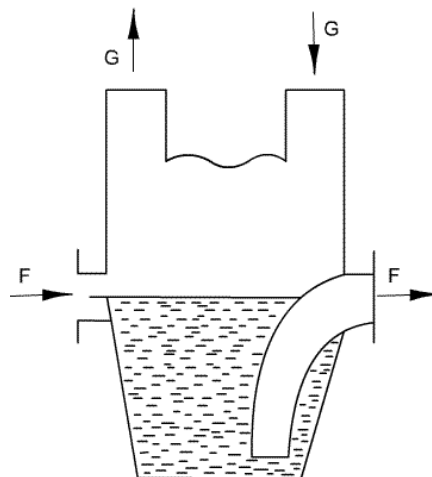
Rostélytányér, egy másik hatékony tányértípusú. Ennél a megoldásnál nem szükségesek túlfolyók, a folyadék ugyanazokon a nyílásokon folyik le, amelyeken a gáz áramlik. A nyomásesés kisebb, mint a buborékolató sapkás tányérok, noha az áramlási kapacitások nagyobbak. Ezek a tányérok különösen jól használhatók lebegő szilárd anyagot kis mennyiségben tartalmazó folyadékok esetén.

17.7.2. Folyadék-eloszlással működő készülékek

Ebbe a csoportba azok a készülékek tartoznak, amelyekben a folyadékból álló stagnáló részeket alakítanak ki, vékony filmeket vagy cseppeket képeznek belőle. Ilyenek a nedvesített falú tornyok, turulok, porlasztók és permetezett tornyok, valamint a különböző töltelékű oszlopok, amelyek a legjelentősebbek ebben a csoportban.

17.7.2.1. Turillók.

Néhány gázabszorpciós műveletben, mint például hidrogén klorid vizes abszorpciójánál, a hő fejlődés jelentékeny, így régen szokás volt az abszorpció késleltetése, hogy a hőelvonás megfelelő lehessen. A gáz és folyadék sorba kapcsolt, nagyméretű, kőanyagból készült korsó alakú edényekben (turillók) áramlott ellenáramban.



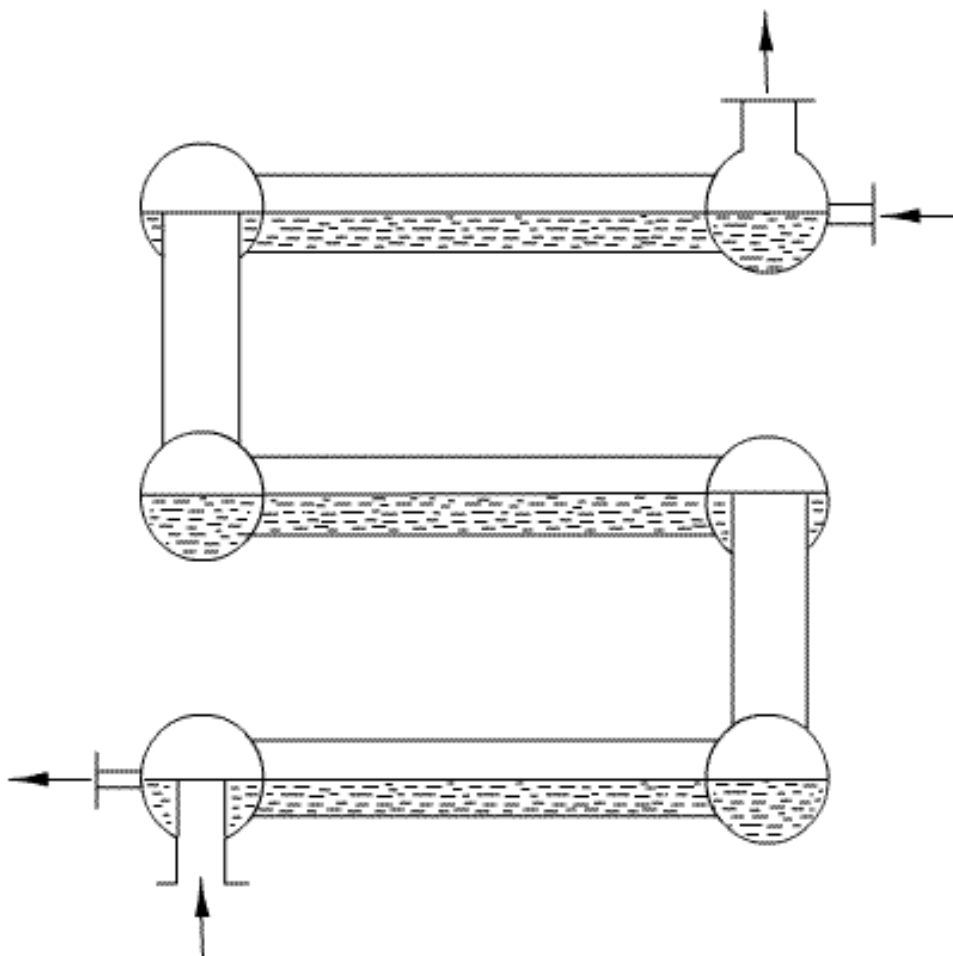
158. ábra: A Turill elvirajza

Ezeket gyakran víztartályokba merítették a fejlődött hő elvezetésére. Az anyagátadás folyamatának késleltetése helyett jobb a gyorsabb hőelvezetésről gondoskodni. A kaszkádot gyakran úgy hűtik, hogy az edényekre vizet permeteznek. A **159. ábra** egy speciális felületi abszorber látható, ahol a folyadékból álló stagnáló rész lényegesen nagyobb a turillhoz viszonyítva.

17.7.2.2. Nedvesített falú tornyok.

Ezek a film abszorberek, amelyeknél a fajlagos felületet (a) nem lehet befolyásolni, hiszen az rögzített felület. Az átadási tényező (K_Y) a filmelméletek alapján, a fázishatáron létrejött film vastagságának csökkentésével növelhető, ez pedig a gázsebesség és turbulencia növelésével érhető el. Még nagyobb gázsebességeknél a folyadékfilm vastagsága annyira megnő, hogy már gyakorlatilag nem is filmkészülékről beszélünk, hanem egy üres csőben létrejött emulziós oszlop működik. Ebben a tartományban a tényleges átadási felület a folyadékban elosztatott gázbuborékok, illetve a gázban mozgó folyadékcseppek felülete. Ebben az állapotban igen nagy a nyomásesés, viszont az átadás itt a legintenzívebb.

A nedvesített falú torony függőleges csőből áll, amelynek belső falán vékony folyadékfilm folyik le, miközben a gáz felfelé áramlik. Ha a csövet sebesen áramló hűtővízzel vesszük körül, a fejlődő hő olyan gyorsan vezethető el, hogy az abszorpciós készülék sokkal kisebb méretű lehet a fentebb leírt turilloknál.



159. ábra: Speciális kiképzésű felületi abszorber

Ilyen készülékek jól alkalmazhatók sósav-abszorbernek. Sok anyagátadási művelethez túlzottan magas nedvesített falú torony szükséges, ezért ez a készülék nem terjedt el. Ahol nagy mennyiségű gázzal vagy folyadékkal kell dolgozni, ott sok párhuzamosan kapcsolt függőleges cső felállítása volna szükséges, ami megnehezíti a folyadékelosztást a csövek belső felületére. Előnyös az ilyen típusú berendezésekben, hogy a gáz nyomásesése nagyon kicsi, mivel az csaknem teljesen az áramlási súrlódásra korlátozódik, míg a térfogati veszteség kicsi vagy egyáltalán nincsen.

17.7.2.3. Permetezett tornyok, permetezett kamrák.

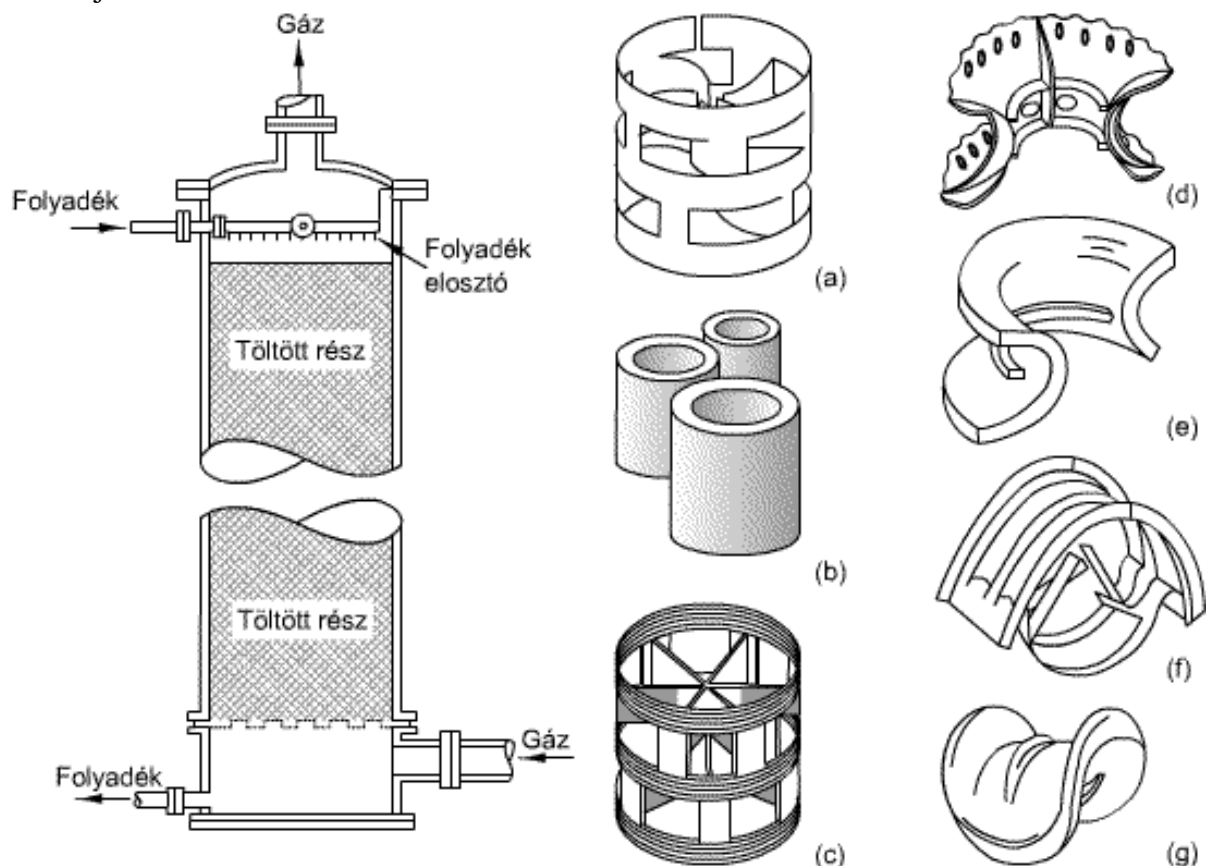
Fúvóka segítségével a folyadékot finom permetcseppekké lehet bontani és gázáramba permetezni. Az áramlás vagy ellenáramú, mint a függőleges tornyokban, ahol a folyadékot lefelé permetezik, vagy egy irányú, mint a vízszintes permetezett kamrákban. Ezeknek a készülékeknek előnye, hogy igen kicsi a gáz nyomásesése, de több hátrányuk is van. Ilyen a folyadék viszonylagosan nagy szivattyúzási költsége, ami a permetezőfejben fellépő nyomásesés következménye. A távozó gáz nagy mennyiségű folyadékot ragadhat magával, így cseppfogók beépítése majdnem mindig szükséges. A permet nem elég alaposan keveredik a gázzal, ha az átmérő és a hosszúság arány elég kicsi, és ennek következtében az ellenáram teljes előnye nem használható ki. Az átmérő és a hosszúság arányt viszont rendszerint nem lehet nagyon kicsire választani, mivel a permet ekkor gyorsan eléri a torony falát, és hatástalanná válik.

17.7.2.4. Terelőlemezes tornyok

A terelőlemezek széléről lefolyó folyadék folyadékfátyolon keresztül áramlik felfelé. A folyadékelosztás nem olyan jó, mint permetezés esetén, de az ellenáramú érintkezés sokkal jobban megvalósul. A gáz nyomásesése nagyon kicsi.

17.7.2.5. Töltetet tartalmazó tornyok.

Ezek függőleges oszlopok, amelyeket töltőtestekkel vagy nagy felületű szerkezeti elemekkel töltenek meg. A töltelékes tornyokat gáz és folyadék folytonos, ellenáramú érintkezésére használják.



160. ábra: Töltött torony és különböző töltet

(a) Fém Pall gyűrű, (b) Raschig gyűrű, (c) műanyag Pall gyűrű, (d) műanyag Super Intalox nyereg, (e) kerámia Intalox nyereg, (f) fém intalox nyereg, (g) Berl nyereg

A folyadékot a toronyba felül bepermetezik a töltelékre. A folyadék a töltelékágyon keresztül lefelé csörgedez nagy felületet képezve a gáz érintkeztetéséhez. A töltelékes abszorberekben a folyadék kis gázsebességeknél a tölteten vékony filmként folyik, a fázisok érintkezési felülete ezért a töltet nedvesített felülete. Emiatt a tökéletes oszlop a filmszlop egy változatának tekinthető. Míg azonban a filmszlopban a készülék teljes magasságában létrejön a folyadékfilm, a töltelékes oszlopban minden töltetelem mentén megújul. Az átadási tényező növelése a film abszorberekhez hasonlóan itt is a gázsebesség és a turbulencia növelésével érhető el, ez azonban együtt jár a nyomásesés növekedésével. A gázsebesség növelésével el lehet jutni, az úgynevezett emulgeáció tartományába. A berendezés emulgeációs üzemállapotában a legnagyobb mértékű az átadás, ekkor ugyanis az átadási tényező megnő, és az átadás nem csak a töltet nedvesített felületén játszódik le, hanem a töltetek közötti térben kialakuló, megújuló cseppek, illetve buborékok felületén is. Ha tovább növekszik a gázsebesség, az oszlop elárasztódik. Ez egy jól definiált sebességértéknél következik be, ekkor a folyadék már nem képes az oszlopban lefelé haladni. Ennél nagyobb gázsebességnél a gáz a folyadékot kihordja az oszlopból.

Töltet. A fajlagos átadási felületet a (m^2/m^3) alapvetően a töltet határozza meg. Minden esetben műszaki-gazdasági megfontolások alapján kell kiválasztani az optimális töltetet. A torony töltelékének meg kell felelnie a következő követelményeknek. A folyadék és gáz részére nagy felületet biztosítson. A tölteléknek a megtöltött készülékrész egységnyi térfogatára vonatkoztatott felülete, a fajlagos felület a legyen nagy, de nem mikroszkopikus értelemben. Koksodaraboknak például porózus szerkezetük következtében nagy a felülete, de a pórusok nagy részét elzárja a csörgedező folyadékfilm. A töltelék a fajlagos felülete mindenestre mindig nagyobb, mint a folyadék és gáz fázisfelülete. Rendelkezzék a közegek áramlása szempontjából megkívánt jellemzőkkel. Ez rendszerint azt jelenti, hogy a töltelék szabad térfogat hányada nagy legyen. A tölteléknek szűk torony keresztmetszeteken nagy térfogatáramlást kell lehetővé tennie, feltöltődés vagy elárasztás nélkül, a gáz kis nyomásesése mellett. A gáz nyomásesésének nagyobb részben legyen áramlási súrlódásos, mint a többszöri térfogatváltozás eredménye, mivel előbbi sokkal hatékonyabban segíti elő a nagy anyagátadási tényezők elérését. A töltet legyen kémiaiilag ellenálló, az eljárásban résztvevő közegekkel szemben, legyen megfelelő szilárdságú és olcsó. A töltet anyaga: kerámia, porcelán, acél, műanyag, fa vagy grafit is lehet. Különböző alakú tölteteket használnak. A legelterjedtebb a vékony falú kerámia gyűrű, melynek átmérője és magassága megegyezik (Rasching -gyűrű). Mérete 10-150 mm-es lehet. A nagyobb méretűeket az oszlopban rendezetten, a kisebbeket ömlesztve rakják be. A töltet méretének növelésével csökken a hidraulikus ellenállás, de a fajlagos felület is. A rendezett töltet ellenállása kisebb, mint a rendezetlené, de az egyenletes nedvesítés rendezett töltetnél nehezen megoldható. A Rasching- gyűrű töltetet azért használják szívesen, mert gyártása egyszerű, olcsó. A fajlagos felület növelésére a töltet alakján módosítani is szoktak, a gyűrűt belső válaszfalal, falakkal képezik ki. Eltérő alakú töltet a Berl-nyereg, az Intalox-nyereg. Ezeknek a kerámia tölteteknek az átadási tulajdonsága jobb, nyomásesésük kisebb, mint a Rasching-gyűrű tölteté, áruk viszont magasabb. Újabb, speciális oszlopokban még fémszalagból készülő spirális töltetet, fémháló töltetet is használnak. Ezeket szabályosan rakják be. A töltet méretének megválasztásánál figyelembe kell venni azt, hogy minél nagyobb a töltet, annál nagyobb lehet a gázsebesség, és annál kisebb az oszlop hidraulikus ellenállása. A töltet kis mérete viszont nagy fajlagos felületet jelent. Ezért az utóbbit akkor alkalmazzák, ha a hidraulikus ellenállás megnövekedése nem okoz problémát, tehát például nyomás alatti abszorpciónál.

Bár több készüléktípus használható gáz és folyadék folyamatos ellenáramú érintkeztetésére, az ipari berendezések legnagyobb része vagy tányéros, vagy töltelékes torony típusú, mivel ezek a szerkezetek bizonyultak megbízhatónak és hatásosnak. Mindegyiknek megvan a speciális

használhatósági területe. A *töltelékes tornyokban* a nyomásesés általában kisebb, mint a *tányéros* típusnál, ennek következtében különösen alkalmas vákuum műveletekhez. Gyártási költsége kisebb, legalábbis kis és közepes átmérők esetén, ha korrozív közeget kell feldolgozni. Nagy átmérőjű töltelékes tornyok általában nem kedvezők, mivel nehézséget okoz a folyadék többszörös ismételt elosztása, és a költségek is nagyobbak. A *tányéros tornyokban* fentiekkel szemben a feldolgozandó folyadék és gázáramlás mennyiségei tág határok között változtathatók. A gáz- vagy folyadékáram közbenső kivezetése könnyen megoldható, hűtő csőkiágok beszerelése, valamint a tisztítás búvó- vagy kézi nyílásokon keresztül szintén lehetséges. A folyadék- és gázelosztással kapcsolatban jóformán nincsenek nehézségek, a nyomásesés azonban aránylag nagy. Nagyobb méreteknél gazdaságosabbak, mint a töltelékes tornyok.

18. Gőz-folyadék rendszerek közötti anyagtranszport, desztilláció

A gőzök és folyadékok közötti anyagtranszport jellegzetes művelete a desztilláció, vagy lepárlás. A desztilláció az oldatok komponenseinek szétválasztására használt módszer, amely az anyagnak a gáz- és a folyadékfázis közötti megoszlásán alapszik olyan esetekben, amikor mindegyik komponens mindkét fázisban jelen van. Ahelyett, hogy a másik fázis létrejöttéhez újabb anyagot vezetnénk az elegybe, amint azt a gázabszorpciónál vagy deszorpciónál tesszük, az új fázist az eredeti oldatból elpárologtatással vagy kondenzálással hozzuk létre. A desztillációban a fázisok mindegyik komponense diffundál. Ezeket a műveleteket az egyidejű hő- és anyagátadás jellemzi. Ezen kívül az anyag párolgása vagy kondenzálása következtében a latens hőket, valamint néha az oldáshő figyelembevétele is szükséges. A desztillációban az anyagátadáshoz szükséges új fázist hő hozzáadásával vagy elvonásával hozzuk létre az eredetiből, míg az abszorpciónál ezt az új fázist kívülről vezetjük a rendszerbe, mint például a vízzel történő gázabszorpciónál a vizet.

A desztilláció és a többi művelet, elsősorban a bepárlás és a gázabszorpció közötti különbség megértéséhez idézzünk néhány jellemző példát. Közöséges só vizes oldatának szétválasztására a vizet teljesen el lehet párologtatni az oldatból anélkül, hogy a só is elpárologna, mivel ez utóbbi az adott körülmények között nem illékony. Tehát az illékony oldószer és nem illó szilárd anyag oldatát bepárlással dolgozzuk fel. A bepárlás rendszerint víz (oldószer) eltávolítása a nem illékony anyagok oldatából elgőzölögtetéssel. A bepárlás eredményeként az oldószer egy része eltávozik. Ezzel szemben a lepárlást (desztillációt) az olyan oldatok szétválasztása alkalmazzuk, amelyeknek minden komponense számottevően illékony. Vizsgáljunk meg például a már említett a vizes ammóniaoldat komponenseinek szétválasztását. Az ammónia vizes oldatából, ha azt a folyadékban lényegében oldhatatlan levegővel érintkeztetjük, az ammónia kihajtható (deszorbeálható), de ekkor az ammónia vízgőzzel és levegővel elegyedik, és nem kapjuk meg tiszta alakban. Ezzel szemben az oldatot melegítéssel részlegesen elpárologtathatjuk, és így egy olyan gőzfázist kapunk, ami csak vizet és ammóniát tartalmaz. Mivel a gőz dúsabb ammóniában, mint a visszamaradó folyadék, ez bizonyos elválasztást eredményez. A fázisok megfelelő kezelésével vagy ismételt elpárologtatással és kondenzálással rendszerint meg lehet valósítani a kívánt teljes elválasztást, és az elegy mindkét komponensét megfelelően tiszta állapotban lehet megkapni. Különösen vonatkozik ez a megállapítás a rektifikálásra. A rektifikáció a desztilláció és a deflegmáció együttes alkalmazása. A kiforralóból felszálló gőzök ellenáramban többször érintkeznek a kondenzátorból lefolyó folyadékkal, és a tetszőleges tisztaságú szétválasztás ilyen módon valósítható meg.

A desztillációnál az új fázis az eredeti fázistól hőtartalmában különbözik. A hő minden nehézség nélkül közölhető vagy elvonható, bár természetesen ennek költségét figyelembe kell venni. A bepárlásnál és a lepárlásnál is nagy szerepe van az elpárologtatásnak és a forrásnak. A folyadék halmazállapotú anyag gáz halmazállapotúvá alakulása, ha csupán a felületen történik, akkor elpárolgás, és ha a folyadék térfogatára is kiterjed, akkor forrás. Mind a két folyamat lehet totális, ekkor minden folyadékból gáz lesz, vagy részleges, és lehet frakcionált is, vagy többször ismételt. A kondenzációval a keletkező gőzelegyet kondenzáltatjuk. A művelet többször ismételhető. A kondenzáció az elpárologtatás és a forrás inverz művelete. Lehet egyszerű, amikor a teljes gőzmennyiséget cseppfolyósítják, vagy frakcionált, amikor egymásután több hőmérsékleten történik a kondenzáció. Ezt a műveletet deflegmációnak is nevezik.

Amint már említettük az abszorpciós vagy deszorpciós műveletek, amelyek idegen anyag bevezetésén alapulnak, új oldatot eredményeznek, amelyet még valamelyik diffúziós művelettel el kell választani kivéve, ha ez az új oldat közvetlenül is felhasználható. A

lepárlásnak azonban, mint elválasztási műveletnek vannak bizonyos korlátai is. Az abszorpció az adszorpció vagy extrakció műveletek során, ahol idegen anyagot vezetünk be, hogy a megoszlás céljára új fázist kapjunk, rendszerint az oldószerek nagy választékából válogathatunk azért, hogy a lehető legnagyobb elválasztó hatást érjük el. Például a víz hatástalan a szénhidrogéngázoknak gázelegyekből való abszorbeálásában, helyette cseppfolyós szénhidrogént választunk, amely nagyon jól oldja a gázt. A lepárlásban azonban nincs ilyen választási lehetőség. A gázfázis, amelyet a folyadékból forralással képezhetünk, csak a folyadék komponenseit tartalmazza. A gázfázis emiatt kémiaiilag nagyon hasonló a folyadékhoz, az összetételnek a komponensek két fázis közötti megoszlásából származó változása rendszerint nem nagy. Néhány esetben az összetétel változás olyan kicsi, hogy a folyamat gyakorlatilag nem alkalmazható, sőt az is lehetséges, hogy semmiféle változás nincs az összetételben. Mindemellett a közvetlen elválasztás, amely lepárlással rendszerint elérhető, a tiszta termék előállítására céljából nem igényel további eljárást.

18.1. Desztillációs egyensúly

Két vagy több illékony komponenset tartalmazó homogén folyadékelegy legelterjedtebb szétválasztási módja a lepárlás. A lepárlás olyan művelet, amely magában foglalja a szétválasztandó elegy részleges elpárologtatását, és a keletkező gőzök egyszeri vagy többszöri kondenzáltatását. A kondenzálás eredményeként a keletkező folyadékelegy összetétele különbözik a kiindulástól. Két elvileg különböző lepárlási mód létezik, a desztillálás és a rektifikálás.

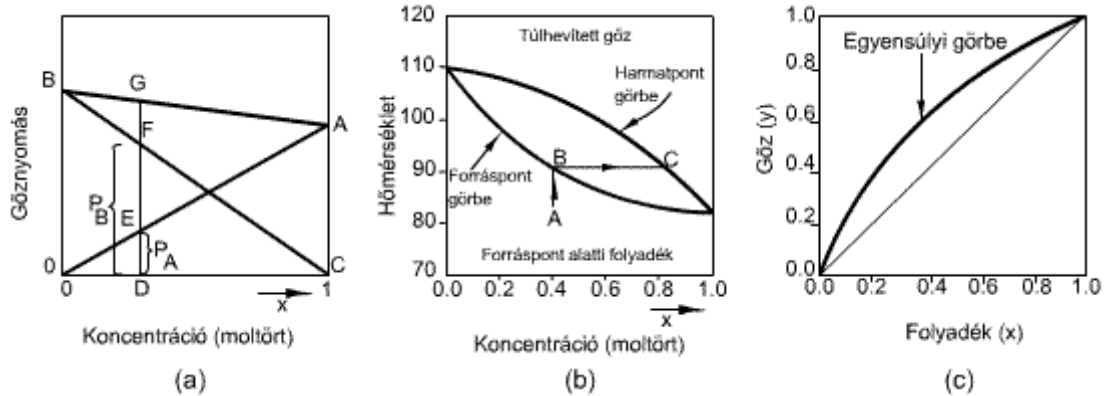
A desztilláció a folyadékelegy illékony komponenseinek alkotórészeire történő szétválasztása, az elegy részleges elgőzölögtetésével, és az elkülönített gőz, valamint a maradék visszanyerésével. Az eredeti elegy illékonyabb alkotórészei a gőzben, (gázfázisba), a kevésbé illékonyak a folyékony maradékban dúsulnak. Desztilláció általában olyan elgőzölögtetési művelet, amelyben a keletkező gőzt nyerik vissza, általában kondenzációval. A desztilláció tárgyalása előtt, meg kell ismerkednünk a gőz-folyadék egyensúlyi viszonyokkal.

Az egyszerűség kedvéért a kétkomponensű (biner) elegyek desztillációjával foglalkozunk, ezért a biner elegy egyensúlyi viszonyait ismertetjük. Azokat a kétkomponensű elegyeket vizsgáljuk, amelyekben a cseppfolyós komponensek homogén oldatot alkotnak és minden arányban elegyednek. A homogén oldat nem szükségképpen ideális, de nem következnek be a maximális vagy minimális forráspontok komplikációi. Az A és B kétkomponensű elegy A komponensét fogjuk az illékonyabbnak tekinteni, azaz a tiszta A gőznyomása bármely hőmérsékleten nagyobb a tiszta B gőznyomásánál.

Kétkomponensű ($K=2$) rendszerekben, ha kémiai reakció nem játszódik le, a folyadék- és gőzfázis ($F=2$) jelenlétében a fázis szabálynak megfelelően a rendszer szabadsági foka: $S_z=K+2-F=2$. Ebből az következik, hogy egyensúlyi állapotban a rendszer állapotát meghatározó paraméterek közül (nyomás, hőmérséklet, koncentráció) kettő választható meg szabadon.

Az elegy tiszta komponenseire vonatkozó gőz-folyadék egyensúly természetesen a gőznyomásuk és hőmérsékletük közötti összefüggés. A kétkomponensű elegyek esetében még egy további változóra, a koncentrációra kell tekintettel lennünk. A móltörtök a legalkalmasabb koncentráció kifejezések, és x , az illékonyabb A anyag móltörtje a folyadékban és y^* az A megfelelő egyensúlyi móltörtje a gőzben.

A biner gőz-folyadék elegy jellemzésére előnyösen használhatók a fázisdiagramok. A **161. ábra** egy ideális A-B elegy fázisdiagramjait mutatjuk be.



161. ábra: Gőz-folyadék rendszer egyensúlya.

Az ideális elegy követi a Raoult-törvényt, vagyis a komponensek, jelen esetben az A komponens, p_A parciális nyomása a gőzfázisban, arányos a komponens x_A folyadékfázisbeli móltörtjével. Az arányossági tényező P_A^o a tiszta A komponens, adott hőmérséklethez tartozó, telített gőzének nyomása. A Raoult törvény mindkét komponensre:

$$(4.1) \quad p_A = P_A^o x_A \quad \text{és} \quad p_B = P_B^o x_B$$

A Dalton törvénynek megfelelően, ($p_{\bar{o}} = \sum p_i$ vagyis) a parciális nyomások összege egyenlő az összes nyomással. Ideális esetben az A komponens p_A parciális nyomása arányos a gőzfázisbeli y_A mól törtjével, és az arányossági tényező a gőzfázis $p_{\bar{o}}$ összes nyomása:

$$(4.2) \quad p_A = p_{\bar{o}} y_A \quad \text{és} \quad p_B = p_{\bar{o}} y_B$$

A lepárlási folyamatokat általában állandó nyomáson valósítják meg, ezért főleg az ilyen feltételek mellett szerkesztett fázisdiagramokat használjuk. A kétfázisú műveletek számítására az x - y diagramok az alkalmasabbak, ezért ezekkel a görbékkel adjuk meg az egyensúlyi összetételt. Az (4.1) és (4.2) egyenletek adják a Raoult-Dalton törvényt, amely mindkét komponensre:

$$(4.3) \quad y_A = \frac{P_A^o}{p_{\bar{o}}} x_A = K_A x_A \quad \text{és} \quad y_B = \frac{P_B^o}{p_{\bar{o}}} x_B = K_B x_B$$

A móltörtek összege: $y_A + y_B = 1$, így a (4.3) egyenletekből

$$(4.4) \quad \frac{P_A^o x_A}{p_{\bar{o}}} + \frac{P_B^o (1 - x_A)}{p_{\bar{o}}} = 1$$

és

$$(4.5) \quad x_A = \frac{p_{\bar{o}} - P_B^o}{P_A^o - P_B^o}$$

Adott hőmérsékletre tartozó P_A^o és P_B^o értékekhez, p_o összes nyomáson az (4.5) és az (4.3) egyenletekkel kiszámíthatjuk az x_A valamint az y_A értékeket.

A gőzfázis y_A , és a folyadék fázis x_A egyensúlyi összetételek közötti függvény kapcsolatot kifejezhetjük más módon is, ami alkalmasabb a számításra, ha definiáljuk az illékonyságot, mint a parciális nyomás és a móltört hányadosát, így

$$A \text{ komponens illékonysága} = \frac{P_A}{x_A}, \text{ és } B \text{ komponens illékonysága} = \frac{P_B}{x_B}$$

A két illékonyságának hányadosa az α relatív illékonyságot adja:

$$(4.6) \quad \alpha = \frac{P_A x_B}{x_A P_B}$$

A (4.6) egyenletben a parciális nyomásokat fejezzük ki a Raoult törvénnyel, (4.1) egyenlet:

$$(4.7) \quad \alpha = \frac{P_A^o x_A x_B}{x_A P_B^o x_B} = \frac{P_A^o}{P_B^o} = \frac{K_A}{K_B}$$

Amennyiben P_A^o/P_B^o és α állandó, akkor az y és x értékei jobban számíthatók a következő összefüggések alapján. A relatív illékonyságot kifejezhetjük a móltörttekkel is, ha a (4.6) egyenletbe a parciális nyomások helyébe most a $P_A = p_o y_A$ és $P_B = p_o y_B$ (4.2) egyenlet szerinti összefüggéseket írjuk:

$$(4.8) \quad \alpha = \frac{p_o y_A x_B}{x_A p_o y_B} = \frac{y_A x_B}{y_B x_A}$$

vagy

$$(4.9) \quad \frac{y_A}{y_B} = \alpha \frac{x_A}{x_B}$$

Két komponens esetén, $y_B = 1 - y_A$, és $x_B = 1 - x_A$, így

$$(4.10) \quad \alpha = \frac{y_A}{1 - y_A} \frac{1 - x_A}{x_A}$$

vagy

$$(4.11) \quad y = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x}$$

és

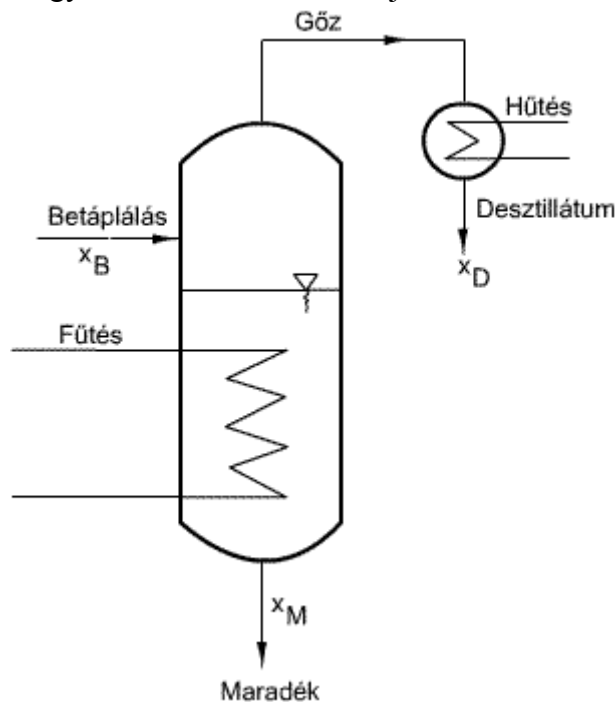
$$(4.12) \quad x = \frac{y}{\alpha - (\alpha - 1)y}.$$

Az indexeket elhagyhatjuk, mert ugyanarra, az illékonyabb komponensre vonatkoznak. A (4.11) és a (4.12) egyenletek egyenlő szárú hiperbola egyenletei, ami ideális, vagy közel ideális elegyekre alkalmazhatók. Amennyiben az elegy nem ideális, akkor az x - y összetartozó értékeket táblázatosan adják meg.

A desztillációt is alapvetően két csoportba sorolhatjuk, a szakaszos és a folyamatos desztilláció. A könnyebb kezelhetőség miatt a desztillációt, és majd a rektifikációt is a folyamatos eljárással kezdjük. A továbbiakban csak az egyszerű folyamatos desztillációval és az egyensúlyi (flash) desztillációval valamint az egyszerű szakaszos vagy differenciális desztillációval, majd a rektifikálással foglalkozunk.

18.2. Egyszerű folyamatos desztilláció és az egyensúlyi desztilláció

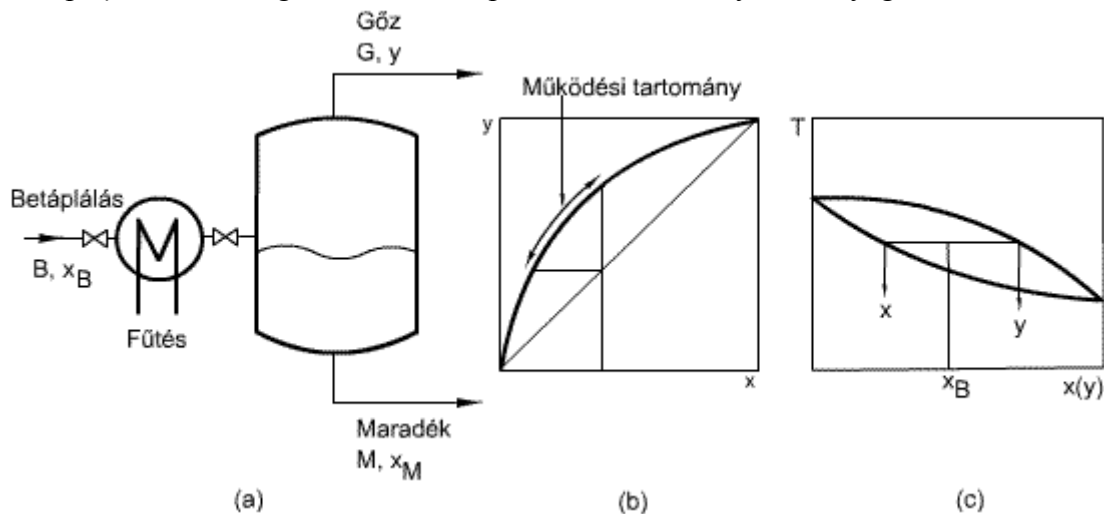
Az egyszerű folyamatos desztillációs műveletben a folyamatosan betáplált elegyet a desztilláló üstben vagy forralóban részlegesen elgőzöltetik, a kapott gőz- és folyadékfázist folyamatosan elvezetik olyan sebességgel, hogy a berendezésben folyadékszint állandó maradjon. A gőzfázist kondenzáltatják, és kapják a D desztillátumot. A folyadékfázis az üst alján M maradékként hagyja el a kiforralót. Az egyszerű desztilláció elvi rajza az **162. ábra** láthatjuk.



162. ábra: Egyszerű folyamatos desztilláció elvi rajza.

A flash- vagy egyensúlyi desztilláció abban különbözik az egyszerű folyamatos desztillációtól, hogy itt a szétválasztandó elegyet előzőleg egy lepárlóban felmelegítik, ami igen gyakran egy csökemence, majd a gőz-folyadék elegy egy expanziós szelepen át a flash kamrába juttatják. A gőz teljes tömege egész idő alatt érintkezik a folyadékkal, így az elvezetett gőz- és folyadékfázis egymással egyensúlyban van. A flash desztillációt, amit az **163. ábra** mutatunk be, a petrokémiai iparban a nyersolaj szeparációjára széles körben alkalmazzák. A nyersolaj 400 K és 900 kPa nyomáson lép be a csökemencébe, és egy expanziós szele után a flash kamrában 400 kPa nyomáson a jellemző 520 K egyensúlyi hőmérséklet áll be.

A műveleti számításokat az anyagmérlegből és az egyensúlyi összefüggésekből végezhetjük. Legyen B a desztilláló üstbe vagy a flash kamrába belépő x_B összetételű szétválasztandó elegy-, G a kilépő y összetételű gőz-, és M a kilépő x összetételű folyadék anyagárama.



163. ábra: A flash desztilláció elvi rajza.

Az anyagmérleg:

$$(4.13) \quad B = G + M.$$

Illékonyabb anyag komponens mérlege:

$$(4.14) \quad Bx_B = Gy + Mx$$

Figyelembe véve a (5.13) egyenletet:

$$(4.15) \quad Bx_B = Gy + (B - G)x$$

Az (4.15) egyenletből:

$$(4.16) \quad \frac{G}{B} = \frac{x_B - x}{y - x},$$

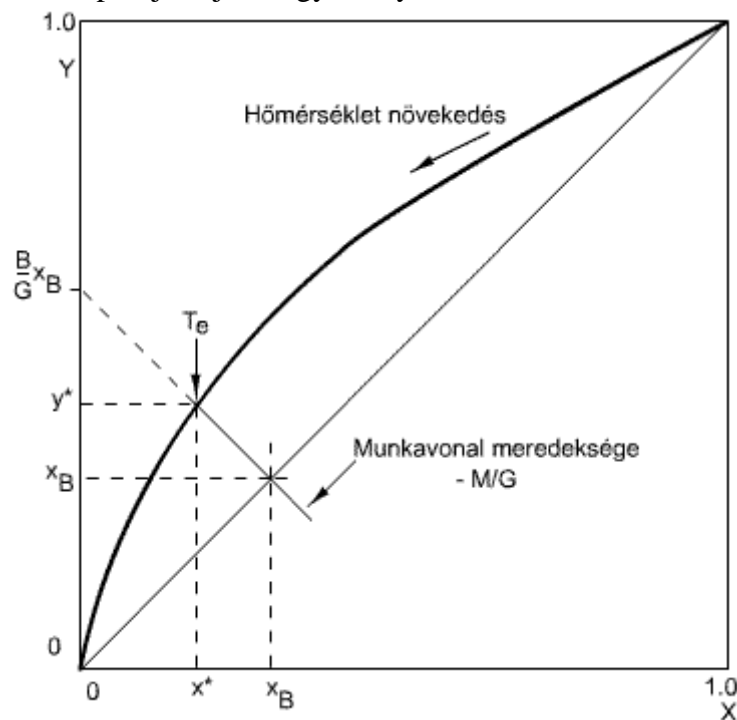
vagy az y -t kifejezve a munkavonal egyenletét kapjuk:

$$(4.17) \quad y = -\left(\frac{B}{G} - 1\right)x + \frac{B}{G}x_B = -\frac{M}{G}x + \frac{B}{G}x_B.$$

Az (4.17) munkavonal egyenlete és az egyensúlyi összefüggés például az (4.7) egyenlet (K faktorok) ismeretében a kilépő egyensúlyban levő fázisok koncentrációi analitikusan kiszámíthatók.

Az egyensúlyi értékek grafikus meghatározásához meg kell szerkeszteni a munkavonal egyenletét, amit az (4.17) egyenlet két jellegzetes pontja ismeretében egyszerűen elvégezhető. Az egyik pont legyen az egyenletbe $x = x_B$ behelyettesítés esetén (x_B, x_B) pont, és a másik pont $x = 0$ behelyettesítés esetén a $y = Bx_B/G$ a tengelymetszet. Ezután meg kell rajzolni, például

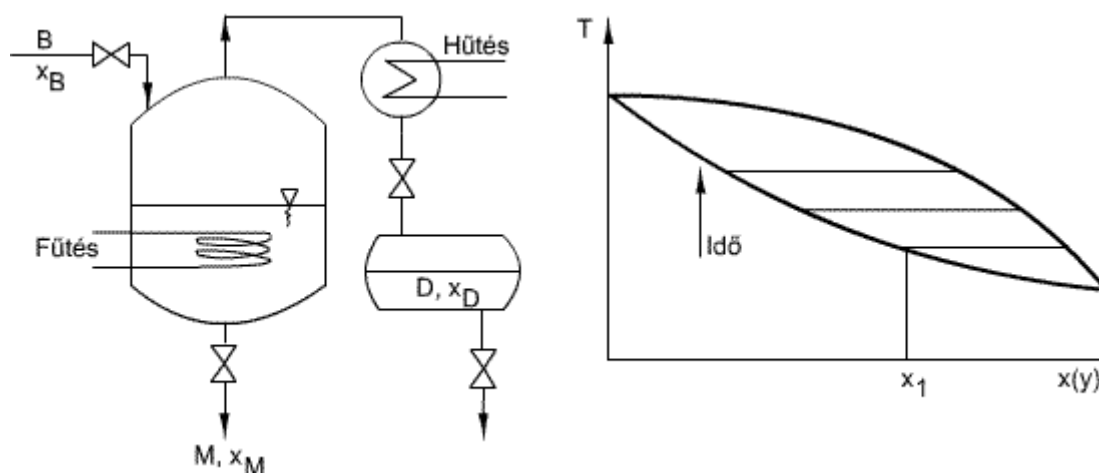
táblázati adatokból, az egyensúlyi görbét. A **164. ábra** bemutatott munkavonal valamint az egyensúlyi görbe metszéspontja adja az egyensúlyi értékeket.



164. ábra: Az egyensúlyi desztilláció, egyensúlyi értékeinek grafikus meghatározása.

18.3. Egyszerű szakaszos, differenciális desztilláció.

A szakaszos desztillációnál a szétválasztandó anyag egy adagját (sarzs) töltik be a desztilláló üstbe. Ezután az elegyet elkezdik melegíteni majd forralni, a gőzöket folyamatosan elvezetik, kondenzáltatják és a képződött desztillátumot gyűjtik mindaddig, míg az átlagos összetételük a kívánt értéket el nem éri. A folyamat végén az üstben maradt maradékot, hűtés után leengedik. Ez egy klasszikus egyszerű desztillációs művelet, amellyel először Rayleigh foglalkozott. A differenciális desztilláció elvi rajza a **165. ábra** látható.



165. ábra: A differenciális desztilláció elvi rajza.

Az üstben, kezdetben van B mólnyi mennyiségű (A és C komponens móljainak összege), és x_B összetételű folyadék (x az illékonyabb komponens móltörtje). Az üstből dt idő alatt $-dB$ mennyiségű folyadék távozik, és dG mennyiség megjelenik a gőzfázisban. Az anyagmérleg:

$$(4.18) \quad -dB = dG.$$

Az üstből $-dB=dG$ mólnyi, a folyadékkal egyensúlyban lévő, y összetételű párlat, amelynek $ydB = ydG$ mól az illékonyabb komponens tartalma. Az üstben, kezdetben B mól mennyiségű és x_B összetételű folyadék van, a folyadék mennyiségének csökkenése $-d(Bx)$.

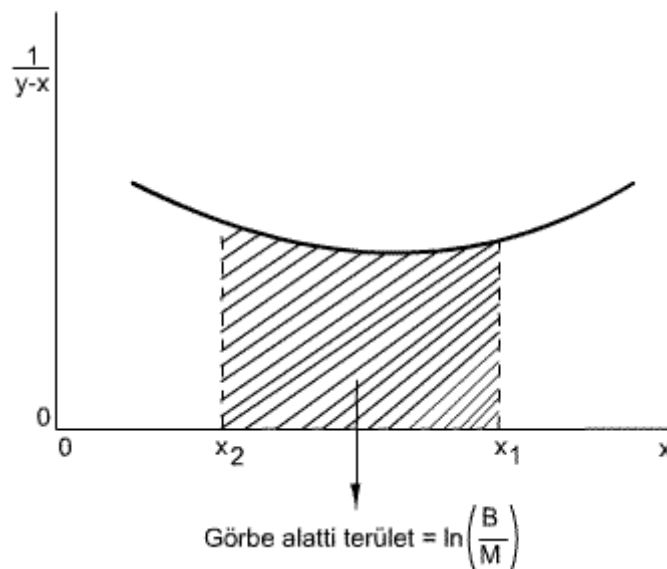
A komponens mérleg:

$$(4.19) \quad ydG = -ydB = -d(Bx) = -Bdx - xdB$$

Az (4.19) egyenletet átrendezve, és integrálva:

$$(4.20) \quad \ln \frac{B}{M} = \int_{x_M}^{x_B} \frac{dx}{(y-x)}$$

kapjuk a Rayleigh egyenletet, ahol B a desztilláció kezdetén a kiindulási elegy összes móljainak száma és x_B az illékonyabb komponens móltörtje, M a desztilláció végén a desztilláló üstben maradt folyadék móljainak száma és x_M a mól törtje. Ha egyensúly tételezhető fel a desztilláló üst folyadékja és gőze között, akkor az (4.20) egyenletet jobb oldala meghatározható grafikus integrálással. A szakkönyvekben táblázatosan megadott biner elegy x - y egyensúlyi adataiból az $1/(y-x)$ értékeit x függvényében, koordináta rendszerben ábrázoljuk a **166. ábra**, és az x_B és x_M határok között, a görbe alatti terület adja a grafikus integrál értékét. Természetesen, ha a táblázatokból vett egyensúlyi értékek pontjaira egy görbét illesztünk, akkor analitikusan is kiszámíthatjuk az integrál értékét.



166. ábra: Rayleigh egyenlet grafikus meghatározása.

Az integrálás közvetlenül is elvégezhető, ha például bizonyos tartományban az egyensúlyi összefüggés lineáris $y = mx+c$, vagy $y=Kx$ (5.3) egyenlet, és valamelyiket behelyettesítve az (4.20) egyenletbe, az integrálás analitikusan elvégezhető:

$$(4.21) \quad \frac{M}{B} = \left(\frac{y_M - x_M}{y_D - x_D} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Ha α relatív illékonyság állandó vagy megközelítőleg állandó, és ha a desztillándó elegy csak két komponensből áll, (4.21) egyenletnek $y = \alpha x / (1 + (\alpha - 1)x)$ az (4.20) egyenletbe való helyettesítése közvetlen integrálást tesz lehetővé:

$$(4.22) \quad \ln \frac{M}{B} = \frac{1}{\alpha - 1} \ln \left[\frac{x_M(1 - x_B)}{x_B(1 - x_M)} \right] + \ln \frac{1 - x_B}{1 - x_M}.$$

A komponens mérlegből

$$(4.23) \quad Bx_B = Mx_M + (B - M)x_D$$

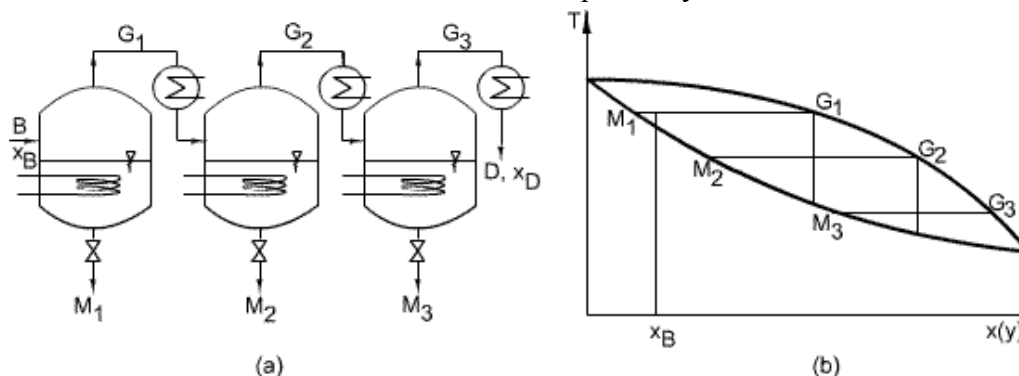
A desztillátum átlagos összetétele

$$(4.24) \quad x_D = \frac{Bx_B - Mx_M}{B - M}$$

az (4.24) egyszerűen számolható.

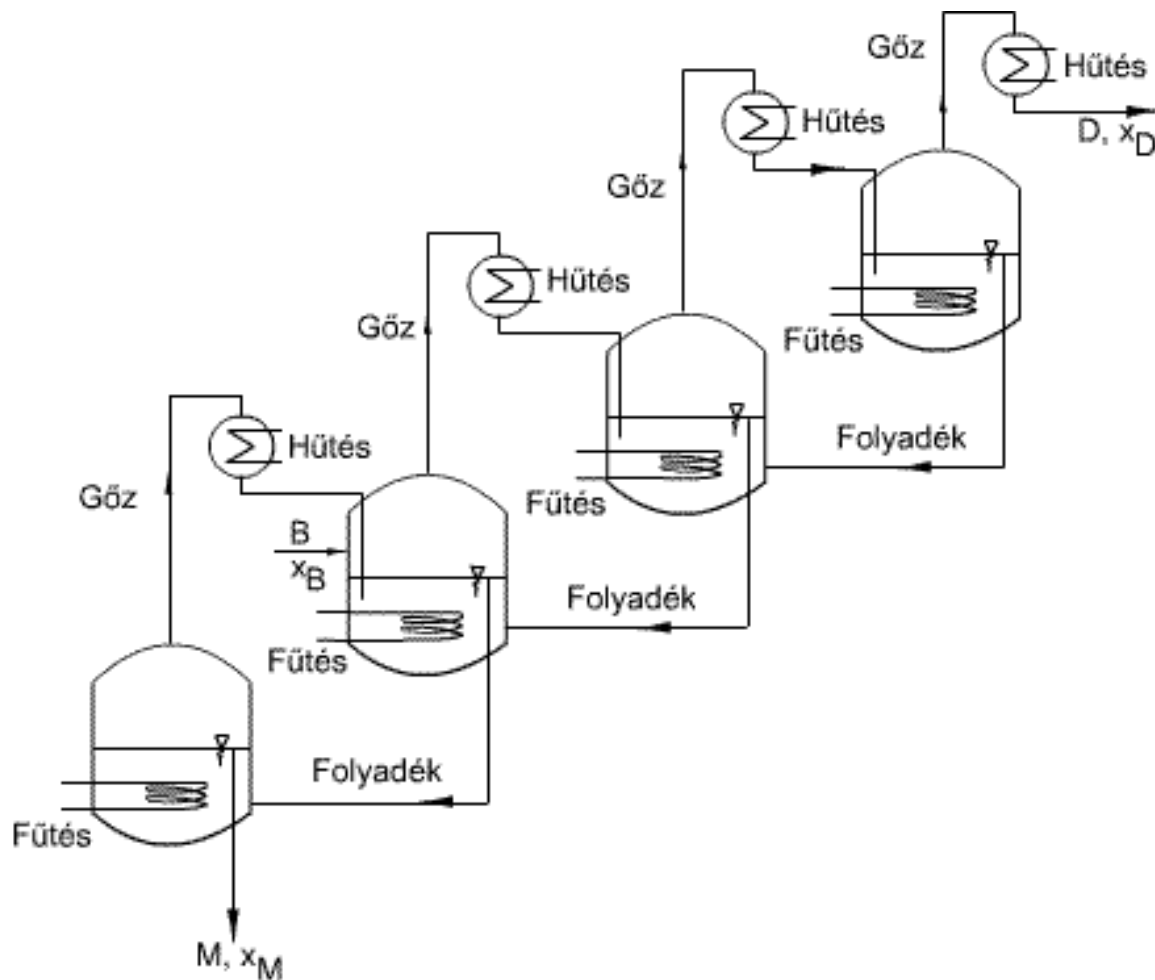
18.4. Többfokozatú desztilláció

Az egyensúlyi-, illetve az egyszerű folyamatos desztilláció általában nem eredményez jó szétválasztást. Egy többfokozatú desztillációs készülékben, a desztillátum ismételt újradesztillálásával, a hatékonyság növelhető, mint azt a **167. ábra** láthatjuk. Az ilyen rendszer elvileg tetszőlegesen dúsított desztillátum előállítását teszi lehetővé, hibája azonban, hogy az újradesztillálások számának növekedése mértékében csökken a desztillátum mennyisége, mert minden üstben a rendszerből eltávolítandó anyag marad vissza. Amint a fázisdiagram mutatja, az üstmaradék összetétele közel áll az előző üstbe táplált folyadék összetételéhez.



167. ábra: Többfokozatú desztilláció

Célszerű tehát az üstmaradékot visszavezetni az előző üstbe, így ellenáramú desztilláció jön létre (**168. ábra**), amelynél már sokkal jobb a desztilláció kihozatala, mivel nem keletkeznek közbülső termékek, csak az M üstmaradékot távolítják el az első üstből, és a D desztillátumot az utolsó üstből.

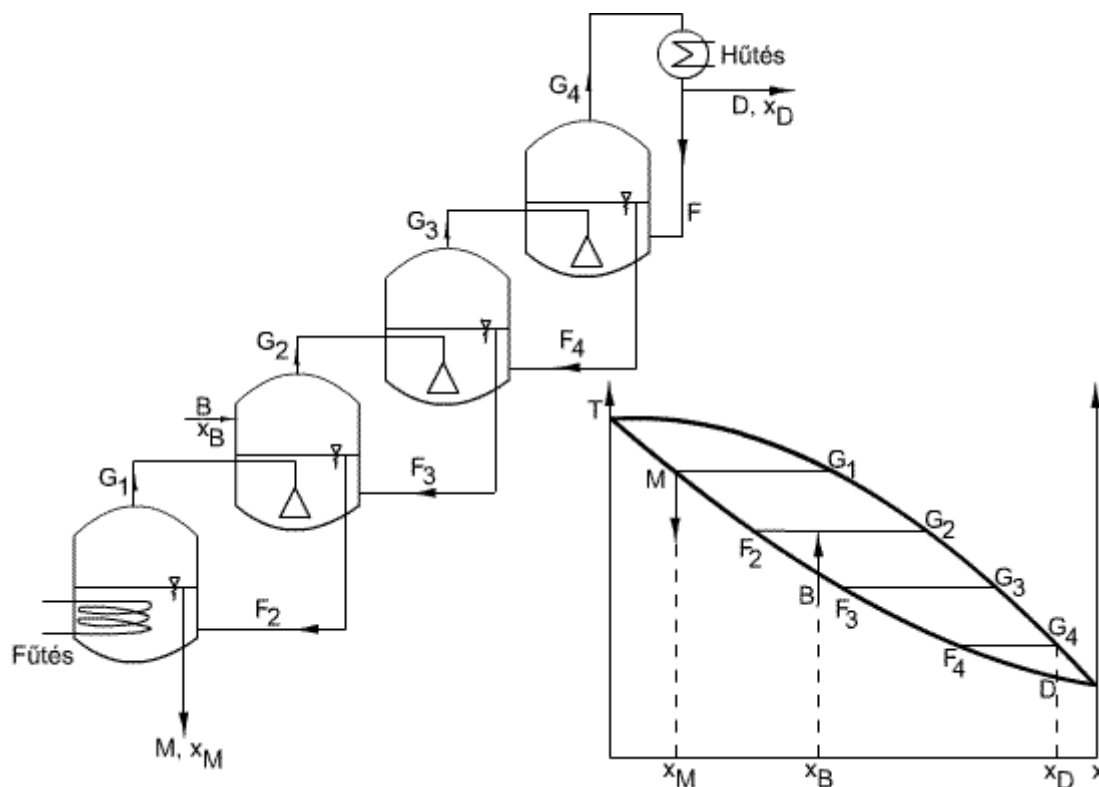


168. ábra: Az ellenáramú desztilláció elve

Az üstök lépcsőzetesen való beállítása módot ad a folyadék és gőz közötti gravitációs ellenáramú rendszer kialakítását. Az ilyen rendszer lehetővé teszi a desztillátum nagyfokú dúsítását. Ha a B kiindulási elegy összetételéhez képest elég nagy változást akarunk elérni a maradékban, akkor a betápláló üst alá néhány további üstöt kell beállítani, mint azt a 4.8. ábrán láthatjuk. Ennek a rendszernek a hátránya a nagy energiaigény, ugyanis az üstöket fűteni és a gőzöket kondenzálni kell.

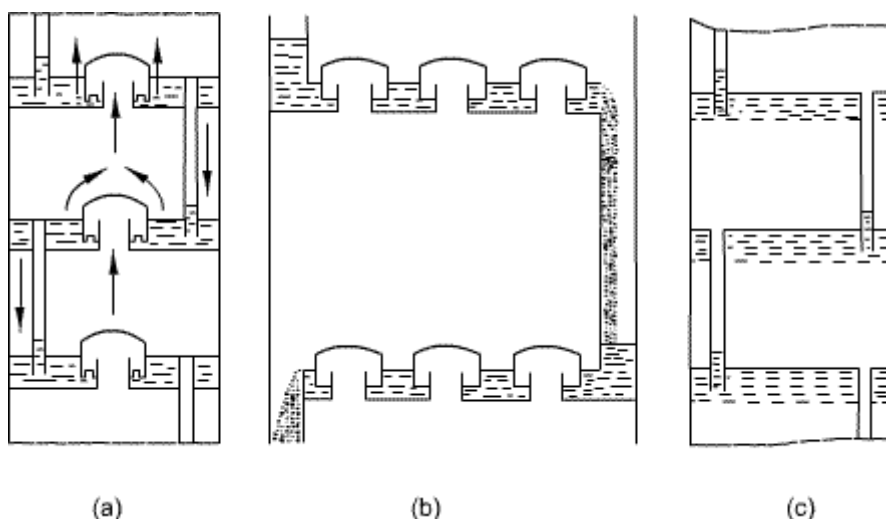
18.5. Rektifikálás

Az ellenáramú desztilláció hátrányát a rektifikálás alkalmazásával küszöbölhetjük ki. A **168. ábra** mutatja, mindegyik üstben a forráspont nagyobb, mint a magasabban levő szomszédos üstben. Így lehetővé válik a magasabban levő üst fűtése az alacsonyabb üstből távozó gőzökkel, vagyis így a több fokozatú bepárlók elvét alkalmazzuk. Ezzel feleslegessé válik az egyes üstökből távozó gőzök kondenzálása is, ugyanis a gőzöket kondenzálás nélkül a magasabban fekvő üstbe vezetik be, és így külön fűtőtest alkalmazása nélkül, direkt gőzzel fűtünk. Ilyen rendszert mutat a **169. ábra**, ahol csak a legmagasabban fekvő üst folyadékellátását kell kondenzátorral biztosítani, úgy hogy az utolsó üst fölé egy kondenzátort kell csatlakoztatni. A távozó gőzök kondenzálására, és a kondenzálódott folyadék egy részét vissza kell vezetni az üstbe, a többi desztillátumként elvezethető. Az ilyen rendszerben csak a legalul elhelyezett üstöt kell fűteni.



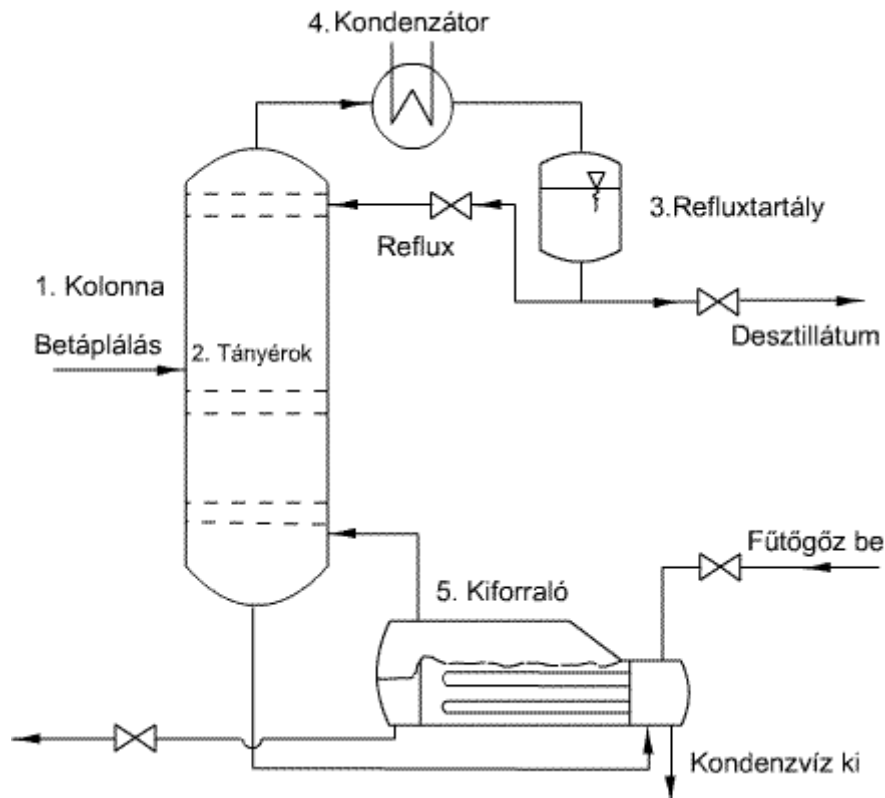
169. ábra: A rektifikálás elve.

Végül a konstrukció az üstök egymás fölé helyezésével tökéletesíthető, amelyek úgynevezett tányérok alkotnak. A tányérok, amint azt a **170. ábra** láthatjuk, egy csőszerű berendezésbe, kolonnába helyezik el. A tányérok, hasonló az abszorpciónál tárgyaltakhoz, különféle sapkás, szita, rostélyos és egyéb kialakításúak lehetnek azért, hogy a gőz átbuborékoltatása közben gőz-folyadék érintkezése minél intenzívebb legyen. Tányérok között lehet különbség a folyadékelfvezetés módjában is, de elvileg itt az üstök szerepét töltik be.



170. ábra: Rektifikáló tányértípusok

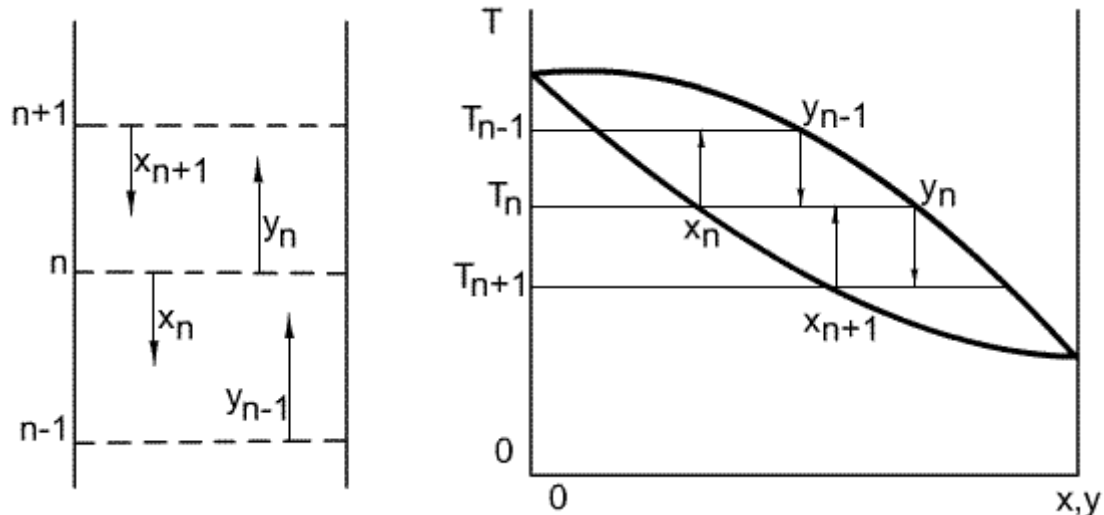
Az egymás fölé helyezett tányérok összessége a tányérok befogadó cső, visszaforráló, kondenzátor és reflux elosztó tartály, együttese egy rektifikáló kolonnát alkotnak, amelynek az elvi rajza a **171. ábra** látható.



171. ábra: Folyamatos működésű rektifikáló kolonna részei.

Mindezek alapján a *rektifikáció* ismételt desztilláció, ahol a folyadék és a gőz ellenáramban halad, közvetlenül érintkezik egymással, és a nem egyensúlyban levő gőz- és folyadékfázis között a tányérokon kétirányú komponens és hőátadás megy végbe. A fázisok közötti komponensátadás eredményeként elvben csaknem teljes egészében az alacsonyabb forráspontú komponenst, tartalmazó gőzt kapunk termékként az oszlop tetején, és az oszlop alján, pedig csaknem teljesen tisztán kapjuk a kevésbé illékony komponenst folyadék alakjában.

Nézzük meg a rektifikáló kolonnában egy tetszőleges n -edik tányérján lejátszódó folyamatot. A rektifikáló oszlopban az n -edik tányérra felülről x_{n+1} koncentrációjú és T_{n+1} hőmérsékletű folyadék csurog, alulról pedig y_{n-1} koncentrációjú és T_{n-1} hőmérsékletű gőz buborékol át, a tányéron levő folyadékon keresztül. A gőz és a folyadék intenzíven érintkezik egymással, és a fölfelé áramló gőz és a lefelé áramló folyadék között intenzív komponens és hőcsere játszódik le. A folyadék egy része, főleg az illékonyabb komponens elpárolog, a gőz tehát ebben dúsul. A párologás hőigényének fedezésére a gőz egy része kondenzálódik, főleg a kevésbé illékonyabb komponens, és a folyadék ebben lesz gazdagabb. Ha ez a tányér egy egyensúlyi egységnek tekinthető, ilyen esetet mutat be a **172. ábra**, akkor a tányéron T_n hőmérséklet áll be, és ennek a hőmérsékletnek megfelelő egyensúlyi x_n és y_n összetételű fázisok távoznak.



172. ábra: A rektifikáló oszlop i-edik tányérja

Ez a folyamat megy végbe minden tányéron. Az oszlop tetejére érkező G gőzt kondenzáltatják, egy részét termékként D (desztillátum vagy fejtermék) elvezetik, a másik részét F folyadék alakban refluxként visszavezetik az oszlopba. Ez szolgáltatja az oszlopban lefelé haladó folyadék fázist. Ennek eredményeképpen az oszlop tetején kapjuk a legtisztább állapotban a legillékonyabb komponenst, és ennek a forráspontja a legalacsonyabb. A folyamatot a **173. ábra** szemlélteti. Az oszlop aljára érkező folyadék egy részét M maradék vagy fenék termék elvezetik. A másik részét visszaforraló üstben elpárologatják, és ez szolgáltatja a felfelé haladó gőzfázist. Az oszlop alján kapjuk legtisztább állapotban a nehezebben illó komponenst, és itt a legmagasabb a hőmérséklet. Az n -edik tányérra felírhatjuk a tányér entalpia (hő) mérlegét

$$(4.25) \quad F_{n+1}H_{n+1}^F + G_{n-1}H_{n-1}^G = G_nH_n^G + F_nH_n^F + \text{veszteségek} + \text{keveredési hő},$$

ahol H_n^F és H_n^G az n -edik tányéron levő folyadék- és gőz moláris entalpiája.

A rektifikálást végezhetjük folyamatosan és szakaszos üzemmódban. A rektifikálás során legtöbbször a szükséges n tányérszám, az R refluxarány, a H torony magassága és a D torony átmérője jelenti a feladatot.

18.5.1. Folyamatos rektifikálás.

A folyamatos rektifikálás során a szétválasztandó elegyet folyamatosan vezetik be a rektifikáló oszlopba, a fejtermék és a fenéktermék elvétele is folyamatosan történik.

A gyakorlatban egy mérnök számára a rektifikálás problémája felmerülhet úgy, hogy adott a szétválasztandó folyadék elegy összetétele és mennyisége, előírt a desztillátum és a maradék összetétele, cél a rektifikáló oszlop magasságának és az átmérőjének meghatározása. A probléma felmerülhet úgy is, hogy adott egy rektifikáló kolonna, és az adott összetételű szétválasztandó elegy, valamint az előírt összetételű termékek szétválasztásához milyen refluxarányt kell alkalmaznunk. A mérnök bármelyik problémával áll szemben eleve két dolgot ismernie kell, a szétválasztandó komponensek egyensúlyi adatait (egyensúlyi görbét) és a kívánt napi termelést. A továbbiakban az első probléma felvetése szerint tárgyaljuk a rektifikálást. A rektifikálási művelet számításánál a következő egyszerűsítő feltételekből indulunk ki:

-A komponensek elegyedési hője zérus.

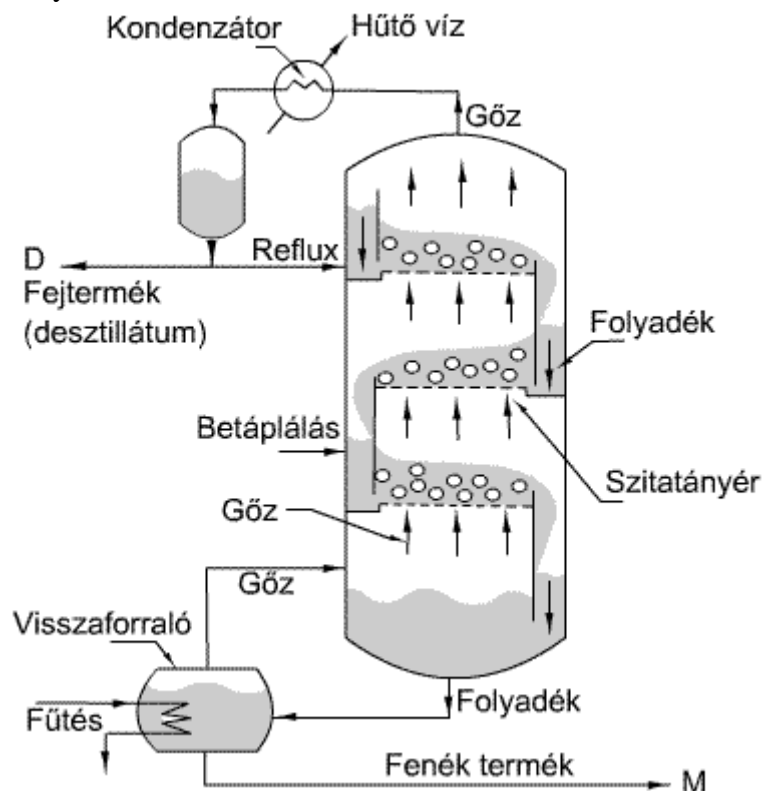
- A komponensek moláris párolgáshője, illetve kondenzációs hője azonos.
- Az oszlop tetejéről a kondenzátorba jutó gőz y_1 összetétele megegyezik a desztillátum x_D összetételével (teljes kondenzáció).
- A forralóból távozó gőz y_M összetétele megegyezik a fenéktermék x_M összetételével.

Érvényes az állandó moláris túlfolyás feltételét, ami azt jelenti, hogy az oszlopban felfelé haladó gőzáram és a lefelé haladó folyadékáram tömegében (összes mólszámában) változatlanul, de összetételben változva jut tovább, vagyis

$$G_1 = G_i = G = \text{konstans}$$

$$F_1 = F_i = F = \text{konstans}$$

A rektifikálás elvi folyamatát a **173. ábra** szemlélteti.



173. ábra: A folyamatos rektifikálás elvi rajza.

Az első probléma felvetés alapján a folyamatos rektifikálásnál a rektifikáló oszlop magasságának és a rektifikáló oszlop átmérőjének meghatározása a cél. Az oszlop magasságának kiszámításához először meg kell határozni az elméleti tányérok számát, adott refluxarány mellett. Az alkalmazott refluxarány a minimális refluxarány és a reflux többlet együttható szorzatával adják meg. A tányérhatásfok ismeretében a gyakorlatban szükséges tányérok száma megadható, és a gyakorlati tányérszám valamint a tányértávolság ismeretében az oszlopmagassága egyszerűen számolható. Az oszlop átmérőjét a kívánt napi termelés szabja meg, amit az áramlástanból ismert kontinuitási egyenlettel határozhatunk meg.

Az *elméleti tányérszám* meghatározásához az általános mérlegekből meg kell határozni a munkavonalak egyenleteit, ehhez a mérlegegyenleteket kell felírni.

Az egész oszlop bruttó komponensmérlege

$$(4.26) \quad B = D + M$$

és a fajlagos komponensmérlege

$$(4.27) \quad Bx_B = Dx_D + Mx_M.$$

A rektifikáló oszlopot a betáplálás helye a rektifikáló vagy dúsító (felső) és az elszegényítő vagy kigőzölő (alsó) szakaszra osztja. A két oszloprészben a fázisok tömegárama, így az arányuk is eltérő, ennek megfelelően két munkavonal írható fel a rektifikáló oszlopra, és egy vonal a betáplálásra, amit *q-vonalnak* nevezzünk. A rektifikáló kolonna három munkavonala egy pontban metszik egymást. Mivel a munkavonalak másik három pontja eleve adott (az átlón levő x_M , x_B és x_D pontok), ezért két munkavonal meghatározása elegendő, mivel a harmadik munkavonal a másik kettőből egyértelműen megadható.

18.5.1.1. *A dúsító szakasz munkavonala.*

Az oszlop dúsító szakaszának n -edik tányérjára a **173. ábra** alapján felírhatjuk a bruttó tömegmérleget

$$(4.28) \quad G = F + D$$

és a komponensmérleget

$$(4.29) \quad Gy_{n+1} = Fx_n + Dx_D$$

majd az y_{n+1} -et kifejezve kapjuk a felső munkavonal egyenletét:

$$(4.30) \quad y_{n+1} = \frac{F}{G}x_n + \frac{D}{G}x_D.$$

Az (4.28) egyenletet behelyettesítve az (4.30) egyenletbe kapjuk a dúsító szakasz munkavonalának egyenletét:

$$(4.31) \quad y_{n+1} = \frac{F}{F+D}x_n + \frac{D}{F+D}x_D.$$

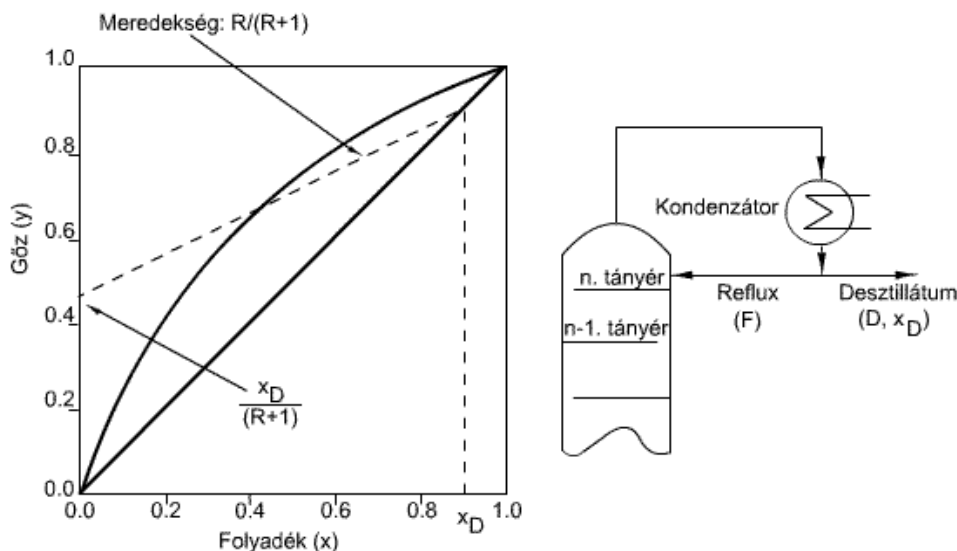
Bevezetve az

$$(4.32) \quad \frac{F}{D} = R$$

reflux arányt, akkor a reflux aránnyal kifejezve kapjuk a felső munkavonal egyenletét:

$$(4.33) \quad y = \frac{R}{R+1}x + \frac{1}{R+1}x_D.$$

Mivel az y_{n+1} és x_n az n -edik tányér alatt egymás mellett elhaladó, nem egyensúlyban levő, gőz és folyadék koncentrációi, és az n -eiknek bármelyik tányért választhatjuk, ezért az indexeket elhagyhatjuk.



174. ábra: A dúsító szakasz munkavonala

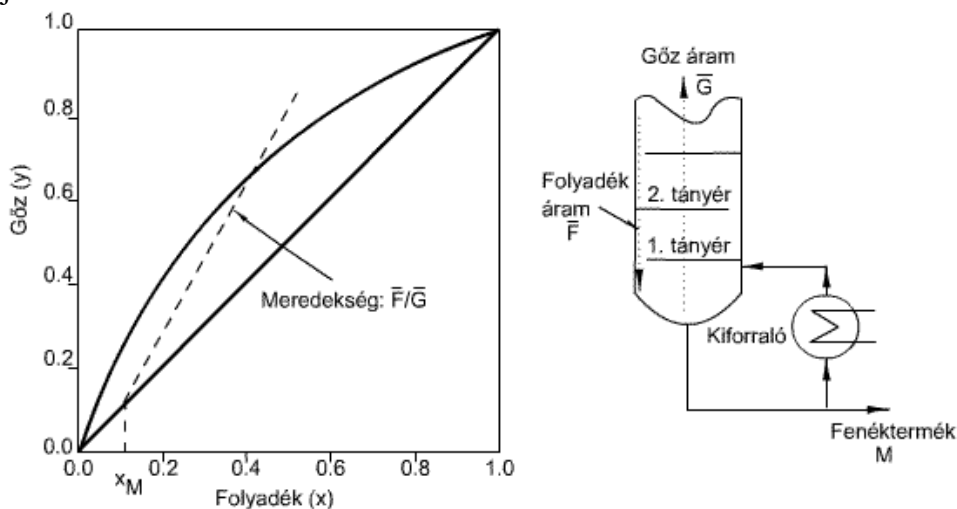
Ez az egyenlet tehát a tányérok közötti oszlop részben megadja a folyadék - és a gőz összetétel közötti összefüggést. A (4.33) egyenletben az $R/(R+1)$ az egyenes meredeksége, és az $x_D/(R+1)$ az egyenes tengely metszete.

A munkavonalnak két kitüntetett pontja van, az $x = x_D$ helyen $y = x_D$, és az $x = 0$ helyen $y = \frac{x_D}{R+1}$. A 174. ábra alapján a két pont összekötésével a munkavonal egyszerűen megszerkeszthető.

Ha az $R \rightarrow \infty$, akkor $\frac{R}{R+1} = 1$, a munkavonal az átlóra esik.

18.5.1.2. A kigőzölő szakasz munkavonala.

A rektifikáló oszlop kiforráló szakaszára a számítás a felső szakasz mintájára történik a 175. ábra alapján.



175. ábra: A kiforráló szakasz munkavonala

A kiforráló részre érvényes teljes tömegmérleg:

$$(4.34) \quad \bar{F} = \bar{G} + M.$$

A fajlagos komponensmérleg:

$$(4.35) \quad \bar{F}x_{m-1} = \bar{G}y_m + Mx_M,$$

Az (5.35) egyenletből az alsó munkavonal egyenlete:

$$(4.36) \quad y_m = \frac{\bar{F}}{\bar{G}}x_{m-1} - \frac{M}{\bar{G}}x_M.$$

Az (4.34) egyenletet behelyettesítjük a (4.36) egyenletbe:

$$(4.37) \quad y_m = \frac{\bar{G} + M}{\bar{G}}x_{m-1} - \frac{M}{\bar{G}}x_M.$$

A kiforráló szakaszra is a bevezetjük a reflux arányhoz hasonló mennyiséget, a visszaforralási arányt:

$$(4.38) \quad \frac{\bar{G}}{M} = R_M.$$

Ha az (5.37) egyenlet számlálóját és a nevezőjét is elosztjuk M -mel, és beírjuk az (5.38) egyenlettel definiált R_M -et

$$(4.39) \quad y_m = \frac{R_M + 1}{R_M}x_{m-1} - \frac{1}{R_M}x_M,$$

akkor a visszaforralási aránnyal kifejezve kapjuk az alsó munkavonal egyenletét.

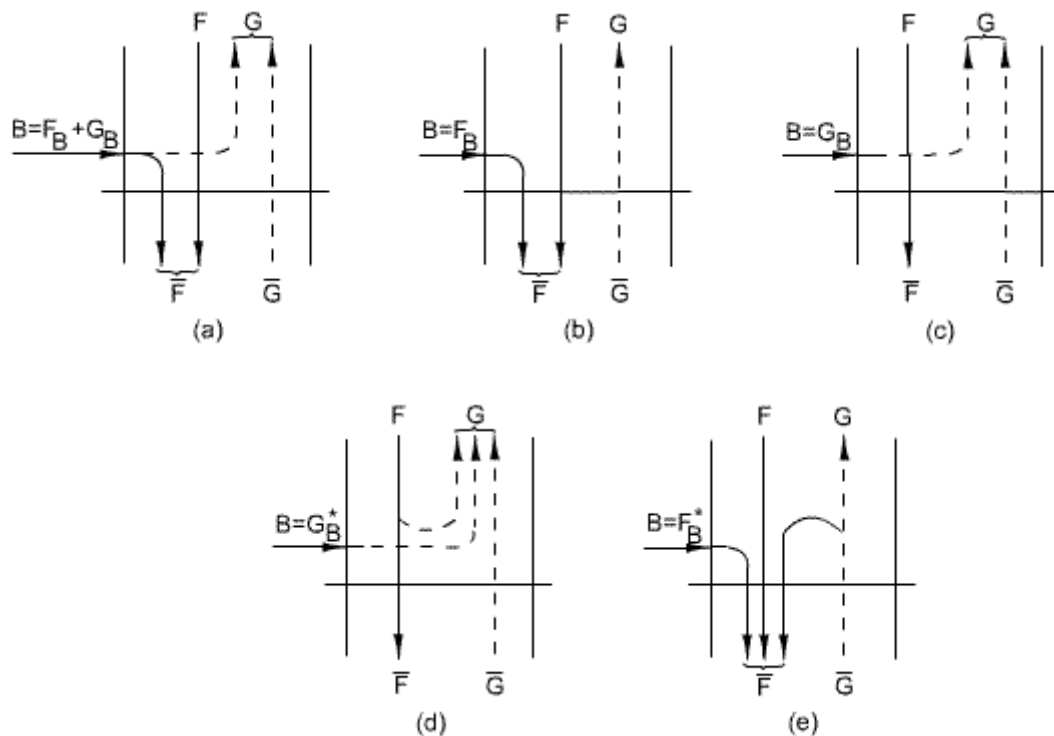
Az alsó szakasz munkavonala ugyancsak x - y diagramban ábrázolható (**175. ábra**). A két kitüntetett pont ebben az esetben, ha $x = x_M$ akkor $y = x_M$, és ha $y = 1$ akkor $x = \frac{R_M + x_M}{R_M + 1}$.

Növekvő visszaforralási arány esetén az alsó szakasz, (4.38) egyenlet, munkavonalának iránytangense csökken, és teljes visszaforralás esetében a munkavonal átló egyenesébe megy át.

18.5.1.3. A betáplálás munkavonala, a q -vonal egyenlete.

A rektifikáló oszlopot a betáplálás helye két részre osztja. A két résznek két különböző munkavonala van tehát a dúsító szakasz és a kigőzölő szakasz érintkezési pontja a betáplálás helyével azonos. Ez azt jelenti, hogy az alsó- és felső munkavonal közös pontjában, a metszéspontjukban a töménység, a betáplálás x_B összetételével kell azonosnak lenni. Más szóval a betáplálást az oszlopnak arra a helyére (tányérjára) kell bevezetni, ahol olyan összetételű elegy van, mint a betáplálási összetétel. A betáplálás helyén a tányér abban különbözik a többitől, hogy három belépő árama van, míg a többieknek kettő.

A betáplálás hőmérséklete és hőtartalma a célnak megfelelően különböző lehet. Felmerül az a kérdés, hogy a betáplálás hő állapota hogyan befolyásolja az oszlopban haladó fázisok tömegáramait, és a munkavonalak iránytangenseit.



176. ábra: A betáplálási tényér.

A munkavonalak metszéspontjainak koordinátáit x -szel és y -nal jelölve egyidejűleg érvényes a kolonna alsó és felső szakaszára felírt fajlagos anyagmérleg, (4.29) és (4.35) egyenlet.

A két egyenletet összeadva kapjuk:

$$(4.40) \quad y(G - \bar{G}) = x(F - \bar{F}) + (Dx_D + Mx_M).$$

Az egész kolonnára felírt, $Bx_B = Dx_D + Mx_M$ (4.27) fajlagos mérlegegyenletet behelyettesítjük a (4.40) egyenletbe, és átrendezve kapjuk:

$$(4.41) \quad y = \frac{F - \bar{F}}{G - \bar{G}}x + \frac{B}{G - \bar{G}}x_B.$$

A betáplálás jellemzőit a **176. ábra** szemléltetjük. Ennek alapján a betáplálás két részből tevődhet össze, egy F_B folyadék- és egy G_B gőzfázisból:

$$(4.42) \quad B = G_B + F_B.$$

A betáplálás állapotát a folyadékfázisnak az egész betápláláshoz viszonyított értéke jellemzi, és hőtani szempontból a betáplált folyadék 1 móljának telített gőzzé alakításához szükséges Q hőmennyiség és a ΔH_p párolgáshő hányadosa, amit q -val jelölünk:

$$(4.43) \quad q = \frac{F_B}{B} = \frac{F_B}{G_B + F_B} = \frac{Q}{\Delta H_p}.$$

A **176. ábra** leolvashatók, hogy

$$(4.44) \quad G = \bar{G} + G_B \text{ és } G_B = G - \bar{G}, \text{ valamint}$$

$$(4.45) \quad \bar{F} = F_B + F \text{ és } -F_B = F - \bar{F}.$$

Az (4.44) egyenletből a G_B -t az (4.45) egyenletből a $-F_B$ -t behelyettesítjük az (4.41) egyenletbe:

$$(4.46) \quad y = -\frac{F_B}{G_B}x + \frac{B}{G_B}x_B.$$

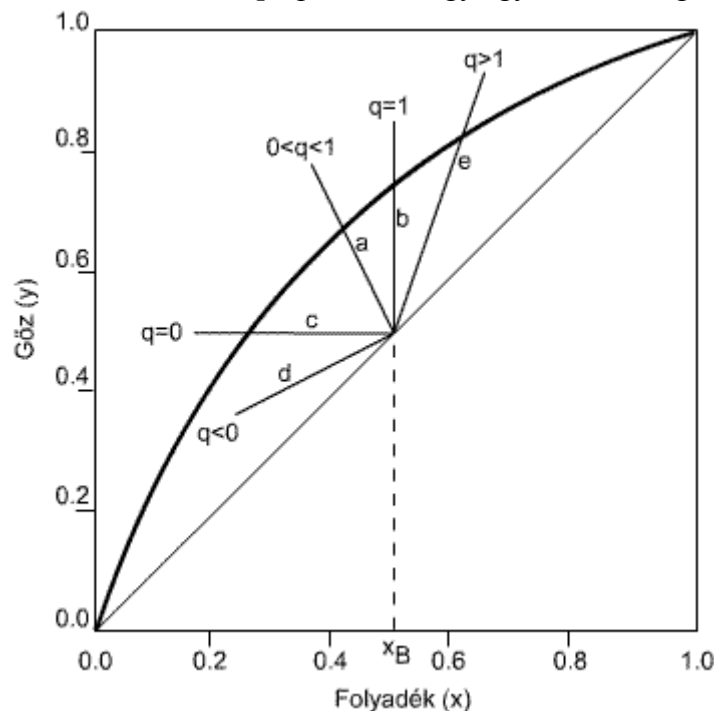
Az (4.46) egyenlet nevezőjébe az (4.42) egyenletből G_B -t beírjuk, majd a számlálót is és a nevezőt is elosztjuk B -vel:

$$(4.47) \quad y = -\frac{F_B}{B-F_B}x + \frac{B}{B-F_B}x_B = \frac{F_B}{F_B-B}x - \frac{B}{F_B-B}x_B = \frac{\frac{F_B}{B}}{\frac{F_B}{B}-1}x - \frac{x_B}{\frac{F_B}{B}-1}.$$

Végül a (4.47) egyenletbe beírjuk az (4.43) egyenlettel definiált q hányadost, és megkapjuk a q -vonal egyenletét:

$$(4.48) \quad y = \frac{q}{q-1}x - \frac{1}{q-1}x_B.$$

A munkavonalak metszéspontjai a q -vonalon fekszenek. Az (4.48) egyenlete iránytangense $q/(q-1)$, és az egyenes tengelymetszete $x_B/(1-q)$. A q -vonalnak is meg van a két jellegzetes pontja, áthalad az (x_B, x_B) és a $(0, x_B/(1-q))$ pontokon, így egyszerűen megszerkeszthetők.



177. ábra: A q -vonalak lehetséges esetei.

A q -vonalak helyzetét a **177. ábra** szemlélteti. Ha a $q = 1$, akkor az (4.48) egyenlet szerint az egyenes iránytangense végtelen, vagyis a q -vonal az y tengellyel párhuzamos, és a betáplálás,

az (4.43) definiáló egyenlet szerint $B = F_B$, forráspontban levő folyadék. Ha a $q=0$, akkor az egyenes iránytangense nulla, a q -vonal az x tengellyel párhuzamos, és a betáplálás $B=G_B$ telített gőz alakjában történik. Ha $0 < q < 1$, akkor a betáplálás komponensárama forrásponton levő folyadékot és telített gőzt is tartalmaz. Végül, ha $q < 0$, a betáplálás túlhevített gőz alakjában történik, és $q > 1$ a betáplálás forráspont alatti (visszahűtött) folyadék.

Két alapvető módszer terjedt el a szükséges tányérszám meghatározására. Az egyik a Lewis-Sorel módszer a tányérról-tányérra történő számítás, a másik a McCabe-Thiele grafikus módszer.

18.5.1.4. A szükséges tányérszám meghatározása Lewis-Sorel módszerrel

Sorel és Lewis módszert dolgozott ki a tányérszám meghatározására, tányérról-tányérra történő számítással. A számításához szükségünk van a munkavonalak egyenletére, valamint az egyensúlyi összefüggés ismeretére analitikus, táblázatos, vagy grafikus formába. A kézikönyvek legtöbb esetben az egyensúlyi összefüggéseket táblázatosan közlik. Kiindulunk az x_D előírt értékéből, $x_D = y_1$ azaz a legfelső tányér gőzösszetétele megegyezik a refluxként visszavezetett x_D folyadék F összetételével.

Ezután az egyensúlyi összefüggés segítségével meghatározzuk a legfelső tányérról lecsurgó folyadék összetételét $y_1 \xrightarrow{e} x_1$.

A felső munkavonal segítségével meghatározzuk a második tányérról felszálló gőz összetételét.

$x_1 \xrightarrow{mvf} y_2$.

Az egyensúlyi összefüggés segítségével meghatározzuk a második tányérról lecsurgó folyadék összetételét $y_2 \xrightarrow{e} x_2$, és így tovább.

Miután elértük a betáplálási értéket áttérve az alsó munkavonalra a számítást hasonlóan folytatjuk tovább, az x_M maradék összetételéig. A számításokat fordítva a kiforrólótól is kezdhjük.

Feladat:

Benzol toluol elegy 40 mol % benzolt tartalmaz, és rektifikálással szét kell választani úgy, hogy a desztillátum 90 mol % benzolt és fenéktermékként 10 mol % benzolt tartalmazzon. A betáplálás forrásponton történik, és a refluxot is hűtés nélkül, forrásponton vezetjük vissza a kolonnába. A refluxarány 3 kmol/kmol desztillátum. Határozzuk meg az elméleti tányérszámot, és a betáplálási tányér helyét. Az egyensúlyi diagram 101,325 kPa nyomáson **178. ábra** láthatjuk.

Megoldás:

Az anyagmérleg 100 kmol betáplálásra vonatkoztatva:

$$100 = D + M$$

Az illékonyabb komponens (benzol) fajlagos komponensmérlege:

$$100 \cdot 0,4 = 0,9 \cdot D + 0,1 \cdot M$$

$$40 = 0,9 \cdot (100 - M) + 0,1M$$

Az egyenletet megoldva:

$$M=62,5 \text{ kmol és } D=37,5 \text{ kmol}$$

A folyadék és gőz mennyisége a kolonna felső részében:

$$F_n=3D=3 \cdot 37,5=112,5 \text{ kmol}$$

$$G_n=F_n+D=112,5+37,5=150$$

A felső munkavonal egyenlete:

$$y_n = \frac{F}{G} x_{n+1} + \frac{D}{G} x_D = \frac{112,5}{150} x + \frac{37,5}{150} 0,9$$

$$y_{n+1} = 0,75x_{n+1} + 0,225$$

Mivel forrásponton történik a betáplálás, folyadék és gőz áram a kolonna alsó szakaszában:

$$\bar{F}_m = F_n + F = 112,5 + 100 = 212,5$$

A kolonna alsó részének mérlege:

$$\bar{F}_m = \bar{G}_{m-1} + M$$

$$\bar{G}_{m-1} = \bar{F}_m - M = 212,5 - 62,5 = 150$$

Az alsó munkavonal egyenlete:

$$y_m = \frac{\bar{F}_m}{\bar{G}_m} x_{m-1} - \frac{M}{\bar{G}_m} x_M$$

$$y_m = 1,415x_{m-1} - 0,042$$

A felső és az alsó munkavonal egyenletéből tányérról tányérra haladva meghatározhatjuk az elméleti tányérok számát. A felső t tányérról eltávozó G gőzt teljes mértékben kondenzáltatjuk, és így kapjuk a 0,9 mol % összetételű benzolt desztillátumként, $y_t = x_D$. Viszont az y_t felső tányérról távozó gőz egyensúlyban van az ugyancsak felső tányérról lefolyó x_t összetételű folyadékkal. Tehát az $y_t=0,9$ összetételhez az egyensúlyi görbe alapján $x_t=0,79$ folyadék összetétel tartozik.

A felső tányér alatt levő $t-1$ tányérról y_{t-1} értéket a felső munkavonal egyenletéből kapjuk.

$$y_{t-1}=0,79 \cdot 0,79 + 0,225 = 0,593 + 0,225 = 0,818$$

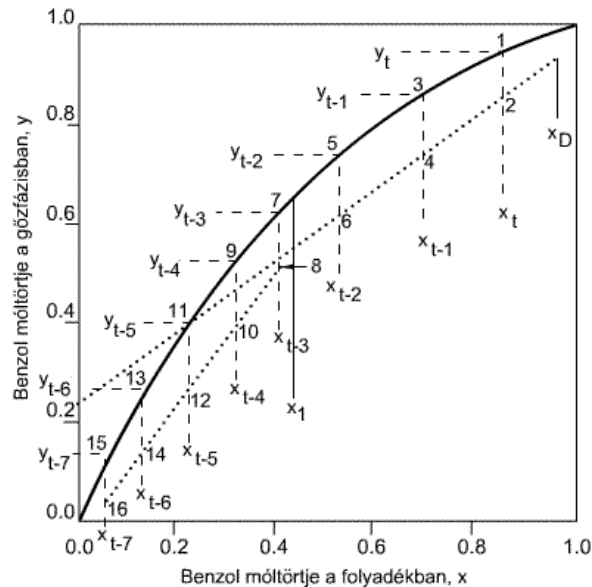
$$x_{t-1} \text{ egyensúlyi görbéről leolvasva} = 0,644$$

$$y_{t-2}=0,75 \cdot 0,644 + 0,225 = 0,483 + 0,225 = 0,708$$

$$x_{t-2} \text{ egyensúlyi görbéről} = 0,492$$

$$y_{t-3}=0,75 \cdot 0,492 + 0,225 = 0,369 + 0,225 = 0,594$$

$$x_{t-3} \text{ egyensúlyi görbéről} = 0,383$$



178. ábra: A tányérszám meghatározása Sorel-Lewis módszerrel.

Az utolsó $x_{t-3}=0,383$ folyadék összetétele közel van a betáplálási $x_B=0,4$ összetételhez, ezért a szétválasztandó folyadékot a t-3 jelű, fentről számított 3. tányérra kell betáplálni.

A kolonna alsó részére ezután az alsó munkavonal egyenletét kell használnunk.

$$y_{t-4}=1,45 \cdot 0,382 - 0,042 = 0,540 - 0,042 = 0,498$$

$$x_{t-4} = \text{egyensúlyi görbéről} = 0,298$$

$$y_{t-5}=1,45 \cdot 0,298 - 0,042 = 0,421 - 0,042 = 0,379$$

$$x_{t-5} = \text{egyensúlyi görbéről} = 0,208$$

$$y_{t-6}=1,45 \cdot 0,208 - 0,042 = 0,294 - 0,042 = 0,252$$

$$x_{t-6} = \text{egyensúlyi görbéről} = 0,120$$

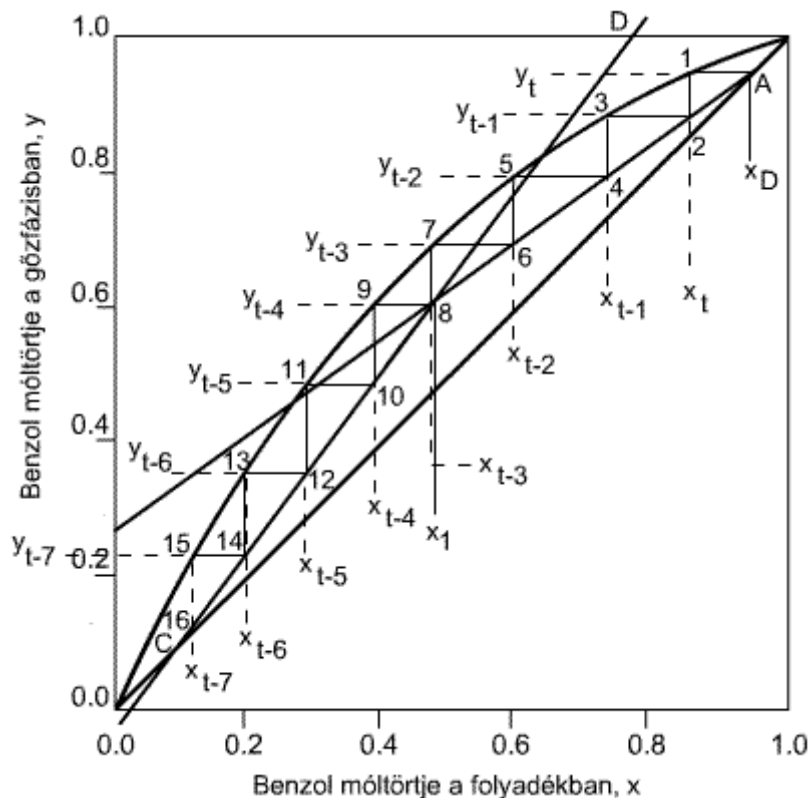
$$y_{t-7}=1,45 \cdot 0,120 - 0,042 = 0,169 - 0,042 = 0,127$$

$$x_{t-7} = \text{egyensúlyi görbéről} = 0,048$$

Az x_{t-7} alatta van az előírt fenéktermék x_M összetételnek, ezért ez a tányér a visszaforraltot reprezentálja. Tehát a kívánt szétválasztást 6 elméleti tányérszámnak megfelelő kolonnával tudjuk megvalósítani

18.5.1.5. A szükséges tányérszám meghatározása McCabe – Thiele módszerrel

A McCabe-Thiele módszer a legelterjedtebb (grafikus) eljárás, az elméleti tányérszám meghatározására. Ez egy jó módszer annak tanulmányozására is, hogy milyen hatással van a kolonna egyéb paramétereinek változtatása az elméleti tányérszámra. A szerkesztés elvégzéséhez a két munkavonal, illetve a q-vonal megléte közül elegendő kettő. A harmadik vonalat a másik bármelyik kettő egyértelműen meghatározza.



179. ábra: A tányérszám meghatározása McCabe-Thiele módszerrel.

Az első lépésben a **179. ábra** láthatóan megrajzoljuk az x - y koordináta rendszerben a gőz-folyadék egyensúlyi görbét. Ezután berajzoljuk az $y = x$ egyenest, majd az 4.14-edik, 4.15-ödik és 4.17-edik ábráknak megfelelően berajzoljuk a **179. ábra** a munkavonalakat, és végül a fejtermék összetétele (x_D, x_D) pontból kiindulva az (x_M, x_M) pontig lépcsőzéssel meghatározzuk a szükséges elméleti tányérszámot. Az egyensúlyi görbét és a munkavonalakat az előző feladatban megadott és kiszámolt adatok alapján szerkesztettük meg.

18.5.1.6. A refluxarány és az elméleti tányérszám kapcsolata.

A rektifikáló oszlop működésének a legfontosabb jellemzője az (4.32) egyenlettel definiált refluxarány. Az oszlop felső részében refluxként visszavezetett F folyadék és a D desztillátum anyagáramainak hányadosa. Az (4.33) egyenletből ki tudjuk fejezni a reflux arányt:

$$(4.49) \quad R = \frac{x_D - y_{n+1}}{y_{n+1} - x_n}$$

és az (4.39) egyenletből a kiforralási arányt

$$(4.50) \quad R_M = \frac{x_{m-1} - x_M}{y_m - x_{m-1}}$$

mint, két töménység különbségek hányadosa.

A refluxarány adott összetételű és hő állapotú betáplálás mellett a visszaforralási arányt is meghatározza, ezért a továbbiakban csak a refluxarányal foglalkozunk.

Természetesen akkor kaphatnánk a legtöbb fejterméket, ha a teljes kondenzálódott gázt elvezetnénk, és nem vinnénk vissza refluxot az oszlopba. Ekkor azonban csak egy egyszerű desztillációt hajtanánk végre, az oszlopnak a dúsító szakaszában nem biztosítanánk a lefelé haladó folyadékáramot, nem rektifikálnánk. Ebből az következik, hogy a refluxaránynak nem $R = 0$ a minimális értéke, hanem egy $R > R_{min}$ minimális értéket meghaladó refluxarányt kell biztosítani.

18.5.1.7. A minimális refluxarány

Minimális refluxarány mellett az (4.33) felső munkavonal egyenletének iránytangense is minimális. Adott q-vonal esetén, mivel a munkavonal nem metszheti az egyensúlyi vonalat, akkor minimális a felső munkavonal iránytangense, ha átmegy a q-vonal és az egyensúlyi görbe metszéspontján. Így ez az egyensúlyi görbén, a metszéspontban lévő (x^*, y^*) pont, és az $y=x_D$ (x_D, x_D) pont meghatározza a minimális iránytangensű felső munkavonalat, melynek minimális iránytangenséből, a **180. ábra** alapján

$$(4.51) \quad (\operatorname{tg} \alpha)_{\min} = \frac{R_{\min}}{R_{\min} + 1} = \frac{x_D - y^*}{x_D - x^*}$$

az R_{\min} minimális refluxarány számítható

$$(4.52) \quad R_{\min} = \frac{x_D - y^*}{y^* - x^*}.$$

A (4.52) egyenletben az x^* és y^* , az egyensúlyi koncentráció, a q-vonal és az egyensúlyi görbe metszéspontjában, és x_D a desztillátum koncentrációja.

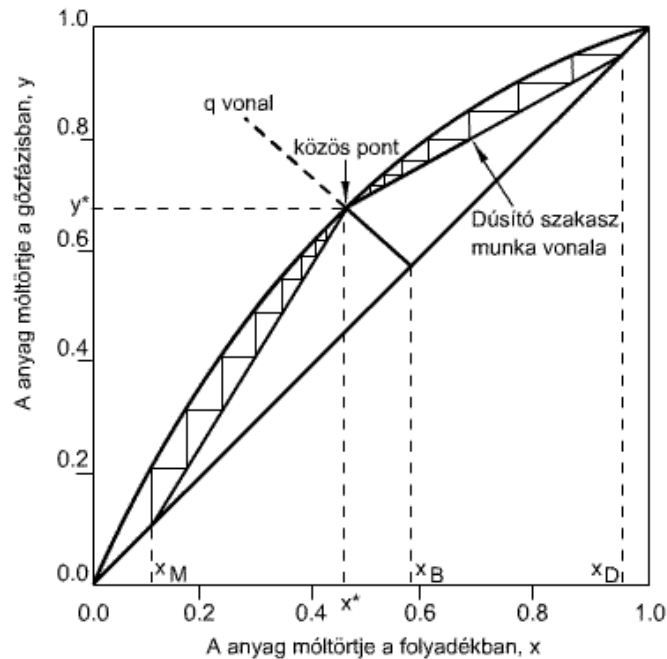
Ha a folyadék forráspontján történik a betáplálás, a q-vonal függőleges, az (x^*, y^*) pont (x_B, y^*) pontnak felel meg, ekkor

$$(4.53) \quad R_{\min} = \frac{x_D - y^*}{y^* - x_B},$$

és ha a betáplálás telített gőz alakjában történik, a q-vonal vízszintes, az (x^*, y^*) pont (x^*, x_B) pontnak felel meg, ekkor

$$(4.54) \quad R_{\min} = \frac{x_D - x_B}{x_B - x^*},$$

ahol x_B a betáplált elegy koncentrációja.



180. ábra: A minimális refluxarány meghatározása.

Ideális elegyeknél, vagy ha a relatív illékonyság a megfelelő koncentráció tartományban konstansnak vehető, akkor a minimális refluxarány analitikusan is megadható. Írjuk be a relatív illékonysággal kifejezett (4.11) egyensúlyi egyenletet, $y = \alpha x / (1 + (\alpha - 1)x)$, az (4.52) minimális reflux arányt leíró egyenletbe:

$$(4.55) \quad R_{\min} = \frac{x_D - y^*}{y^* - x^*} = \frac{x_D - \frac{\alpha x^*}{1 + (\alpha - 1)x^*}}{\frac{\alpha x^*}{1 + (\alpha - 1)x^*} - x^*} = \frac{1}{\alpha - 1} \left[\frac{x_D}{x^*} - \alpha \frac{(1 - x_D)}{(1 - x^*)} \right].$$

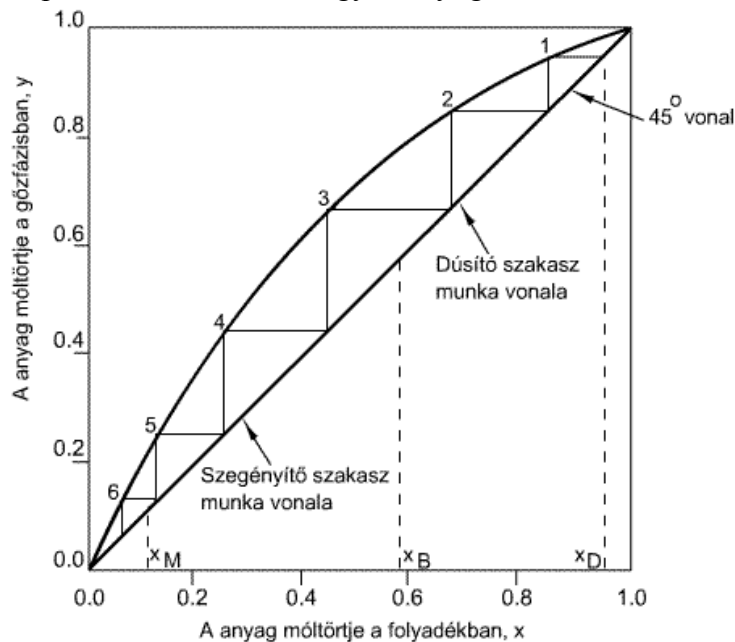
Minimális refluxarány mellett vennék el az oszlopból a legtöbb fejterméket, viszont az oszlop egy pontján az átadás hajtóereje zérussá válik, ilyen feltételek mellett végtelen elméleti tányérszámú, tehát végtelen magasságú oszlopra lenne szükség. A minimális refluxarányhoz tehát végtelen tányérszám tartozik, ami a rektifikálás egyik (gyakorlatban meg nem valósítható) szélső esetét jelenti.

18.5.1.8. Végtelen refluxarány

A refluxarány értékének másik szélsőséges esete a végtelen vagy teljes refluxarány. Ez azt jelenti, hogy nem veszünk el fejterméket és fenékterméket sem. A kolonna fel van töltve, visszaforráló működteti a kolonnát, és fejtermékként kapott a teljes gőzmennyiséget kondenzáltatás után visszavezetjük. Ekkor nem termel az oszlop, nincs betáplálás és elvétel, de rektifikálás játszódik le. A végtelen refluxarányt a kolonna minősítésére használják. Az egyensúlyi x - y diagramon végtelen refluxarány és végtelen visszaforralási arány mellett, az (4.33) és (4.39) egyenletekből következik, hogy a munkavonalak az átlóra esnek, $y_{n+1} = x_n$ és $y_m = x_{m-1}$, és ekkor az elméleti tányérszám minimális.

18.5.1.9. Minimális tányérszám meghatározása

A minimális tányérszám tányér szám meghatározását elvégezhetjük a McCabe-Thiele grafikus módszerrel, ahol az x - y diagramra az egyensúlyi görbét és az $y = x$ egyenest kell felvenni. A végtelen reflux miatt a felső és az alsó munkavonal is az átlóra esik, és az (x_D, x_D) pontból az (x_M, x_M) pontokig a lépcsőzést az átló és az egyensúlyi görbe között kell elvégezni.



181. ábra: Minimális tányérszám munkavonalai teljes reflux esetén

A minimális tányérszám meghatározásának egy másik módja a Fenske egyenlet. Ez egy analitikus módszer, és akkor használható, ha a relatív illékonyság konstans, vagy konstansnak vehető. Itt is teljes refluxot alkalmaznak, nincs elvétel és nincs betáplálás. A munkavonalak az átlóra esnek. Tekintsünk egy kétkomponensű, A és B elegyet, amelynek a koncentrációja a kiforráló üstben x_{A0} és x_{B0} . A rendszer működését a **182. ábra** szemlélteti. Az egyensúly esetén az 1. tányéron a fajlagos komponens mérleg:

$$(4.56) \quad F_{A1}x_{A1} = G_{A0}y_{A0},$$

és a teljes komponens mérleg:

$$(4.57) \quad F_1 = G_0,$$

ezért

$$(4.58) \quad x_{A1} = y_{A0}.$$

Az (4.9) egyenlet alapján, és az egyensúly miatt az első tányéron az összetétel:

$$(4.59) \quad \left(\frac{x_A}{x_B} \right)_1 = \left(\frac{y_A}{y_B} \right)_0 = \alpha_0 \left(\frac{x_A}{x_B} \right)_0$$

ahol a zárójelen kívül az index a tányérok számát, 0 index a kiforralót jelöli. A második tányérra az összefüggés:

$$(4.60) \quad \left(\frac{x_A}{x_B} \right)_2 = \left(\frac{y_A}{y_B} \right)_1 = \alpha_1 \left(\frac{x_A}{x_B} \right)_1 = \alpha_1 \alpha_0 \left(\frac{x_A}{x_B} \right)_0$$

Az n-edik tényérra:

$$(4.61) \quad \left(\frac{x_A}{x_B} \right)_n = \left(\frac{y_A}{y_B} \right)_{n-1} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n-1} \alpha_0 \left(\frac{x_A}{x_B} \right)_0$$

Ha egy átlagos $\bar{\alpha}$ értéket veszünk:

$$(4.62) \quad \left(\frac{x_A}{x_B} \right)_n = \bar{\alpha}^n \left(\frac{x_A}{x_B} \right)_0$$

A teljes kondenzáció miatt (ugyan úgy, mint a kiforralónál) a refluxként visszavezetett x_D desztillátum összetétele, és a legfelső n-edik, tényérről elmenő gőz összetétele között is fenn áll az egyensúly:

$$(4.63) \quad \left(\frac{x_A}{x_B} \right)_D = \left(\frac{y_A}{y_B} \right)_n = \alpha_n \left(\frac{x_A}{x_B} \right)_n = \bar{\alpha}^{n+1} \left(\frac{x_A}{x_B} \right)_0$$

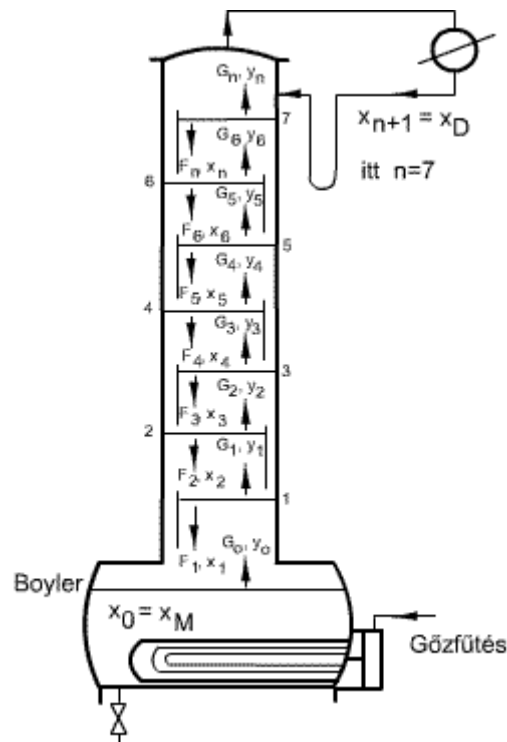
és

$$(4.64) \quad n + 1 = \frac{\ln \left[\left(\frac{x_A}{x_B} \right)_D \left(\frac{x_B}{x_A} \right)_0 \right]}{\ln \bar{\alpha}}$$

Két komponens esetében $x_B = 1 - x_A$, és az illékonyabb komponens $x = x_A$:

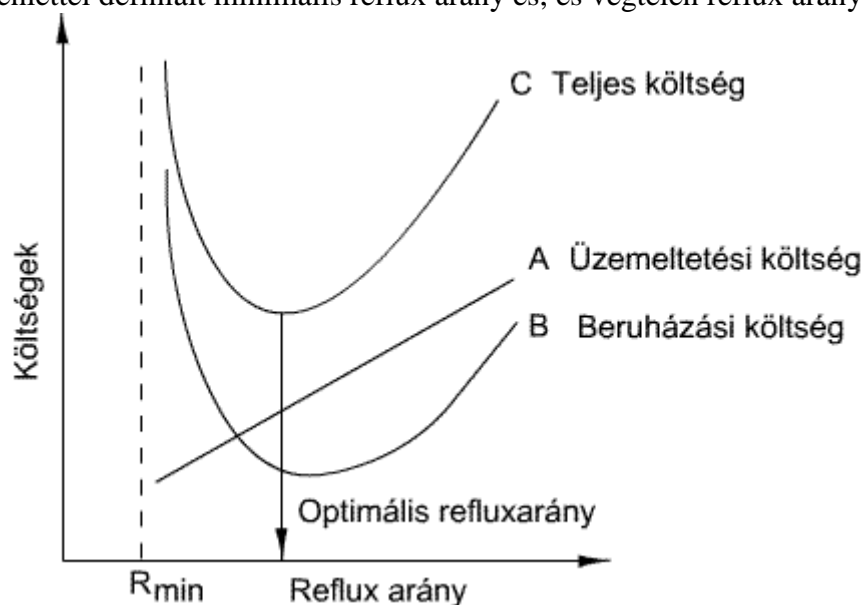
$$(4.65) \quad n = \frac{\ln \frac{(1-x_0)x_D}{(1-x_D)x_0}}{\ln \bar{\alpha}} - 1$$

ahol n az elméleti tényérok száma, amibe a visszaforráló is bele értendő. Ha az α csak keveset változik, akkor az $\bar{\alpha}$ -nak a fejtermék és a fenéktermék α értékeinek mértani közepét lehet venni.



182. ábra: A minimális tányérszám meghatározása Fenske módszerrel

Végtelen reflux arány esetén a hajtóerő maximális, és minimális elméleti tányérszám illetve minimális oszlopmagasság szükséges az adott mértékű szétválasztáshoz. Ezt az esetet az oszlopminősítésen kívül a lehető legnagyobb tisztaságú termék nyerésére szokás felhasználni. A teljes reflux alkalmazásának gyakorlati jelentősége van, mert például töltött torony esetében így határozható meg az elméleti egységek száma. A leggyakrabban úgy járunk el, hogy n -heptán és metil-ciklohexán elegyét rektifikálják, és a termikus egyensúly beállta után törésmutató mérés alapján meghatározzák x_D és x_0 értékét. Az α ismeretében a (4.65) összefüggés alapján az n számítható. A reális esetekben egy üzemelő kolonnánál a reflux arány az (4.52) egyenlettel definiált minimális reflux arány és, és végtelen reflux arány között lehet.



183. ábra: Rektifikáló kolonna költségei a reflux arány függvényében

A **183. ábra** egy rektifikáló kolonna beruházási, üzemeltetési és összes költségeit tüntettük fel a reflux arány függvényében. a kolonnát célszerű a minimális teljes költséghez tartozó optimális reflux arány környezetében üzemeltetni. Tapasztalati tény, hogy az optimális reflux arány általában $1,2 R_{\min} \leq R_{\text{opt}} \leq 1,5 R_{\min}$. Számításokhoz általában megadják az oszlopra jellemző β reflux többlet együtthatót, ahonnan

$$(4.66) \quad R_{\text{opt}} = \beta R_{\min}$$

számítható.

18.5.1.10. A rektifikáló oszlopmagasságának meghatározása.

Ha a rektifikáló oszlop egyes tányérjairól távozó fázisok egymással egyensúlyban vannak, azaz a tányér egy egyensúlyi egység, akkor ezt a tányért elméleti tányérnak nevezzük. A rektifikáló oszlop egy tányérja valójában nem felel meg az elméleti tányér feltételeinek. Az eltérés mértékét a tányérhatásfokkal jellemezhetjük. Így az adott mértékű szétválasztáshoz szükséges valóságos tányérszámot az elméleti tányérszámból tudjuk számítani a tányérhatásfok (η_T) ismeretében:

$$(4.67) \quad \eta_T = \frac{N_{\text{val}}}{N_{\text{elm}}}$$

Az elméleti tányérszám és a tányérhatásfok ismeretében az oszlop magasságát (H) úgy tudjuk megadni, hogy a tányérkonstrukció figyelembe vételével megállapítjuk egy tányér magasságát (h), ebből, mivel egy tányérnak a visszaforráló üst számát:

$$(4.68) \quad H = (N_{\text{val}} - 1) h.$$

18.5.1.11. A rektifikáló oszlop átmérőjének meghatározása

Az oszlop D (m) átmérőjét az üres keresztmetszetre vonatkozó v_g (m/s) gőzsebesség alapján számítjuk:

$$(4.69) \quad D = \sqrt{\frac{4G}{\pi v_g}}$$

ahol G (m³/s) a gőz térfogat árama. A gőz-sebességet az elárasztás által meghatározottnál valamivel kisebbre kell választani, valamint figyelembe kell venni, hogy a cseppfelhordás és a nyomásesés ne haladjon meg egy megengedett értéket. A maximálisan megengedett gőzsebesség:

$$(4.70) \quad v_{G \text{ max}} = C \sqrt{\frac{\rho_f - \rho_g}{\rho_G}}$$

ahol C egy tapasztalati tényező, ami függ a tányértípustól, a tányérok egymás közti távolságától, a folyadék- és gőzterheléstől, valamint a fázisok fizikai tulajdonságaitól.

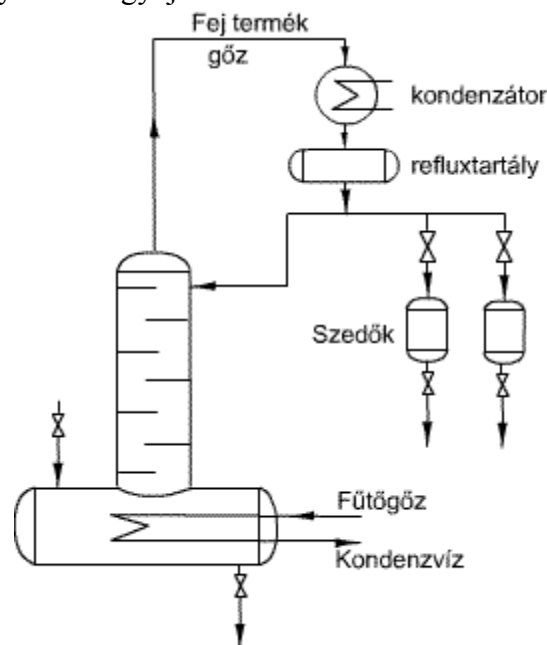
A torony magassága a termék minőségével függ össze, míg a torony átmérője a termék mennyiségét határozza meg.

18.5.2. Szakaszos rektifikálás.

A szakaszos rektifikálás az a művelet, melynek kivitelezésénél egy adott mennyiséget egyszerre betáplálnak a torony alján lévő üstbe, és amíg ezt fel nem dolgozzák, a betáplálás szünetel. A tornyot a viszonylag nagy térfogatú üstre építik. Az alkalmazott reflux lehet időben állandó, vagy időben változó (növekvő), a feladat jellegétől függően.

A szakaszos rektifikálás instacionárius művelet, és akkor alkalmazzák, ha viszonylag kis mennyiségű anyagot kell feldolgozni, és a szétválasztandó elegy sok szilárd anyagot tartalmaz, például az élelmiszeriparban a gyümölcspálinka főzése cefréből.

A lepárlandó folyadékkal feltöltik az üstöt, az üstben a folyadékot forralják és elgőzölgöztetik. A gőzök a kolonnán felfelé haladnak, a kondenzátor a gőzöket kondenzálja. A képződött folyadék egy részét a kolonnába refluxként visszavezetik, a másik részét egy hűtőn keresztül egy vagy több szedőedénybe összegyűjtik.



184. ábra: Szakaszos rektifikálás elvi rajza.

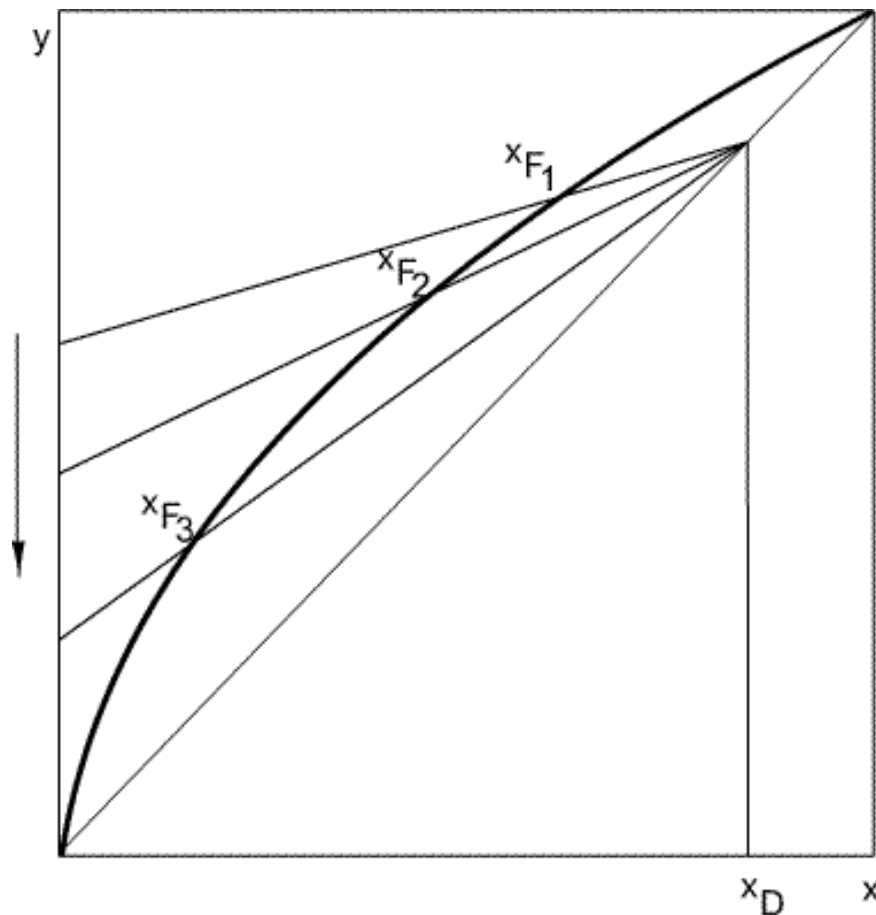
A szakaszos rektifikálás munkavonal egyenletéhez, hasonlóan a folyamatos rektifikáláshoz, az oszlopra felírt komponens mérlegből juthatunk. Mivel nincs betáplálás, ami kettéosztja az oszlopot, így csak egy munkavonal írható fel, amelynek egyenlete megegyezik a folyamatos rektifikálás felső munkavonalának (4.33) egyenletével:

$$(4.71) \quad y_{n-1} = \frac{R}{R+1} x_n + \frac{1}{R+1} x_D.$$

18.5.2.1. Szakaszos rektifikálás változó reflux aránnyal

A szakaszos rektifikáció egyik típusa, amelynek célja állandó összetételű desztillátum előállítása, az üstben levő változó összetételű folyadékból. Ezt csak úgy valósíthatják meg, ha a lepárlást változó (növekvő) reflux aránnyal hajtják végbe. A rektifikálás kezdetén alkalmazandó reflux arányt ebben az esetben is a fejtermék és a betáplált elegy összetételének függvényeként állítják be, de a továbbiakban a reflux arány növelésével biztosítják a fejtermék

állandó összetételét. A reflux arány növelésével az oszlop elméleti tányérszáma változik, szétválasztó képessége nő, a teljesítménye viszont csökken. Az elmondottakat a **185. ábra** szemlélteti.



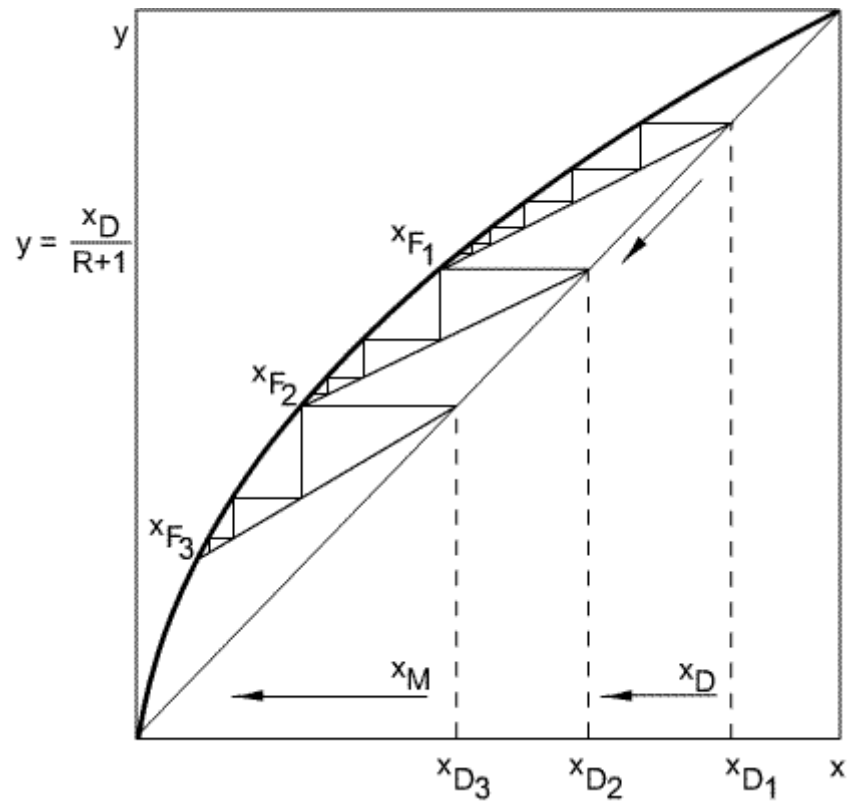
185. ábra: Szakaszos rektifikálás változó reflux aránnyal

A reflux arányt az elválasztás során addig kell növelni, míg az üzemeltetéssel elérhető elméleti tányérszámmal a kiforráló üstben levő folyadék kívánt összetételét el nem érjük. Az elmondottak értelmében ennél a módszernél a fejtermék összetétele állandó, a kolonna legfelső tányérjának hőmérséklete is állandó, ezzel szemben az üst hőmérséklete folyamatosan emelkedik.

Mivel az R nő, így az $\frac{x_D}{R+1}$ csökken, és a munkavonal az átlóhoz közelít, a művelet akkor ér véget, ha a D desztillátum elvételének sebessége nullára csökken, ugyanis ekkor az egész kondenzátumot refluxként visszavezetjük.

18.5.2.2. Szakaszos rektifikálás állandó reflux aránnyal

Ha a szakaszos rektifikálást állandó reflux aránnyal folytatjuk le, akkor ennek a követelménynek csak így tudunk eleget tenni, ha a reflux arányt ábrázoló munkavonal iránytangense állandó, de az ordinátát a kezdőponttól számítva mind kisebb és kisebb távolságban metszi. Ez csak úgy lehetséges, ha x_D értéke folyamatosan csökken.



186. ábra: Szakaszos rektifikálás állandó reflux aránnyal.

Az elmondottakból és a **186. ábra** nyilvánvaló, hogy ebben az esetben a fejtermék összetétele a lepárlás folyamán a nehezebben illó komponensben egyre dúsabb lesz.

19. Folyadék-folyadék rendszerek közötti anyagtranszport, folyadék extrakció

A folyadék-folyadék rendszerek csoportjába a folyadék-folyadék extrakció, vagy más néven szolvens extrakció tartozik. Tágabb értelemben az extrakció egy, vagy több komponens folyadékból vagy szilárd anyagból való kioldása szelektív oldószer alkalmazásával. A szelektív oldószert úgy kell megválasztani, hogy abban az eltávolítandó komponens jól oldódjon, viszont a kiindulási elegy többi komponensei rosszul. Az átadási folyamat jellege a szilárd fázisban lényegesen eltér a folyadékban lezajló anyagátadási folyamattól, ezért a folyadék-folyadék rendszerben lejátszódó folyamatokat külön tárgyaljuk a szilárd-folyadék rendszerektől.

A folyadék-folyadék extrakció egy folyadék halmazállapotú oldat komponensének vagy komponenseinek szétválasztása egy másik, az oldattal nem elegyedő folyadékkal való érintkezés útján. Ha az eredeti oldatot alkotó anyagok különbözőképpen oszlanak meg a két folyadékfázis között, bizonyos mértékű szétválasztás érhető el. Lényegében nagyon hasonlít a gáz-folyadék illetve gőz-folyadék rendszerekben végzett műveletekhez. Az extrakciónál is egy új folyadék fázist kell létrehozni. Ez az új nem elegyedő folyadékfázis létrehozása valamilyen oldószernek az elegyhez való hozzáadása útján jön létre. Sok tekintetben ez a nem elegyedő oldószer hozzáadása ugyanazt az eredményt valósítja meg, mint az új fázis létrehozása az abszorpciós vagy deszorpciós műveletekben a gáz bevezetése, vagy a lepárlási műveletekben hő hozzávezetése útján forralással létrejövő gőz fázis. Az egymással érintkező folyadékfázisok kölcsönös oldódása egymásban egy többfokozatú kaszkádon való áthaladásuk közben lényegesen nagyobb, mint a gáz-abszorpció vagy a kigőzölés folyamán. A megfelelő gáz-folyadék rendszerekkel összehasonlítva, az érintkező fázisok sűrűségei között jóval kisebb a különbség, felületi feszültségük pedig viszonylag kicsi.

Hasonlóan a gáz-folyadék eljárásokhoz, vagy a lepárlási művelethez, az elválasztás hatásfokát többszöri érintkezéssel vagy ezzel, egyenértékű művelettel fokozni lehet. Egy egyszerű példán bemutatjuk a művelet alkalmazási területét és néhány jellegzetességét. Ha ecetsav vizes oldatát olyan folyadékkal, mint például etil-acetát, keverjük össze, az ecetsav egy része és viszonylag kevés víz átmegy az észteres fázisba. Mivel egyensúlyban a vizes és az észteres fázis sűrűsége különböző, a keverés megszüntetésekor a két fázis szétülepedik és dekantálással, illetve választótölcsérben elválasztható. Mivel most az észteres fázisban az ecetsav és a víz mennyiségének viszonya más, mint az anyaoldatban, és mint a megmaradt vizes oldatban volt, bizonyos mérvű elválasztást értünk el. Ez egyben példa is a fokozatszerű érintkezésre, amelyet akár szakaszos, akár folyamatos módon végezhetünk. A maradék vizet ismételtén extrahálhatjuk további észterrel a savtartalom csökkentése céljából, de a folyamat megvalósítható ellenáramú kaszkádban is. Az extrakció megvalósítására egy másik lehetőség, hasonlóan az abszorpcióhoz, valamilyen folytonos ellenáramú készülék, amely nem tartalmaz fokozatokat. Reflux alkalmazásával éppen úgy, mint a lepárlásnál, a szétválasztás tovább fokozható.

Mindezekben a műveletekben az extrahálandó oldat a *betáplálás* vagy az *anyaoldat*, az a hozzáadott folyadék pedig, amellyel az anyaoldatot extraháljuk, az *oldószer* vagy *szolvens*. A művelet eredményeként kapott oldószernél gazdag terméke az *extraktum*, és a maradék, amelyből az oldott anyagot kivonjuk, a *raffinátum*. Van olyan bonyolult művelet is, amelyben két oldószert alkalmaznak egy betáplálás komponenseinek szétválasztására. Például *para*- és *orto*-nitro-benzoésav elegye szétválasztható az egymásban oldhatatlan víz és kloroform közötti megosztással. A *para*-izomer a kloroformban, az *orto*-izomer a vízben oldódik jobban. Ez az úgynevezett két oldószeres vagy *frakcionáló* extrahálás.

Alkalmazási terület igen széleskörű a környezetvédelemben, szennyvíztisztítás területén. Az összes extrakciós műveletnek, gyakorlati megoldásuktól függetlenül, van néhány olyan közös

jellemzője, amely nagymértékben befolyásolja a művelet alkalmazási területét. Ezek a következők. Az extrahált anyagot újból oldatban kapjuk, melyet legtöbbször újból szét kell választani, részben a kívánt oldott anyag kinyerése, részben az oldószer regenerálása céljából. Ez a szétválasztás többnyire ismét diffúziós művelettel, például lepárlással végezhető. Ehhez még az is hozzájárul, hogy az úgynevezett nem elegyedő folyadékok rendszerint eléggé elegyednek egymással, úgyhogy még a raffinátumból való oldószer visszanyerés is szükségessé válik. Mindezekből következik, hogy az extrakció mint szétválasztó művelet a következő körülmények között alkalmazható.

1. Ha az extrakció és az oldószer visszanyerés művelete együtt gazdaságosabb, mint a közvetlen szétválasztás. Ez az eset például, ha értékes szerves anyagot, értékes gyógyszer alapanyagot kell kinyerni híg vizes oldatból. Mivel az oldószer mennyisége és párolgáshője kisebb, elválasztása könnyebb, mint a vízé, az oldószer visszanyerve az extrakció olcsóbb, mint a közvetlen lepárlás. Ugyanez a helyzet lehet akkor is, ha a lepárlást az anyag bomlása, illetve hőérzékenysége miatt igen kis nyomáson és igen alacsony hőmérsékleten kellene végezni. Nagy szénatom számú zsírsavak elkülönítése növényi olajokból gazdaságos lehet akár nagyvákuumban végzett desztillálással, akár folyékony propánnal való extrakcióval. Az extrakció végén a propán alacsony hőmérsékleten eltávolítható a termékből.

2. Ha egyszerűbb módszer nem alkalmazható. Példa erre az azeotróp elegyek szétválasztása, ami közvetlen lepárlással nem oldható meg. Egy másik ilyen eset, ha egy bonyolult elegy, különböző kémiai szerkezetű, de közel azonos forráspontú komponenseit kell szétválasztani. Erre a szétválasztásra is alkalmas az extrakció, amely kémiai szerkezet szerint szelektál. Példaként megemlíthetjük az aromás szénhidrogének szelektív extrakcióját folyékony kéndioxiddal aromás és paraffin-szénhidrogének elegyéből.

A folyadék-folyadék extrakció épp úgy gyakori a kőolaj feldolgozó- és a petrokémiai iparban, mint a gyógyszer- vagy a szerves vegyiparban, és ezen iparágak környezetvédelmi problémáinak megoldásában. Hatékonyan felhasználják a nagy tisztaságú termékek kiválasztására, vizes oldatok kis koncentrációjában jelen levő komponenseinek kinyerésére, vagy nyomelemek szétválasztására is.

Mindezek alapján az extrakciót általában ott is alkalmazzák, ahol az egyszerűbb művelet például a desztilláció nem jöhet számításba. Ilyen ok lehet a hőérzékenység, kis kiindulási koncentráció, a magas forráspont, illetve a kis illékonyság.

19.1. Háromkomponensű folyadékrendszer egyensúlyi viszonyai

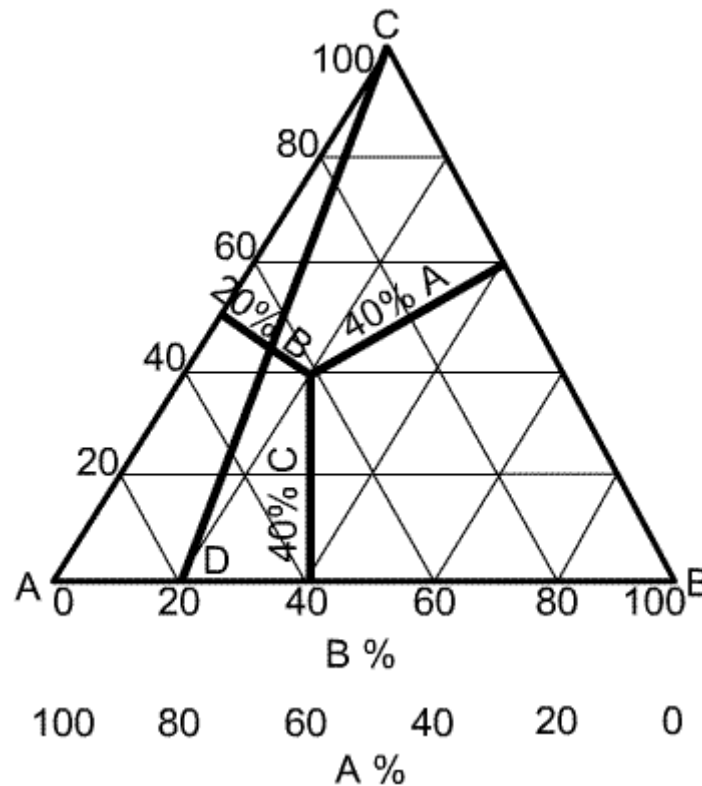
A folyadék-folyadék extrakció definíciójából következik, hogy az anyagátviteli folyamatban, két egymással kölcsönösen nem, vagy csak részlegesen, oldódó folyadékfázis vesz részt. E két fázis között oszlik meg a kinyerendő komponens. Például szennyvizek fenol tartalma a butil-acetátos extrakció során megoszlik a butil-acetátos és vizes fázis között. A példából is láthatjuk, hogy az extrakció legalább háromkomponensű rendszerekkel végzett művelet, és legtöbbször mindhárom komponens jelen van mérhető mennyiségben mindkét folyadék fázisban.

A és B tiszta, gyakorlatilag egymással nem elegyedő folyadékok, C a két folyadékfázis között megoszló oldott anyag, amit szeretnénk kivonni. Az extrakcióval szétválasztandó F anyaoldat A -ból és C -ből áll, az A komponens igen gyakran víz, B az extraháló oldószer, amit S -el is szokás jelölni.

19.1.1. Egyensúlyi viszonyok ábrázolása háromszögdiagramon

Az extrakciónál az egyenlő oldalú háromszögű koordináta rendszert kiterjedten használják, a háromkomponensű rendszerek koncentráció viszonyainak ábrázolására különösen akkor, ha az A és a B komponens részlegesen elegyedik egymással. Az egyenlő oldalú háromszög egyik

tulajdonsága, hogy a háromszög belsejében levő valamely pontból a háromszög három oldalára bocsátott merőlegesek (távolságok) hosszának összege egyenlő a háromszög magasságával. Ha a háromszög magassága a 100%-os összetételt jelent, a három oldaltól mért távolság, a három komponens százalékos mennyiségét. Vizsgáljuk meg a **187. ábra**.



187. ábra: Koncentrációk ábrázolása Egyenlő oldalú háromszögben

A háromszög mindegyik csúcsa valamelyik tiszta komponenst jelenti, ahogy feltüntettük. Valamely K pontnak az AB oldaltól mért merőleges távolsága C százalékos mennyiségét jelenti a K elegyben, az AC oldaltól mért merőleges távolsága B százalékos mennyiségét, és a CB oldaltól való távolsága A százalékos mennyiségét. Ezek szerint $x_K = 0,4$. A háromszög valamely oldalának bármelyik pontja kétkomponensű rendszert jelent. D pont például 80% A -t és 20% B -t tartalmazó kétkomponensű rendszert. A DC vonal minden pontjában A és B aránya ugyanennyi, ezekkel a pontokkal jelképezett elegyek úgy foghatók fel, mint D és C elegyei. Ha az R ponttal ábrázolt R kg tömegű elegyhez E ponttal ábrázolt E kg elegyet keverünk hozzá, a keletkező új elegyet ábrázoló M pont az RE egyenesen fekszik, mégpedig úgy, hogy teljesül a következő egyenlet:

$$(5.1) \quad \frac{R}{E} = \frac{\overline{ME}}{\overline{RM}} = \frac{x_E - x_M}{x_M - x_R}$$

A (5.1) egyenlet könnyen levezethető közvetlenül a mérlegegyenletből az elegyítési szabálynak megfelelően. A teljes anyagmérleg:

$$(5.2) \quad R + E = M$$

A C komponens anyagmérlege:

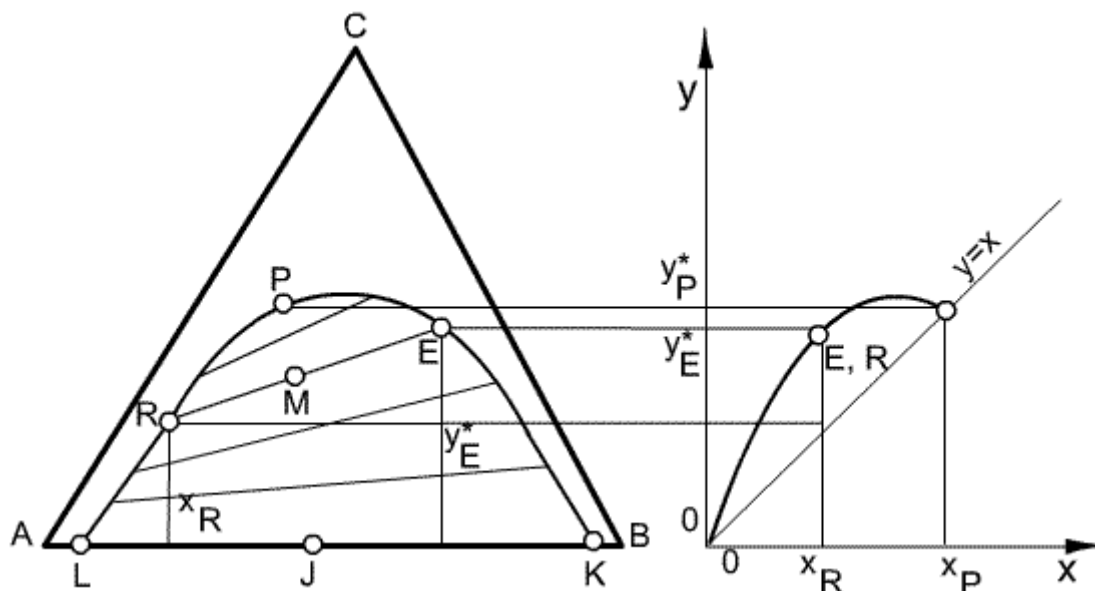
$$(5.3) \quad R x_R + E x_E = M x_M = (R + E) x_M = R x_M + E x_M$$

A (5.3) egyenletet átrendezve:

$$(5.4) \quad R(x_M - x_R) = E(x_E - x_M)$$

A (5.4) egyenletből közvetlenül megkapjuk a (5.1) egyenletet.

A következőkben a folyadék- folyadék extrakciós műveletek során az egyik leggyakoribb elegytípust tárgyaljuk, ahol három folyadékból áll a rendszer, és az egyik folyadékpár korlátoltan elegyedik. Ilyenek az extrakcióban leggyakrabban előforduló rendszerek. Jellemző példájuk a víz (A)-kloroform (B)-acetón (C) és a benzol (A)-víz (B)-ecetsav (C) rendszer. A háromszögű diagram *izoterm*, vagyis állandó hőmérsékletre vonatkozik. Vizsgáljuk meg a **188. ábra**. A C folyadék teljesen elegyedik A-val és B-vel, de A és B csak korlátoltan elegyedik egymással. Elegyítésükkor két telített folyékony oldat keletkezik, L, amely A-ban és K, amely B-ben gazdag. Mennél rosszabbul elegyedik egymással A és B, L és K annál közelebb lesz a háromszög csúcsához. Valamely biner J elegy, amelynek összetétele L és K között van, két, egymásban oldhatatlan folyadékfázisra válik szét, ezek összetétele L és K, mennyiségük aránya pedig a (5.1) egyenlet értelmében a J helyétől függ. Az LRPEK görbe az izoterm fázisegyensúlyi görbe (binodális oldhatósági görbe), A és B kölcsönös oldhatóságának változását mutatja a C-tartalom függvényében.



188. ábra: Három folyadékfázisból álló rendszer, A és B részlegesen elegyedik

E görbén kívül fekvő minden elegy egy folyadékfázisú, homogén oldat. A görbe által határolt területen a rendszer mindig heterogén, réteges zónát alkot. A görbe alatt fekvő bármely háromkomponensű elegy, például M, két, egymásban oldhatatlan, telített folyadékfázist alkot, ezek összetétele R (A-ban gazdag) és E (B-ben gazdag). Az egyensúlyi összetételeket összekötő RE vonal az *összekötővonal*, amely szükségszerűen átmegy az egész rendszert jelképező M ponton. A kétfázisú tartományban végtelen sok összekötővonal van, ezekből csak néhány van berajzolva. Az összekötővonalak rendszerint nem párhuzamosak és hajlásszögük általában egy irányban változik, amint az ábra is mutatja. Az összekötő vonalak hajlásszögének tangense az elegy komponenseinek természetétől függően változik. A P pont, a *kritikus oldási pont* az utolsó összekötővonal, vagyis az a pont, ahol a fázis egyensúlyi görbe A-ban dús és B-ben dús ága egymásba olvad. Ez a pont rendszerint nem esik egybe a görbe legnagyobb C-tartalmú pontjával.

Az E oldat C-tartalma nyilvánvalóan nagyobb, mint az R oldaté, vagyis ebben az esetben a

megoszlás a B -dús fázis felé tolódik el. Ezt legjobban a **188. ábra** jobb oldali ábrarészén megrajzolt megoszlási diagramon lehet bemutatni, mert ezen az (E, R) pont az $y = x$ átló fölött fekszik. Az y^*/x hányados, a *megoszlási hányados*, ebben az esetben 1-nél nagyobb szám. Ha az összekötő vonalak végein levő C koncentrációk összefüggését egy derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoljuk, az ábrán látható megoszlási görbét kapjuk. Ha a **189. ábra** az összekötővonalak az ellenkező irányba hajolnának, vagyis a megoszlás az A fázis felé tolódna el, a megoszlási görbe az átló alatt helyezkedne el. A megoszlási görbét az összekötővonalak interpoláció útján való meghatározására is használhatjuk, ha kísérletekből csak kevés összekötő vonal helyzete ismeretes.

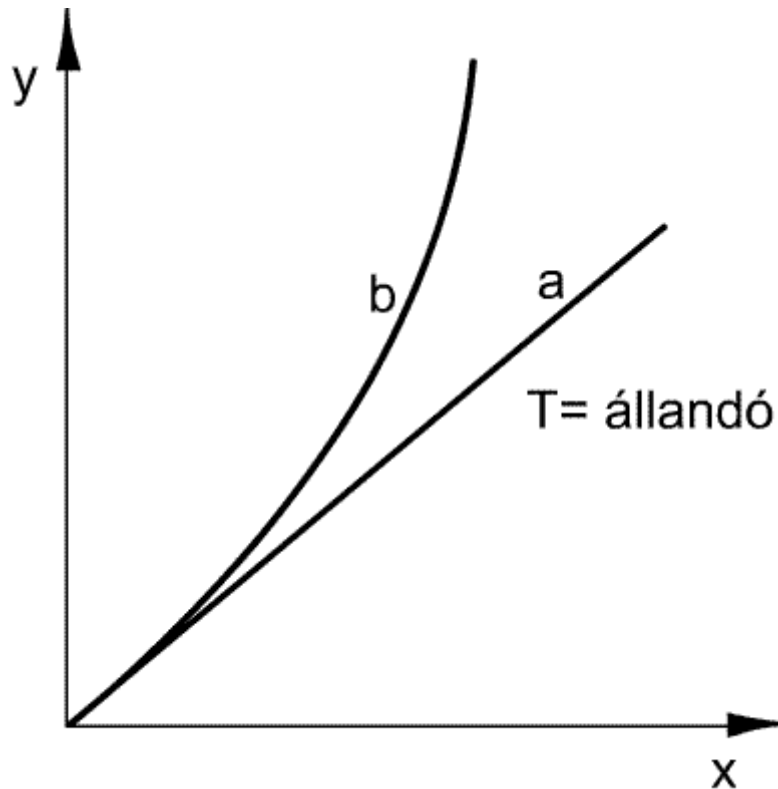
19.1.2. Egyensúlyi viszonyok ábrázolása x-y diagramon

Az extrakciós folyamat feltétele a két folyékony fázis jelenléte, amely a folyamat befejezése után a sűrűségkülönbségük miatt mechanikusan szétválasztható. A folyamat az egyensúlyi állapot eléréséig tart, amelyhez gyakran megközelítőleg el lehet jutni. A megosztott komponensnek az extraktumban levő y mennyisége (1 kg oldószerre eső komponens tömeg százalékban, mól törtben vagy tömeg törtben) és a raffinátumban levő x mennyisége között egyensúlyi összefüggés van.

Egyszerűbb az esetben, ha az oldószer gyakorlatilag teljesen oldhatatlan a raffinátumban. Folyadék-folyadék rendszerben is az egyensúly általános megfogalmazásán a nyomások, hőmérsékletek és kémiai potenciálok fázisonkénti egyenlőségét értjük. Az egyensúlyi törvényt a Nernst törvény írja le:

$$(5.5) \quad y^* = mx$$

ahol y^* az extrahálható anyag egyensúlyi koncentrációja az extraktumban, és x az extrahálható anyag koncentrációja a raffinátumban, és m a megoszlási vagy egyensúlyi állandó. Az egyensúlyi összefüggést a **189** mutatjuk be. Az összefüggés csak akkor lineáris, ha a megoszló anyag molekulái nem asszociálnak, vagy disszociálnak, és a fázisok kölcsönös oldékonysága elhanyagolható.



189. ábra: Extrakciós egyensúly

Ez határtörvény, mivel rendszerint asszociáció vagy disszociáció következnek be. Például ha az extraktumban a következő típusú asszociáció fordul elő

$$(5.6) \quad 2y_1 = y_2$$

y_1 és y_2 a monomer és dimer koncentrációja, így a tömeghatás törvénye szerint

$$(5.7) \quad \frac{y_2}{y_1^2} = K$$

ahol K egyensúlyi állandó.
Ebből következik, hogy

$$(5.8) \quad y = y_1 + 2y_2 = y_1 + 2Ky_1^2$$

Figyelembe véve a monomerre felírható megoszlási törvényt

$$(5.9) \quad y_1 = mx$$

megkapjuk az extrakciós egyensúlyi egyenletet

$$(5.10) \quad y_1 = (m + 2Km^2x)x$$

Ebben az esetben az egyensúlyi összefüggés görbe vonallal ábrázolható, **189. ábra** görbe, és a megoszlási törvényt az egész komponens mennyiségre nem alkalmazható.

19.2. Az oldószer kiválasztása

Az extrakciós műveletekhez alkalmazandó oldószert rendszerint igen nagyszámú folyadék közül választhatjuk ki. Nem valószínű, hogy akad ezek között olyan folyadék, amelynek összes tulajdonságai megtevelnek az extrakció követelményeinek, tehát bizonyos engedményeket kell tennünk. Az alábbiakban felsoroljuk az oldószer kiválasztásához megvizsgálandó tulajdonságokat. Az oldószer kiválasztásának általános szempontjait már tárgyaltuk, itt az extrakcióra vonatkozó szempontokat emeljük ki.

1. *Szelektivitás.* Valamely B oldószernek egy $A - C$ oldat szétválasztására való alkalmasságát úgy bírálhatjuk el, ha C és A mennyiségének arányát a két egyensúlyi fázisban elosztjuk egymással. A két arány hányadosa, a szelektivitás (β), analóg a lepárlásnál megismert relatív illékonyssággal. Ha E és R az egyensúlyi fázisok, akkor a szelektivitás $\beta = [y_E^* \cdot (A \text{ tömegtörtje az } R\text{-ben})] / [x_A^* \cdot (A \text{ tömegtörtje az } E\text{-ben})]$, vagyis

$$(5.11) \quad \beta = \frac{\frac{y_E^*}{(y_A)_E}}{\frac{x_R^*}{(x_A)_R}} = \frac{y_E^* (x_A)_R}{x_R^* (y_A)_E}$$

A (5.11) egyenletben x_R^* és y_E^* a kiextrahálandó C komponens egyensúlyi koncentrációi a raffinátumban és az extraktumban, $(x_A)_R$ és $(y_A)_R$ az A komponens koncentrációi a raffinátumban és az extraktumban. A szelektivitás az extrakciós műveletnél akkor jó, ha az értéke 1-nél jóval nagyobb, $\beta > 1$. Ha a szelektivitás 1-gyel egyenlő, $\beta = 1$, nem lehetséges szétválasztása. A szelektivitás rendszerint erősen változik az oldott anyag koncentrációjával, és az 5.3. ábrán bemutatott elegytípusnál a kritikus oldási pontban egységnyi lesz. Vannak olyan rendszerek, amelyeknél kezdetben nagy a szelektivitás, $\beta > 1$, majd fokozatosan csökken, $\beta = 1$, és egységnyi szelektivitáson át, végül egynél kisebbre változik, $\beta < 1$. Ezek analógok a desztillációnál előforduló azeotróp elegyekkel.

2. *Megoszlási hányados.* Ez az egyensúlyi y^*/x hányados. Bár nem feltétlenül szükséges, hogy a megoszlási hányados 1-nél nagyobb legyen, de mégis kívánatos, mert ebben az esetben az extrakció oldószerszükséglete csökken.

3. *Az oldószer A-ban oldhatatlan legyen.*

4. *Regenerálhatóság.* Az oldószert újbóli felhasználás előtt mindig regenerálni kell, ezt rendszerint egy másik diffúziós művelettel, többnyire lepárlással végezzük. Ebben az esetben vigyázni kell, hogy az oldószer ne képezzen azeotrópot az extrahált oldott anyaggal, és a keletkezett elegyben a relatív illékonysság lehetőleg nagy legyen, mert ezzel a szétválasztás olcsóbb lesz. A hő szükséglet csökkentése szempontjából előnyös, ha a regenerálandó oldatban, a kisebb mennyiségben jelen levő anyag az illékonyabb. Amennyiben az oldószert kell lehajtani, célszerű olyan oldószert választani, melynek kicsi a párolgás hője.

5. *Sűrűség.* A szakaszos és a folytonos műveletek kivitelezésének is előfeltétele, hogy a két telített fázis sűrűsége eltérő legyen, mégpedig minél nagyobb mértékben. Egyes elegyeknél a sűrűségkülönbség a kritikus oldási pont elérése előtt ellenkező értelművé válik, ilyen esetekben, abban a koncentrációtartományban, ahol a sűrűségkülönbség értéke nullán átmegy, folytonos készüléket nem lehet működtetni.

6. *Felületi feszültség.* A nagy felületi feszültség megkönnyíti az emulziók szétválását, viszont megnehezíti az egyik fázisnak a másikba való diszpergálását. Rendszerint a szétválás a fontosabb szempont, ezért a felületi feszültség lehetőleg nagy legyen.

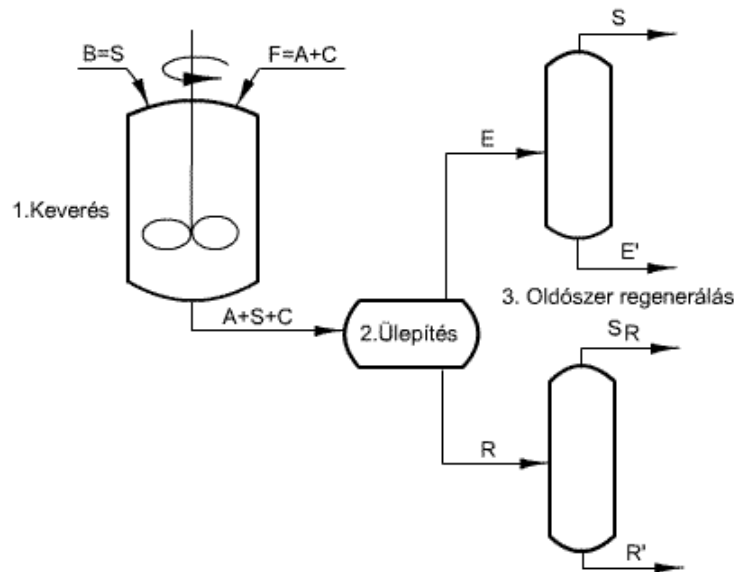
7. *Kémiai reakcióképesség.* Az oldószer kémiailag stabil legyen, a rendszer többi komponenseivel ne reagáljon, és a berendezés szerkezeti anyagait ne támadja meg.

8. *Viszkózitás, gőznyomás, fagyáspont.* Ezek értéke kicsi legyen a könnyebb kezelhetőség és tárolás szempontjából.

9. *Egyéb tulajdonságok.* Az oldószer ne legyen mérgező, ne legyen gyúlékony és lehetőleg olcsó legyen.

19.3. Az extrakció kivitelezése

Az extrakció elvi három részfolyamatát a **190. ábra** mutatjuk be. Az első lépésben a korlátoltan elegyedő anyaoldat $F=A+C$ és a B fázis intenzív érintkeztetése, keverése nyomán lezajlik a komponensátmenet. Amennyiben a már említett szennyvíz fenol tartalmát butil-acetátos extrakcióval távolítjuk el, akkor az A komponens a víz, a megoszló C komponens (amit eltávolítunk a vízből) a fenol, és az oldószer, amibe átmegy a C komponens, a B fázis a butil-acetát. A B fázist igen gyakran szerves oldószer, amit oldószerként említik és S -el jelölik, az A fázis igen gyakran víz. A második lépésben az oldószer tartalmazó E extrakt fázis és a "megtisztított" R , raffinát fázis, szétválasztása történik. A két fázis sűrűsége különböző, ezért ülepítéssel szétválaszthatók. Egy-egy fokozat a fázisok érintkeztetését és a szétválasztását foglalja magába. A harmadik lépésben az E és R fázisok oldószer mentesítését valósítják meg, aminek során az E' és R' végtermék, illetve az újra felhasználható S oldószer keletkezik. Mivel az oldószer visszanyerés a legtöbb esetben desztillációval vagy rektifikálással történik, a teljes extrakciós eljárás összetett műveletként értelmezhető, és ez megdrágíthatja a folyamatot.

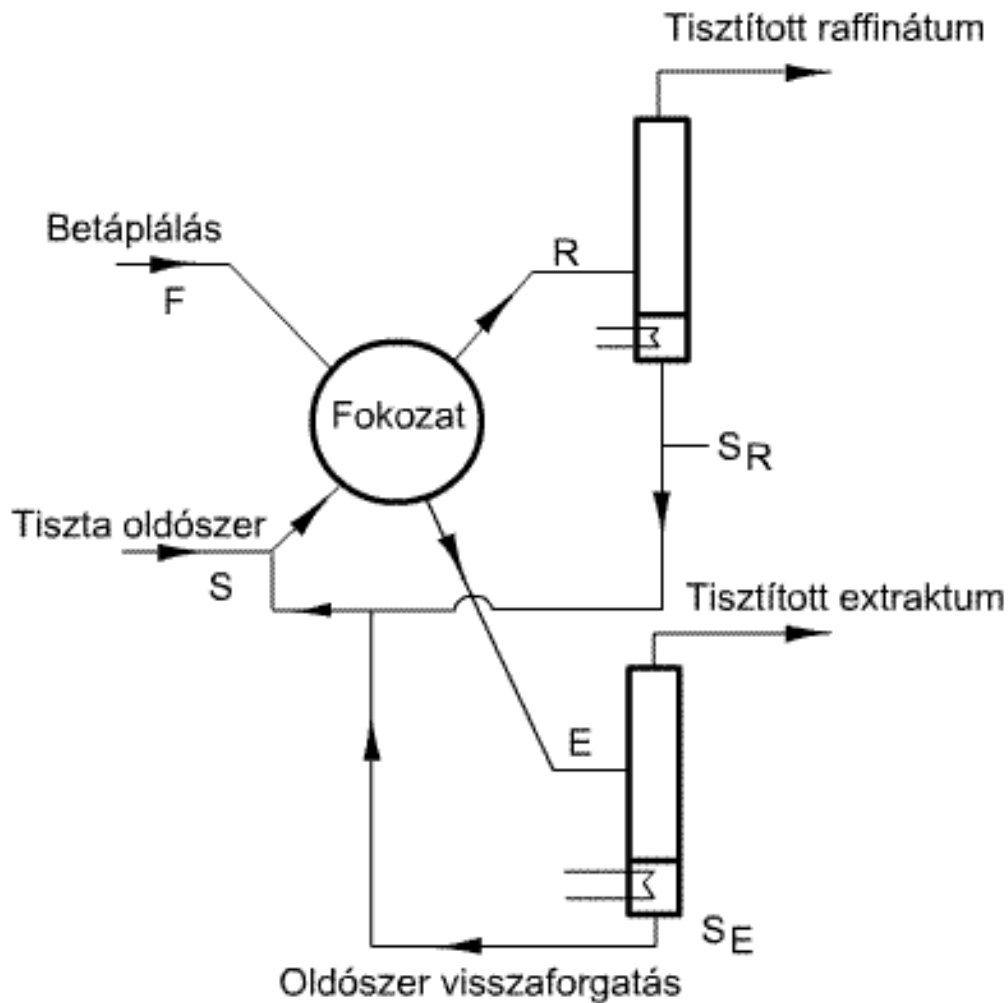


190. ábra: Az extrakció három fokozata

Az extrakciót általában többfokozatú berendezésekben hajtják végre. A többfokozatú extrakció a rendszer természetétől és a kívánt szétválasztás mértékétől függően többféle módon is elvégezhető. Egy fokozaton *elméleti fokozatot* kell érteni, tehát a fokozatból kilépő extraktum és raffinátum egymással egyensúlyban vannak. Minden fokozatban kell lenni a nem elegyedő folyadékok összekeverésére és a kilépő folyadékáramok szétválasztására szolgáló berendezésnek, így egy keverő és egy ülepítő alkot egy fokozatot. Többfokozatú műveletet az egyfokozatú műveletek tetszés szerinti kapcsolásával alakíthatunk ki, melyek lehetnek kaszkádok vagy fokozatcsoportok. Ellenáramú többfokozatú művelet fokozat típusú, például tányéros oszlopokban is megvalósíthatunk.

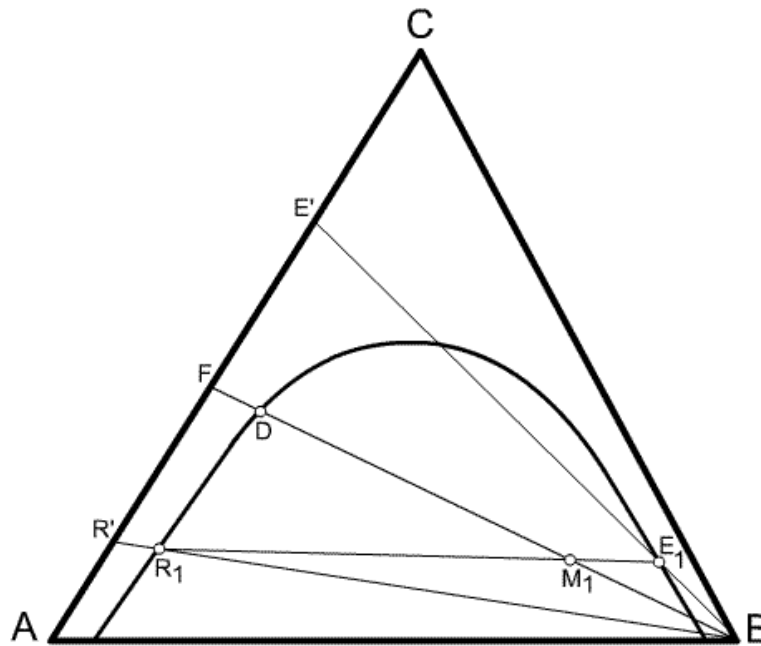
19.3.1. Egylépcsős egyensúlyi extrakció

Az egylépcsős egyensúlyi extrakció, amit egyfokozatú extrakciónak is nevezünk, alapja a többfokozatú extrakciónak, és végezhető szakaszos vagy folyamatos üzemmódban. A művelet vázlatát a **191. ábra** mutatja. Az ábrán feltüntettük az érintkeztetésből és elválasztásból álló extrakciót, és az oldószer visszanyerést is.



191. ábra: Egyensúlyi extrakció oldószer visszanyeréssel

A betáplálás vagy más néven az anyaoldat szakaszos műveletben F tömeg, folyamatos műveletben tömegáram, és az $F=A+C$ elegy C -komponensének koncentrációja x_0 . Az az extraktumban a C anyag koncentrációját y -nal, a raffinátumban x -szel jelöljük. Az oldószer regenerálása (visszanyerése) céljából mindkét termékéből kinyerjük az S oldószer, ezáltal az E' és az R' oldószermentes termékekhez jutunk.



192. ábra: Egyfokozatú extrakció mérlege háromszög diagramon

Amennyiben figyelembe akarjuk venni az A és B komponens kölcsönös oldhatóságát, folyamatot a **192. ábra** bemutatott fázisdiagramon kell ábrázolni. S és F összekeverésekor az extrakciós fokozatban az M_1 elegy keletkezik. Ez az elegy az egyensúlyban levő, tehát az M_1 ponton átmenő összekötő vonal két végpontján levő E_1 és R_1 fázisra válik szét. Az összekötő vonal hajlásszögének tangense az elegy komponenseinek tulajdonságától függően változik. Az M_1 helyzetét az FB egyenesen az elegyszabállyal (5.1) egyenlet, is meghatározhatjuk, pontosabb eredményt nyerünk, ha M_1 C -tartalmát határozzuk meg. A teljes anyagmérleg:

$$(5.12) \quad F + S = M_1 = E_1 + R_1$$

A C -re felírt fajlagos anyagmérleg:

$$(5.13) \quad Fx_0 + Sy_0 = M_1x_{M1}$$

$$(5.14) \quad x_{M1} = \frac{Fx_0}{M_1} = \frac{Fx_0}{F + S}$$

Meghatározható egy adott M_1 pont létrehozásához szükséges S oldószer mennyisége:

$$(5.15) \quad S = \frac{F(x_0 - x_{M1})}{x_{M1} - y_0}$$

Az M_1 pontnak a kétfázisú tartomány belsejében kell elhelyezkednie, hogy az extrakció alapját képező két nem-elegyedő folyadékfázis létrejöjjön. A felhasználandó oldószer minimális mennyiségét tehát kiszámíthatjuk, ha az M_1 pontot D -be helyezzük, ekkor az extraktum mennyisége természetesen végtelen kicsi lesz, maximális mennyiségét pedig úgy számíthatjuk ki, ha az M_1 pontot G -be helyezzük, ekkor a raffinátum mennyisége lesz végtelen kicsi.

Az extraktum és a raffinátum mennyiségét az elegyítési szabály segítségével a (5.1) egyenletből, vagy pedig a C anyagra felírt fajlagos anyagmérlegből kapjuk:

$$(5.16) \quad E_1 y_1 + R_1 x_1 = M_1 x_{M1}$$

$$(5.17) \quad E_1 = \frac{M_1(x_{M1} - x_1)}{y_1 - x_1}$$

Az R_1 -et a (5.12) egyenlet segítségével határozható meg. Ha az E_1 és R_1 oldatból eltávolítjuk az oldószert, az AC egyenesen elhelyezkedő E' és R' oldatot nyerjük. Ilyen módon az egész művelet végeredménye az F anyaoldat szétválasztása R' és E' termékekre. R' és E' mennyisége meghatározható akár az elegyítési szabály, akár az anyagmérlegek segítségével:

$$(5.18) \quad F = R' + E'$$

$$(5.19) \quad E' = \frac{F(x_0 - x'_R)}{x'_E - x'_R}$$

Az E_1 extraktum C anyagtartalma akkor lesz a legnagyobb, ha az extrakciót a minimális oldószert mennyiséggel végeztük (M_1 a D pontban), az E' végtermékben viszont akkor, ha az oldószert visszanyerést ábrázoló $E'B$ egyenes a fázisegyensúlyi görbe érintője. Az A anyag tartalom R' -ben illetve R_1 -ben akkor lesz maximális, ha a maximális oldószert mennyiséggel extrahálunk, az M_1 a G pontban van.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor, a fázisok kölcsönös oldékonysága elhanyagolható, az egyensúlyi fokozat stacionárius üzemű, a disszociációs és asszociációs kölcsönhatások nem lépnek fel, tehát az egyensúly a (5.5) egyenlettel definiált lineáris izotermával jellemezhető. Ennek alapján F , S , R , E (kg/s) értékben megadható tömegáramok, y és x tömegtörtek, m megoszlási hányados pedig állandó.

Az egyensúlyi fokozat teljes anyagmérleg az extraktorban a (5.12) egyenlet írja le. A komponensre vonatkozó fajlagos mérleg:

$$(5.20) \quad Fx_0 + Sy_0 = Fx_0 = Ey_1 + Rx_1$$

Híg oldatokra érvényes $E=S$ és $R=F$ egyenlőség, és tiszta oldószert alkalmazunk, melynek az extrahálendő komponens koncentrációja $y_0=0$.

$$(5.21) \quad Fx_0 = Sy_1 + Fx_1$$

Az $y_1 = mx_1$ egyensúlyi összefüggést felhasználva:

$$(5.22) \quad Fx_0 = Smx_1 + Fx_1 = x_1(mS + F)$$

Az extrakció oldószert szükséglete a (5.22) egyenletből:

$$(5.23) \quad S = \frac{F}{m} \left(\frac{x_0 - x_1}{x_1} \right) = \frac{F}{m} \left(\frac{x_0}{x_1} - 1 \right).$$

A kilépő R raffinátum és a belépő F nyersanyag koncentrációinak hányadosa, ugyancsak a (5.22) egyenletből:

$$(5.24) \quad \frac{x_1}{x_0} = \frac{F}{F + mS} = \frac{1}{1 + \frac{mS}{F}}$$

Az (5.24) egyenletben az $f = S/F$ hányadost folyadékviszonynak az mS/F törtet extrakciós faktornak nevezzük, és mivel egyértelműen jellemzi a raffinátum elszegényedésének fokát, gazdasági jelentősége nagy. A gazdaságos üzemeltetéshez $1,2 < Sm/F < 2$, tartomány látszik kedvezőnek. A megoszló C komponens kinyerési foka:

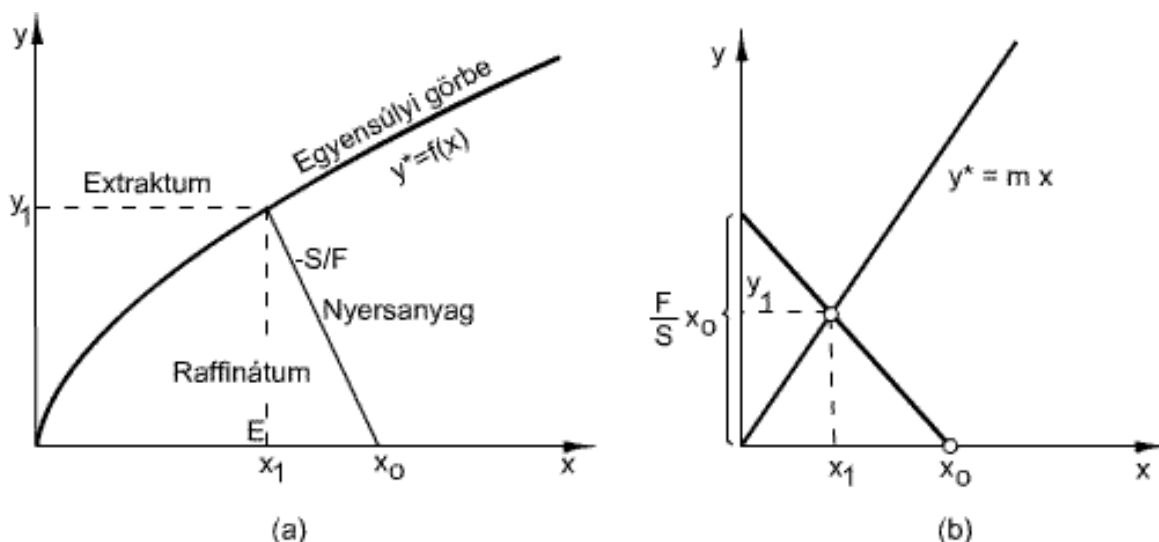
$$(5.25) \quad \eta = \frac{x_0 - x_1}{x_0} = 1 - \frac{x_1}{x_0} = 1 - \frac{F}{F + mS} = \frac{mS}{F + mS} = \frac{\frac{mS}{F}}{1 + \frac{mS}{F}}$$

Az (5.25) egyenlet kinyerési fok valódi tört, értéke az előző feltételeket használva 55-65 % között van.

A koncentráció viszonyokat ábrázolhatjuk az x - y diagramon. A (5.20) egyenletet átrendezve egy lineáris összefüggéshez

$$(5.26) \quad y_1 = -\frac{F}{S}x_1 + \frac{F}{S}x_0 + y_0$$

a művelet munkavonalához jutunk. Természetesen tiszta oldószer esetén $y_0 = 0$.



193. ábra: Az egyfokozatú extrakció grafikus mérlege

A **193. ábra** a munkavonal és az egyensúlyi vonal viszonyát mutatjuk be egyetlen fokozat esetén.

A (5.26) munkavonal az x_0 pontból indul, iránytangense $-(F/S)$, és a tengelymetszete Fx_0/S . A munkavonal, amennyiben az egyensúly beáll a műveleti egységben, eléri (képzeletben metszi) az egyensúlyi egyenest, vagy görbét, meghatározza az extraktum y_1 és a raffinátum x_1 összetételét. Jól látható, hogy a két vonal metszése adja a megoszló komponens legmagasabb kinyerési fokát. Ezt tovább növelni csak a két egyenes jellemző paraméterének (az m és az F/S)

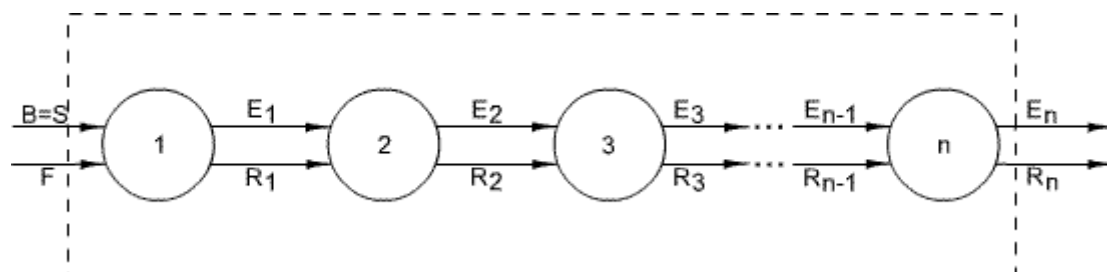
megváltoztatásával lehet. Hasonló megfontolások alapján számolható az egyszeri szakaszos extrakció is, csak az F , S , R és E értékei nem tömegáram, hanem tömeg dimenziójú lesz.

19.3.2. Többfokozatú extrakció

Az egyensúlyi fokozatok sorba kapcsolásával kialakított kaszkádokban az extrakció hatásfoka jelentősen növelhető. Az áramló fázisok iránya szerint megkülönböztethetünk egyenáramú, keresztáramú és ellenáramú többfokozatú műveletsort.

19.3.2.1. Többfokozatú egyenáramú extrakció

Az egyenáramú esete azonban makroszkopikusan csupán egyetlen fokozatot jelent, hiszen E_1 és R_1 fázisok egyensúlyban vannak, akkor a fázisarány nem változhat meg a $2, \dots, n$ -edik fokozatban. Az egyenáramú extrakció elvi vázlatát a **194. ábra** látható.

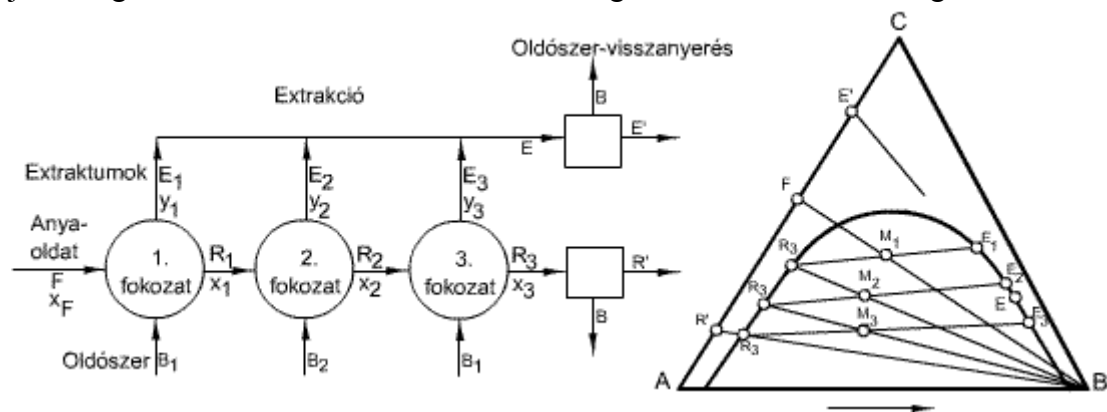


194. ábra: Egyenáramú extrakció elvi vázlatát

Ha viszont az egyensúlyt csupán az n -edik fokozatban éri el az E_n illetve az R_n fázis, akkor az a fokozatszámú szerkezet jelenti az egyetlen egyensúlyi fokozatot.

19.3.2.2. Többfokozatú keresztáramú extrakció

A többfokozatú keresztáramú extrakció, az egyfokozatú extrakció megismétlése, a raffinátumot ismételten friss oldószerrel történő extrahálásával. A művelet szakaszosan és folyamatosan is végezhető. A **195. ábra** egy háromfokozatú extrakció folyamatábráját tüntettük fel. Egyetlen raffinátumot nyerünk, R_3 -at, amelyből az oldószer eltávolítása után visszamarad az R' késztermék. A három extraktum az ábrán bemutatott módon együtt vihető el feldolgozásra, így nyerjük a végső E' extraktumot. A művelet tetszőleges számú fokozatban végezhető.



195. ábra: Többfokozatú keresztáramú extrakció oldószer visszanyeréssel

A számításokat itt egyenlő oldalú háromszögű koordináta-rendszerben végezzük, de ugyanúgy használhatunk x, y koordinátákkal derékszögű koordináta-rendszert is, az összefüggések és a

szerkesztési vonalak viszonylagos helyzete ugyanaz lesz. Az első fokozatra a (5.12)-(5.19) anyagmérlegek mind érvényesek. Minden más, n -edik fokozatra az anyagmérleg a következő:

$$(5.27) \quad R_{n-1} + S_n = M_n = E_n + R_n$$

Az extrahálendő C anyag fajlagos mérlegegyenlete:

$$(5.28) \quad R_{n-1}x_{n-1} + S_n y = M_n x_{Mn} = E_n y_n + R_n x_n$$

A C anyagmérlegből levezethető:

$$(5.29) \quad x_{Mn} = \frac{R_{n-1}x_{n-1}}{M_n} = \frac{R_{n-1}x_{n-1}}{R_{n-1} + S_n}$$

A C anyagmérlegből levezethető

$$(5.30) \quad S_n = \frac{R_{n-1}(x_{n-1} - x_{Mn})}{x_{Mn}}$$

$$(5.31) \quad E_n = \frac{M_n(x_{Mn} - x_n)}{y_n - x_n}$$

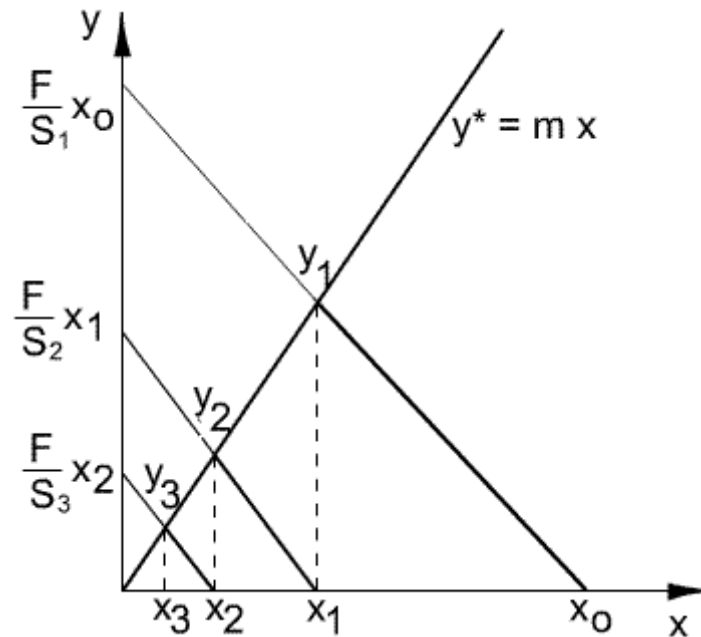
Az M_n pont az $R_{n-1}B$ egyenesen fekszik, és az M_n ponton átmenő összekötővonal két végpontja megadja E_n -t és R_n -t.

Az egyes fokozatokban különböző oldószer mennyiséggel extrahálhatunk, sőt különböző hőmérsékleten is dolgozhatunk, ebben az esetben azonban minden egyes fokozatra a számítást a megfelelő hőmérséklethez tartozó egyensúlyi diagramon kell elvégezni. Az egyes fokozatok extraktumainak összeöntésével az E elegyet nyerjük, ennek mennyisége és összetétele anyagmérlegekkel határozható meg. E' helyét meghatározhatjuk, ha a BE egyenest meghosszabbítjuk az AC tengelyig. Hasonlóképpen R' helyét úgy határozzuk meg, hogy az utolsó fokozat raffinátumát ábrázoló pontot B -vel összekötő egyenest meghosszabbítjuk. Az R' raffinátumban A -ra nézve tetszés szerinti tisztaságot érhetünk el a fokozatok számának növelésével.

Ha az extraháló oldószer és az anyaoldat egymással egyáltalában nem elegyednek a műveletben előforduló egész koncentráció tartományban, a számítások egyszerűsíthetők. Vegyük alapul továbbra is **195. ábra**. Amint láttuk a művelet lényegében az egyszeri egyensúlyi extrakció egymás utáni ismételt megvalósítása oly módon, hogy a kiindulási F oldat végighalad valamennyi fokozaton, mint R_1, R_2, \dots, R_n raffinátum. Ugyanakkor az S összes oldószer megoszlik S_1, S_2, \dots, S_n , belépő részarámokra, mely részarámok kilépő értékei az E_1, E_2, E_n extrakt fázisok. Minden egyes fokozatra felírjuk külön-külön a (5.26) munkavonal egyenletét. Így a munkavonal egyenlete a 2. fokozatra,

$$(5.32) \quad y_2 = -\frac{F}{S}x_2 + \frac{F}{S}x_1$$

és így tovább, amint azt a **196. ábra** látható.



196. ábra: Munkavonal és egyensúlyi vonal keresztáramú extrakció esetén

Vizsgáljuk meg az $n = 3$ fokozatú folyamat oldószer elosztását. A feladat az S tömegáramú, szakaszos esetben az S tömegű, oldószert szétosztása a három fokozat között úgy, hogy a legalacsonyabb x_3 érték, ami ezzel egyenértékű, legterményebb extraktum álljon elő. Induljunk ki az (5.24) egyenletből:

$$(5.33) \quad x_1 = x_0 \frac{F}{F + mS_1}$$

Ugyanekkor

$$(5.34) \quad x_2 = x_1 \frac{R_1}{R_1 + mS_2} = x_1 \frac{F}{F + mS_2}$$

$$(5.35) \quad x_3 = x_2 \frac{F}{F + mS_3}$$

A három egyenlet rendezve és egymásba helyettesítve:

$$(5.36) \quad \frac{x_3}{x_0} = \frac{F^3}{(F + mS_1)(F + mS_2)(F + mS_3)}$$

Figyelembe véve, hogy

$$(5.37) \quad S = S_1 + S_2 + S_3$$

Az (5.36) összefüggés az alábbi alakra hozható:

$$(5.38) \quad \frac{x_3}{x_0} = \frac{F^3}{(F + mS_1)(F + mS_2)[F + m(S - S_1 - S_2)]}$$

Az (5.38) egyenlet minimuma a nevező (N_m) maximumánál van, mivel a számláló állandó. Ennek meghatározásához képezzük az (N_m) nevező S_1 és S_2 szerinti differenciálhányadosát és tegyük nullává:

$$(5.39) \quad \left(\frac{\partial N_m}{\partial S_1} \right)_{S_2} = S - 2S_1 - S_2 = 0$$

$$(5.40) \quad \left(\frac{\partial N_m}{\partial S_2} \right)_{S_1} = S - 2S_2 - S_1 = 0$$

E két egyenletből a (5.37) figyelembevételével:

$$(5.41) \quad S_1 = S_2 = S_3$$

Eredményül azt a nem triviális megoldást kaptuk, hogy az oldószert legelőnyösebb egyenlően felosztani a fokozatok között. Vizsgáljuk meg, hogy az így elért eredmény mennyivel jobb, mint az egyfokozatúé, vagyis ha az S oldószert áramát egyszerre egy fokozatban alkalmazzuk. A három fokozat eredménye:

$$(5.42) \quad \frac{x_3}{x_0} = \frac{F^3}{(F + S_1 m)^3}$$

Ugyanez egy fokozatban:

$$(5.43) \quad \frac{x'_3}{x_0} = \frac{F}{F + 3S_1 m}$$

Az (5.42) egyenlet nevezőjét kifejtve, majd a számlálót és a nevezőt is F^2 -el elosztva:

$$(5.44) \quad \frac{x_3}{x_0} = \frac{F}{F + 3mS_1 + 3\frac{mS_1^2}{F} + \frac{mS_1^3}{F^2}}$$

Az (5.43) és a (5.44) egyenletek összehasonlításából következik, hogy

$$(5.45) \quad \frac{x'_3}{x_0} > \frac{x_3}{x_0} .$$

Vagyis látható, hogy az x_3 minden esetben kisebb, mint x'_3 , tehát a többfokozatú keresztáramú extrakció minden esetben jobb, mint az egyfokozatú.

A megoszló komponens kinyerési foka:

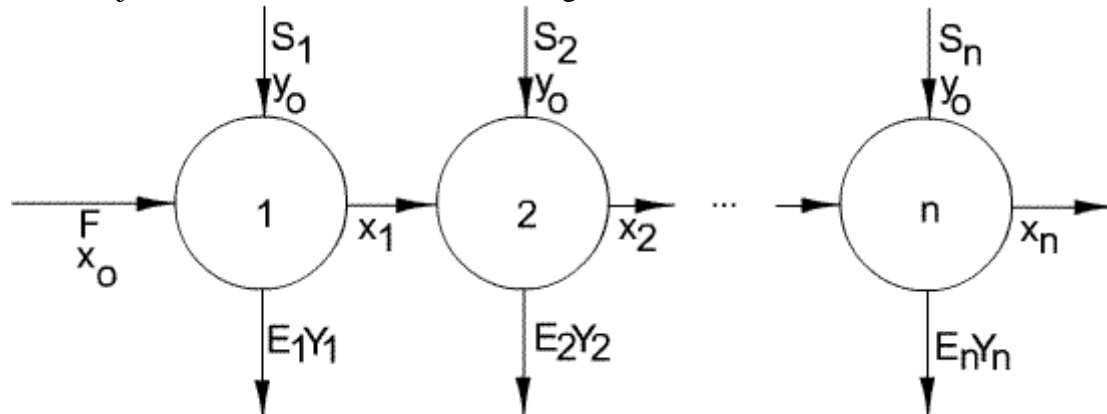
$$(5.46) \quad \eta = \frac{3 \frac{S_1 m}{F} + \frac{1}{3} \left(\frac{3S_1 m}{F} \right)^2 + \frac{1}{27} \left(\frac{3S_1 m}{F} \right)^3}{1 + 3 \frac{S_1 m}{F} + \frac{1}{3} \left(\frac{3S_1 m}{F} \right)^2 + \frac{1}{27} \left(\frac{3S_1 m}{F} \right)^3}$$

Ha az extrakciós faktor $3 \frac{S_1 m}{F} = 2$ értékével számolunk, akkor $\eta = 75\%$ adódik. Ugyanez egy fokozatnál 67% -os.

Ideális esetben a fokozatok számát analitikusan is meghatározhatjuk. Tételezzük fel most is, hogy a megoszlási koefficiens m az egész tartományban állandó, és a felhasznált oldószer mennyisége minden fokozatban egyenlő, vagyis $S_1 = S_2 = \dots = S_n = S/n$. Induljunk ki az (5.21) egyenletből és írjuk fel a mérlegegyenletet a **197. ábra** bemutatott kaszkád mindegyik fokozatára. Mérlegegyenlet a kaszkád első elemére:

$$(5.47) \quad Fx_0 = S_1 y_1 + Fx_1 = S_1 m x_1 + Fx_1 = x_1 (mS/n + F)$$

Az első elembe belépő F kiextrahálható elegy x_0 koncentrációjú, és a kilépő R_1 raffinátum koncentrációja x_1 . Nem oldódó fázisokról, és híg oldatokról lévén szó, $F = R_1 = R_2 = \dots = R_n$.



197. ábra Keresztáramú extrakció fokozatai

az x_1 és az x_0 koncentrációk közötti összefüggés:

$$(5.48) \quad x_1 = \frac{F}{F + mS/n} x_0.$$

Mérlegegyenlet a kaszkád második fokozatára:

$$(5.49) \quad Fx_1 = S_2 m x_2 + Fx_2 = x_2 (mS/n + F),$$

és a raffinátum koncentrációk közötti összefüggés:

$$(5.50) \quad x_2 = \frac{F}{F + mS/n} x_1 = \left(\frac{F}{F + mS/n} \right)^2 x_0.$$

Koncentrációk közötti összefüggés n fokozatra:

$$(5.51) \quad x_n = x_0 \left(\frac{F}{F + mS/n} \right)^n.$$

A szükséges oldószer mennyiségét a (5.51) egyenletből számíthatjuk, ha a fokozatok száma rögzítve van:

$$(5.52) \quad S = n \frac{F}{m} \left[\left(\frac{x_0}{x_n} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right].$$

Amennyiben az S összes oldószer mennyisége adott, akkor a fokozatok számát iterációval szintén számíthatjuk.

19.3.2.3. Többfokozatú folyamatos ellenáramú extrakció

Az iparban igen gyakran a többfokozatú, ellenáramú extrakciót alkalmazzák. A készülék itt is sorba kapcsolt fokozatokból állnak. Az F kiindulási oldat és az S oldószer a berendezés két ellentétes végpontján lép be, ennek megfelelően az R_n raffinátum az n -ik fokozatából az extraktum E_1 pedig az első fokozatból lép ki, **198. ábra**.



198. ábra: Többfokozatú ellenáramú extrakció.

A tömeg és komponens mérlegek az első fokozatra

$$(5.53) \quad F - E_1 = R_1 - E_2$$

$$(5.54) \quad Fx_0 - E_1y_1 = R_1x_1 - E_2y_2$$

A tömeg és komponens mérlegek az első két fokozatra

$$(5.55) \quad F - E_1 = R_2 - E_3$$

$$(5.56) \quad Fx_0 - E_1y_1 = R_2x_2 - E_3y_3$$

A tömeg és komponens mérlegek az n fokozatra

$$(5.57) \quad F - E_1 = R_n - S$$

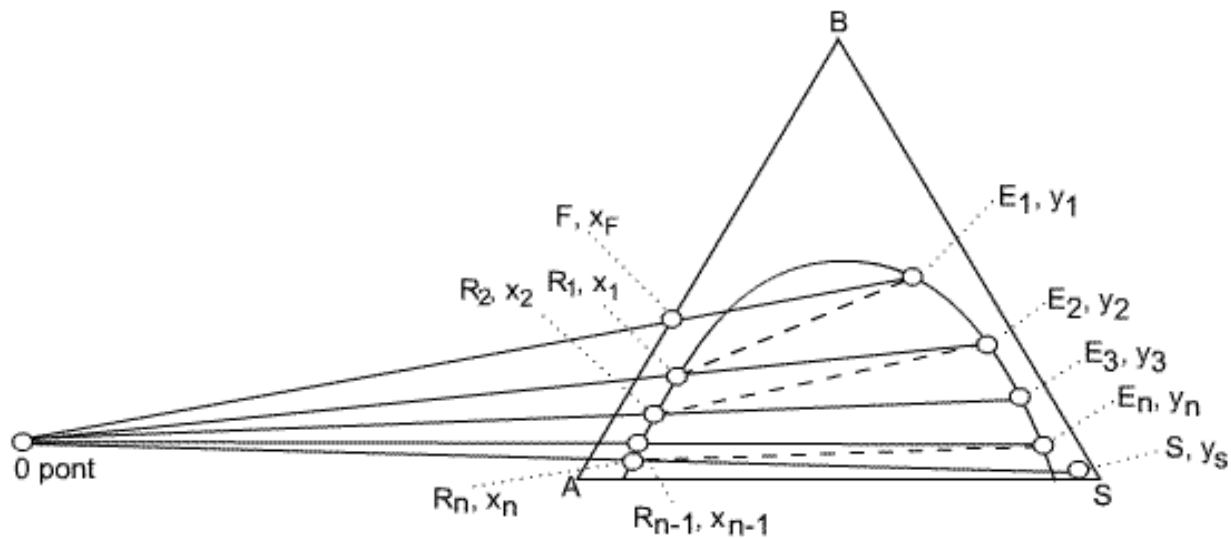
$$(5.58) \quad Fx_0 - E_1y_1 = R_nx_n - Sy_0$$

és

$$(5.59) \quad F - E_1 = R_n - S = R_1 - E_2 = R_2 - E_3 = R_3 - E_4 = R_4 - E_5 = \dots = \text{konstans}$$

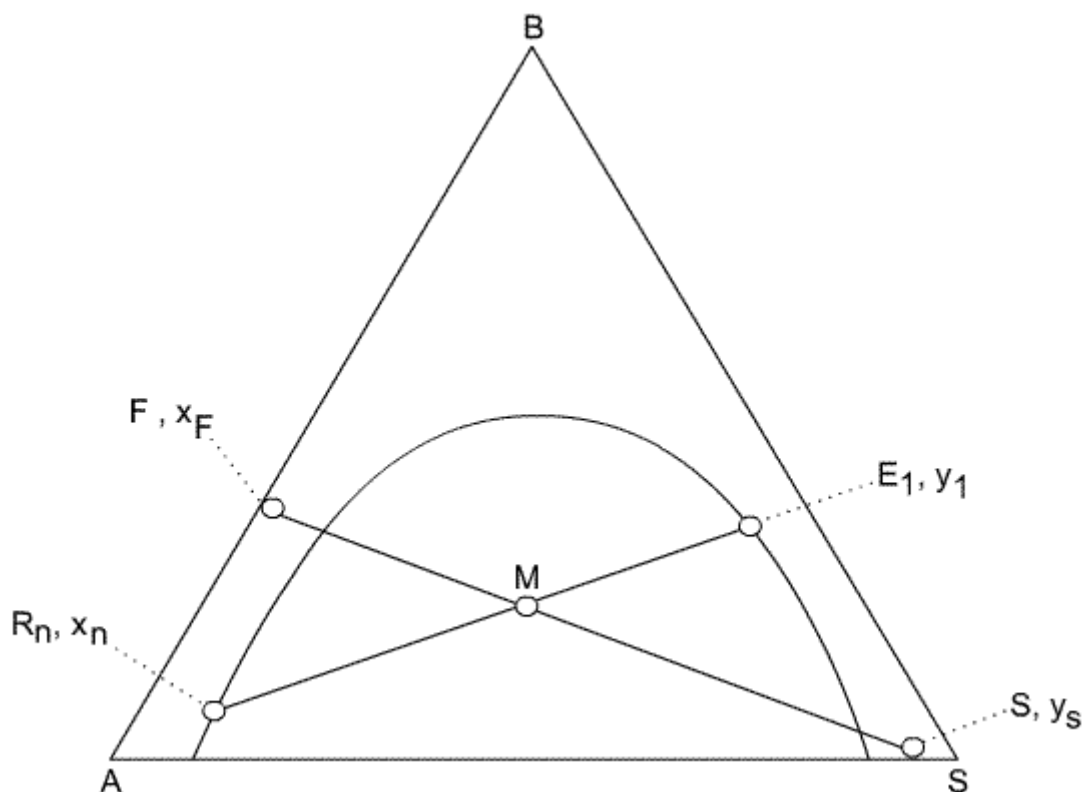
A fenti egyenletek alapján, a műveleti egység adott helyén a tömeg és a komponensáramok különbsége állandó (5.59) egyenlet. A háromszög diagramon az áramok összetételét megadó

pontokat összekötő egyenesek egy pontban az úgynevezett különbségi pontban (*o-pont*) kell találkozniuk. Az egyes fokozatokból kilépő fázisok összetételeit a binódák, vagy más néven az összekötő vonalak határozzák meg.



199. ábra: Többfokozatú ellenáramú extrakció háromszög diagramon

A számításokat a **200. ábra** szemlélteti. Az F extrahálható anyagáramot, S mennyiségű oldószerrel extraháljuk. Az S oldószer mennyisége adja meg az M helyét. Az n fokozatú extraktorból x_1 és y_n összetételben lép ki a raffinátum és az extraktum.



200. ábra: Ellenáramú extrakció számítása háromszög diagramon

A kiindulási értékek F , x_0 és y_0 adottak és a szétválasztási követelmények x_n és y_1 előírtak. Meg kell határozni az E_1 , S , R_n és n értékeket.

19.3.2.4. *Ellenáramú extrakció nem elegyedő oldószerpárok esetében*

Amennyiben $R_n = R_{n-1} = \dots = R_1 = F$ és $S = E_n = \dots = E_2 = E_1$, akkor bármely a fokozatra igaz, hogy

$$(5.60) \quad Fx_0 + Sy_{n+1} = Fx_n + Sy_1,$$

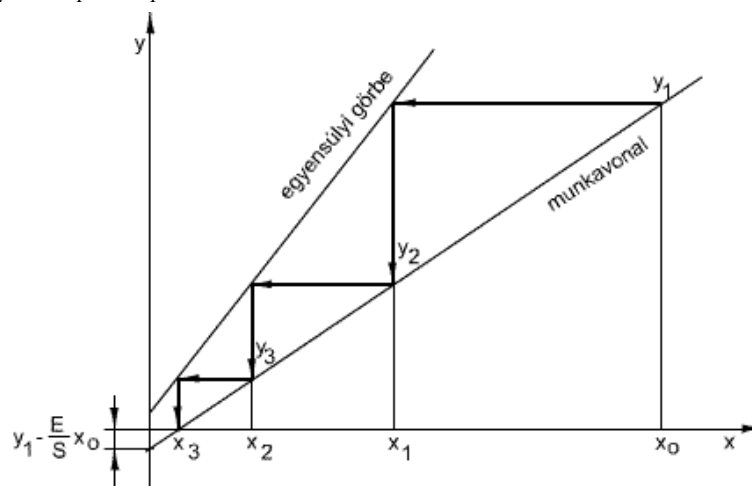
Tehát

$$(5.61) \quad y_{n+1} = \frac{F}{S}(x_n - x_0) + y_1$$

lineáris összefüggést az n fokozatból álló, ellenáramú extrakciós kaszkád munkavonala. A **201. ábra** y-x diagramban ábrázolva pozitív meredekségű egyenest kapunk, és lépcsőzéssel meghatározhatók az egyes fokozatok állapotai.

Kövessük most analitikus módon a lépcsőzés módszerét. Az első fokozat fajlagos tömegmérlege

$$(5.62) \quad Fx_0 + Sy_2 = Fx_1 + Sy_1$$



201. ábra: Ellenáramú extrakció y-x diagramja

Az egyensúlyi törvény szerint $x_1 = y_1/m$. Behelyettesítve a (5.62) egyenletbe, majd az átrendezés után:

$$(5.63) \quad Sy_2 = y_1 \left(\frac{F}{m} + S \right) - Fx_0 = mx_1 \left(\frac{F}{m} + S \right) - Fx_0$$

Ha csupán egy fokozatból állna az extrakciós művelet, akkor $y_2 = y_0 = 0$ lenne, tehát

$$(5.64) \quad 0 = mx_1 \left(\frac{F}{m} + S \right) - Fx_0$$

vagyis

$$(5.65) \quad \frac{x_1}{x_0} = \frac{1}{1 + \frac{mS}{F}} = \frac{\frac{F}{mS}}{\frac{F}{mS} + 1} = \frac{f^*}{f^* + 1}$$

ahol $\frac{F}{mS} = f^*$

Az extrakció kinyerési foka:

$$(5.66) \quad \eta_1 = \frac{x_0 - x_1}{x_0} = \frac{1}{\frac{F}{mS} + 1} = \frac{1}{f^* + 1}$$

Az első két fokozatra vizsgálva

$$(5.67) \quad Fx_0 + Sy_3 = Fx_2 + Sy_1$$

Az egyensúlyi törvény szerint $x_2 = y_2/m$. A (5.67) egyenletet behelyettesítve és átrendezés után

$$(5.68) \quad Sy_2 = Smx_2 = y_1 \left(\frac{F}{m} + S \right) - Fx_0$$

Mivel $y_3 = 0$, a (5.67) egyenlet szerint

$$(5.69) \quad y_1 = \frac{F(x_0 - x_2)}{S}$$

A két utóbbi egyenlet alapján

$$(5.70) \quad x_2 = \frac{F}{mS} (x_0 - x_2) \left(\frac{F}{mS} + 1 \right) - \frac{F}{mS} x_0$$

Tehát

$$(5.71) \quad \frac{x_2}{x_0} = \frac{\left(\frac{F}{mS} \right)^2}{1 + \left(\frac{F}{mS} \right) + \left(\frac{F}{mS} \right)^2} = \frac{f^{*2}}{1 + f^* + f^{*2}}$$

Illetve:

$$(5.72) \quad \eta_2 = \frac{1 + \left(\frac{F}{mS} \right)}{1 + \left(\frac{F}{mS} \right) + \left(\frac{F}{mS} \right)^2} = \frac{1 + f^*}{1 + f^* + f^{*2}}$$

Bizonyítható, hogy n fokozatra

$$(5.73) \quad \frac{x_n}{x_0} = \frac{\left(\frac{F}{mS}\right)^n}{\sum_{k=0}^n \left(\frac{F}{mS}\right)^k} = \frac{f^{*n}}{\sum_{k=0}^n f^{*k}}$$

és a kinyerési fok:

$$(5.74) \quad \eta_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{F}{mS}\right)^k}{\sum_{k=0}^n \left(\frac{F}{mS}\right)^k} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f^{*k}}{\sum_{k=0}^n f^{*k}}$$

Ellenáramú $n=3$ fokozat hatékonyságát vizsgálva $mS/F=2$, vagyis $F/(mS)=f^*=0,5$ esetben, ugyanazok a feltételek, mint a keresztáramú extrakciónál:

$$\eta_3 = \frac{1 + f^* + f^{*2}}{1 + f^* + f^{*2} + f^{*3}} = \frac{1 + 0,5 + 0,25}{1 + 0,5 + 0,25 + 0,125} = 93\%$$

adódik, a keresztáramnál kapott 75 %-kal szemben. Tehát megállapítható, hogy az oldószer leggazdaságosabb felhasználást az ellenáramú üzemmód biztosítja. A vizsgálatainkat ideális rendszerre végeztük, de ez a megállapítás reális rendszerre is igaz.

19.4. Folyadék extrakció berendezései

A folyadék extrakció készülékei két fő csoportra oszthatók:

1. *Egyfokozatú* készülékek. Ezek egy érintkezési fokozatot valósítanak meg egyetlen vagy több összekapcsolt készülékben, tehát a folyadékok összekeverését, az extrakciót, a nem-elegyedő folyadékfázisok szétülepítését és szétválasztását. Ilyen fokozatokból azután felépíthető egy kaszkád.

2. *Többfokozatú* készülékek. Ezek egyetlen készülékben vagy berendezésben több fokozattal egyenértékű műveletet valósítanak meg. Ipari szempontból ezek a fontosabbak.

19.4.1. Egyfokozatú készülékek

Egyfokozatú készülékben lehetőségnek kell lennie a folyadékok összekeverésére, valamint a keletkező emulzió vagy diszperzió ülepítésére és szétválasztására. Szakaszos művelet esetén a keverés, ülepítés és szétválasztás ugyanabban vagy különböző edényekben végezhető. Folyamatos műveletek esetén különálló edényekre van szükség.

Az extrakció hatásossága érdekében a keverőszerkezetnek intenzív érintkezést kell megvalósítani a folyadékok között. Ehhez rendszerint az szükséges, hogy az egyik folyadékot apró cseppek alakjában diszpergáljuk a másik folyadékban, és hogy az érintkezési idő (tartózkodási idő) elegendő legyen az extrakció megvalósításához. Minél kisebbek a diszpergált cseppecskék és minél nagyobb a számuk, annál nagyobb lesz a fázisok érintkezési határfelülete, annál gyorsabb lesz az anyagátbocsátás a fázisok között, és annál rövidebb érintkezési idő

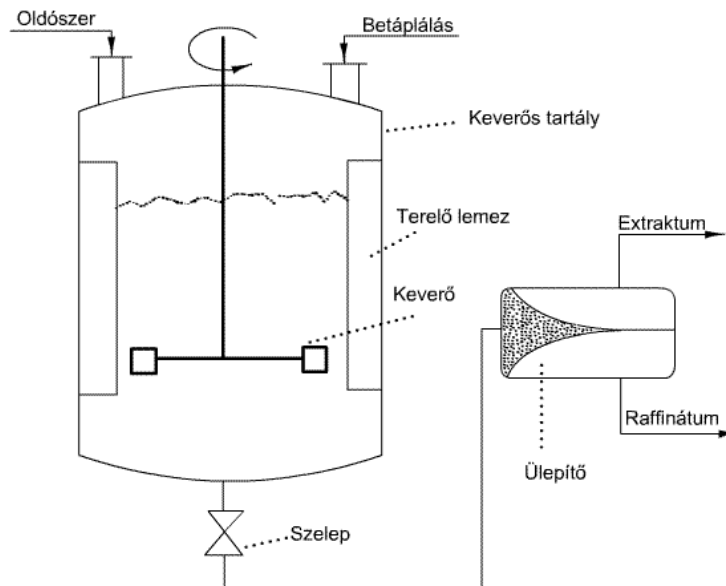
szükséges. Lényeges azonban, hogy a diszperzió ne legyen annyira finom, hogy már megnehezíti a szétválást.

A diszpergáláshoz mechanikai munkát, energiát kell közölni a rendszerrel. Pusztán csak nagy energia befektetése azonban nem elegendő a megfelelő keveredés eléréséhez. A keveredés hatásossága, amit úgy definiálhatunk, mint az egységnyi befektetett energiával elért diszperzió fokot, nagymértékben függ a keverő szerkezeti megoldásától, amit a fokozathatásfokkal kell jellemezni. A keverő teljesítmény szükséglete függ a keverő átmérőjétől a fordulatszámától, a kevert anyag sűrűségétől, viszkozitásától. A keverő berendezéseknek két fő változata van, a keverős tartályok és az áramlásos keverők.

Keverős tartályok folyadéktartályból és mechanikus keverőkből állnak. A tartályokban erős függőleges áramlást kell létrehozni, nehogy a nehezebb folyadék leülepedjék a készülék aljára. Kívánatosabb a sugárirányú, mint a körmozgás, mert a körmozgásnál fellépő centrifugális erő a folyadékokat szétválasztani igyekszik, a nehezebb folyadékot a tartály oldalfalához sodorja. A kialakuló áramlás iránya függ a tartály alakjától, a terelőlapok elhelyezésétől, valamint a keverő szerkezetétől, elhelyezésétől és fordulatszámától. A tartályok rendszerint függőleges elhelyezésűek, inkább kör-, mint négyzetes keresztmetszetűek. Célszerű terelőlapokat beépíteni, a függőleges áramlás elősegítése és a rotációs áramlás, illetve örvénylés megakadályozása céljából. Az ilyen rendeltetésű terelőlapok egyszerű függőleges lemezek, amelyeket a tartály falához erősítenek. Sok hatásos keverőtípus van, például az egyik legelterjedtebb a propellerkeverő. A propeller típusú keverőket úgy kell üzemeltetni, hogy lefelé a tartály feneké felé irányuló áramlást idézzenek elő. A centrifugális keverők elsősorban radiális áramlást okoznak, a terelőlapokon múlik a hatásos függőleges keverés. A járókerék köré építhető terelőgyűrűk hatásosak, de olyan nagy nyíróerőket eredményeznek a két folyadék között, hogy stabil emulziók képződhetnek, ezért ebben az alkalmazásban a terelőgyűrűket általában elkerülik. A járókerék átmérője rendszerint körülbelül egyharmada a tartályénak, tengelye pedig akkor a legjobb, ha egybeesik a tartály tengelyével.

Szakaszos művelet esetén a tartályt le lehet fedni a folyadékok elpárolgásának megakadályozására, de rendszerint levegőréteg van a folyadékok fölött. A folyadékszint magassága körülbelül akkora, vagy valamivel nagyobb, mint a tartály átmérője. A járókerék legalább olyan magasan legyen a tartály feneké fölött elhelyezve, mint a járókerék átmérője, de legalább ugyanennyivel legyen a folyadékszint alatt is. A keverés akkor a leghatásosabb, ha a járókerék a keverés befejezése után a két szétvált folyadékfázis határfelülete alatt van. Megállapították, hogy négy egyenlő távolságú, radiális irányú terelőlap, amelyek hossza megegyezik a folyadék mélységével, szélessége pedig a tartály átmérőjének egy tizedével, úgynevezett „teljesen irányított áramlást” biztosít. Ha kevesebb vagy több terelőlap beépítése nem jár nagyobb előnyökkel. A keverős tartály a folyadékok ülepítésére is használható. A keverés befejezése után, ha a rétegződés végbement, a nagyobb sűrűségű folyadék a tartály aljáról elvezethető.

Folyamatos műveletek az összekeverendő két folyadékot folyamatosan vezetjük be a készülékbe, és folyamatos keverés közben az emulziót vagy diszperziót a tartályból folyamatosan vezetjük el. Egy keverő ülepítő berendezést a **202. ábra** mutatunk be.



202. ábra: Keverő ülepítő elvi rajza

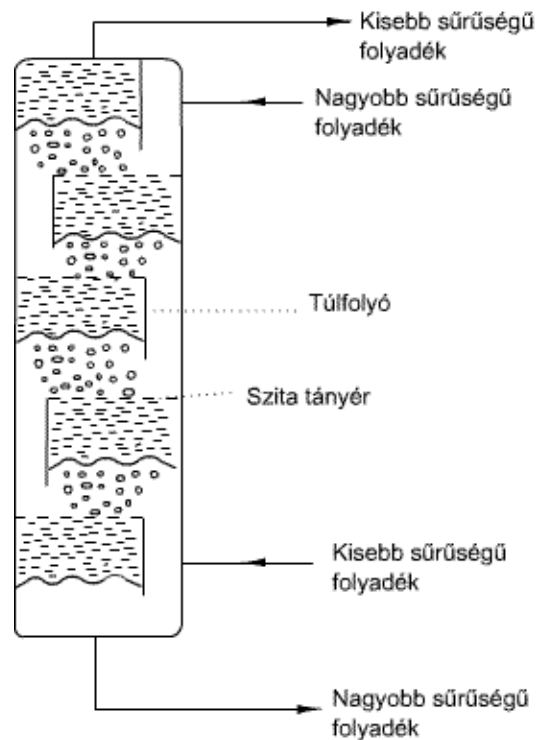
A legtöbb jól szerkesztett keverős tartályban a keverés nagyon hatásos, és a tartály tartalma egyetlen elkeveredik. Mindkét fázis átlagos koncentrációja gyakorlatilag ugyanakkora, mint a kilépő folyadékokban, tehát az anyagátbocsátás hajtóerejét kifejező koncentráció különbség viszonylag kicsi.

19.4.2. Többfokozatú ellenáramú készülékek

Az egyfokozatú készülék említett hátrányát kiküszöbölhetjük, ha több tartályt sorba kapcsolunk, vagy egyetlen tartályt vízszintes lapokkal több szakaszra osztunk.

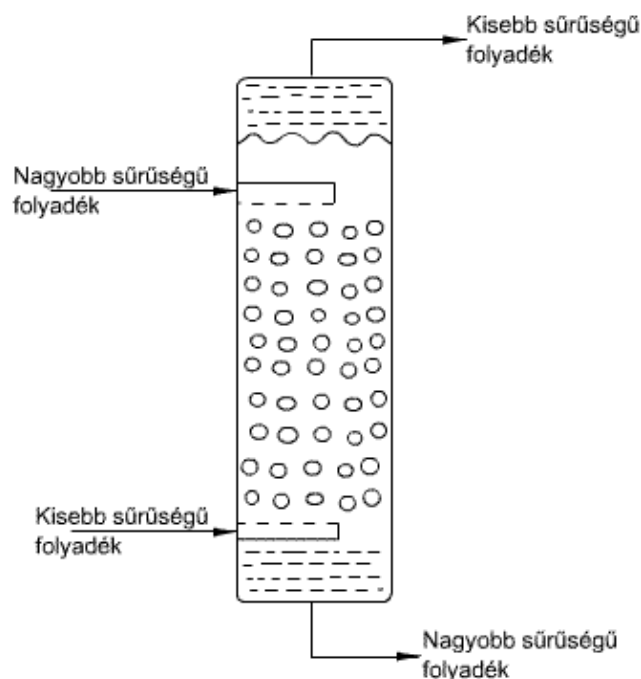
Ez az egyetlen tartály a legtöbb esetben egy kolonna. A vízszintes válaszlapok közepén nyílás van, hogy a folyadék áthaladhasson egyik szakaszból a másikba, így megakadályozható a folyadék keveredése a tartály teljes magasságában, és csak az utolsó szakasz folyadék koncentrációi lesznek azonosak a távozó folyadék koncentrációkkal. A vízszintes válaszlapok helyett lehetnek tányérok. A lapok lehetnek perforáltak, és az egyes terelő lapok közötti keveredést forgótárcsákkal lehet javítani.

A **203. ábra** egy egyszerű megoldású szitatányéros extrakciós berendezés elvi rajzát mutatjuk be. A lyuggatott tányéros vagy szitatányéros oszlopok nagyon használhatóknak bizonyultak kapacitásuk és a bennük végzett extrakció hatásfoka szempontjából is. A tányérok és a túlfolyók elhelyezése ugyanolyan, mint a gáz-folyadék rendszerekhez alkalmazott oszlopban, csak bukógátakra nincs szükség. Az ábrán látható oszlopban a könnyű folyadék a diszpergált fázis, amely áthalad a tányér nyílásain, a buborékok fölszállnak a folytonos nehéz fázisban, és minden tányér alatt egy rétegben gyűlnek össze. A nehéz folyadék a tányérokon keresztirányban áramlik, merőlegesen a felszálló buborékok irányára és a túlfolyón lejut az alsó tányérra. Ha az ábrán látható tornyot megfordítjuk, a lefolyókból felfolyók lesznek, amelyekben a könnyű folyadék áramlik egyik tányérról a másikra, míg a nehéz folyadék a lyuggatott tányéron hatol át, amely cseppekre osztja el.



203. ábra: Szitatányéros extraktor, könnyű folyadék a diszpergált fázis

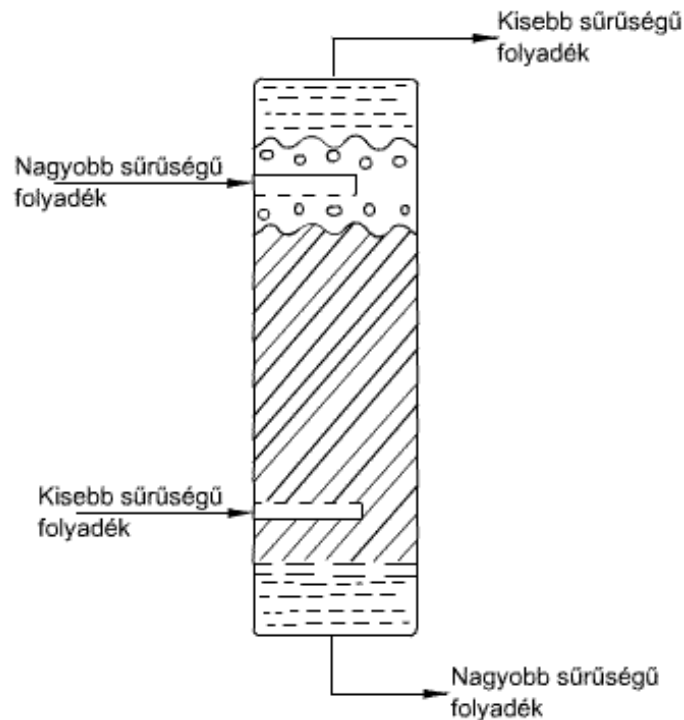
A **204. ábra** egy permetezős extraktor van feltüntetve. Ez a legegyszerűbb folytonos készülék, egy üres függőleges köpenyből áll, amely el van látva a folyadékok be- és kivezetésére szolgáló szerkezetekkel.



204. ábra: Permetezős extraktor

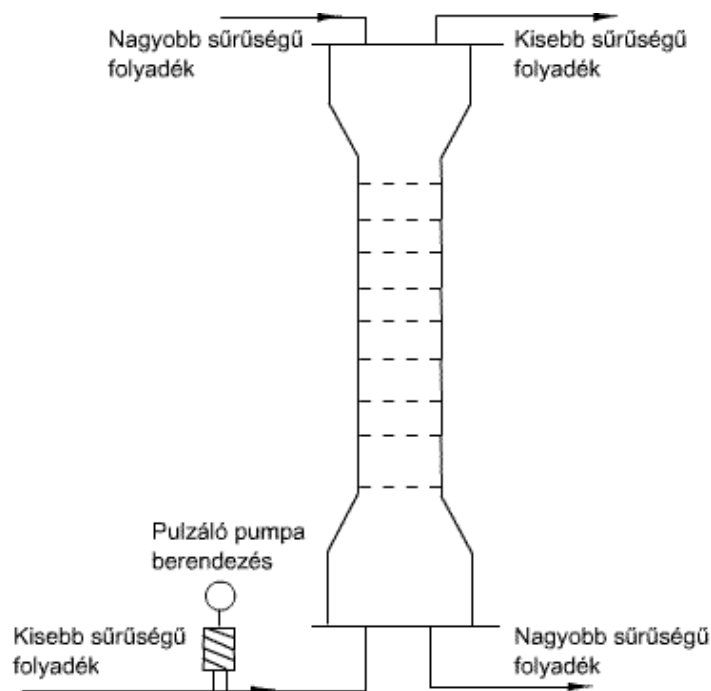
A készülékben a könnyű folyadék a diszpergált fázis. A nehéz folyadék a torony tetején lép be, teljesen megtölti a toronyt (folytonos fázis), és a torony alján lép ki. A könnyű folyadék alul lép be egy elosztószerkezeten keresztül, amely apró cseppekre bontja. A cseppek a lefelé áramló nehéz folyadékban fölfelé emelkednek és a torony tetején összefüggő fázissá egyesülnek. A könnyű folyadékot a torony tetején, a nehéz folyadékot a torony alján vezetik el.

A **205. ábra** egy töltetes torony látható. A gáz-folyadék rendszerekhez használt, ömlesztett töltelékkel töltött oszlopokat a folyadék extrakcióra is elterjedten alkalmazzák. A töltelék több célt szolgál, növeli a folytonos fázis turbulenciájának mértékét, a diszpergált cseppek mozgásának akadályozása közben ismételt eltorzítja a cseppek alakját és ezzel állandóan megújul a folytonos fázissal érintkező felület. A töltet megakadályozza a folytonos fázis függőleges recirkulációját, ami a permetező oszlopok kis extrakciós hatásfokának fő okozója.



205. ábra: Töltetes extrakciós oszlop

A **206. ábra** bemutatott egy pulzáló extrakciós oszlop nagyon hatásos ellenáramú extraktor, legalábbis kis méretekben. A lyuggatott tányérok, amelyeken nincsen túlfolyó, olyan kis fűrt lyukak vannak (1 mm átmérőjűek), hogy rendes körülmények között a folyadékok ezeken nem áramolhatnak át. A mechanikus hajtású hajlékony membránnal azonban az egyik folyadékra gyors lüktetést viszünk át, ez hajtja át a lyukakon felváltva a könnyű és nehéz folyadékot. Így az egyik pillanatban az egyik, másik pillanatban a másik folyadék a diszpergált fázis. A lüktetés amplitúdója 1-3 cm körül van, frekvenciája 15-75 percnként. Töltelék oszlopoknál is lehet alkalmazni a lüktetést azért, hogy a keveredés és a diszpergált cseppek kisebb mérete révén nagyobb extrakciófokot érjünk el. Ilyenkor percnként 1000 lüktetési frekvenciával is dolgoztak.



206. ábra: Pulzáló extrakciós berendezés

Emulziók. A keverő berendezésből kilépő folyadékelegy emulzió, tehát az egyik folyadék apró cseppekben oszlik el a másik, összefüggő folyadékfázisban. Az emulzió stabilitása vagy állandósága döntő fontosságú az extrakciós műveletek szempontjából, mivel minden extrakciós fokozat után szét kell választani a fázisokat. Ezért kerülni kell a stabil emulziókat, amelyek cseppjei lassan ülepednek és lassan egyesülnek. Az emulzió „megtöréséhez”, vagyis a fázisok teljes különválasztásához a diszpergált fázis cseppjeinek kiülepedése és egyesülése szükséges. Nyugvó emulzióban az ülepedés sebessége a cseppek átmérőjével és a folyadékok közötti sűrűség különbséggel nő, az összefüggő fázis viszkozitásával pedig csökken.

A kiülepedett cseppek annál gyorsabban egyesülnek, minél nagyobb a felületi feszültségük. Az egymásban jól oldódó folyadékok felületi feszültsége rendszerint kicsi, és csökkenti a felületi feszültséget emulgátor vagy nedvesítő anyagok jelenléte is. Ehhez hozzájárul, hogy hátráltatja a cseppek egyesülését, ha az összefüggő fázisnak nagy a viszkozitása, mert lassítja a cseppek közül a maradék film eltávozását. Porszemcsék, amelyek rendszerint a folyadékfázisok közös határfelületén halmozódnak fel, szintén akadályozzák a cseppek egyesülését.

A nem stabil emulziók a keverés megszűntetése után gyorsan kiülepednek és két különálló folyadékfázissá tömörülnek, ha csak nem nagy a viszkozitás. Az éles határfelület a fázisok között rendszerint nagyon hamar megjelenik (első törés), de az egyik fázis, többnyire az, amelyik nagyobb mennyiségben van jelen, még kissé zavaros marad a másik fázis diszpergált cseppjeitől. A cseppek végül kiülepednek, és a zavaros fázis kitisztul (második törés), de ez hosszú időt vehet igénybe. Labilis emulzió első törése rendszerint olyan gyorsan következik be, hogy már a keverés rövid időre, néhány percre való megszakítása is elegendő ahhoz, hogy megtörténjék. Folyamatos többfokozatú műveleteknél rendszerint szükségtelen a fokozatok között megvárni a második törést.

20. Szilárd-folyadék rendszerek közötti anyagtranszport, szilárd-folyadék extrakció

Ebbe a csoportba szilárd-folyadék extrakciót tárgyaljuk. A művelet célja a szilárd elegy egy vagy több alkotórészének (komponensének) kioldása szelektív oldószerrel. A kivitelezéséhez használt technológiai eljárástól függően, számos névvel jelölték. A *kilúgozás* eredetileg szilárd részecskehalmaz nyugvó rétegének folyadékkal végzett kioldására vonatkozott, de használják erre a műveletre a diffúziós extrakció elnevezést, a kimosási illetve egyszerűen csak mosási művelet kifejezést is. A metallurgiai iparok is széles körben alkalmazzák a kioldási műveleteket. A legtöbb hasznos ásvány nagy mennyiségű nemkívánatos alkotórészrel kevert állapotban fordul elő, és az értékes anyag elválasztását gyakran kilúgozással végzik. Például réz-ásványok egyes érceiből a rezet kénsavas vagy ammóniás oldatokkal szelektíven kioldják. Aranyat gyakran, sajnos néha még napjainkban is, nátriumcianid oldattal választhatjuk ki érceiből. Hasonlóképpen fontos művelet a kilúgozás a metallurgiai alumínium, kobalt, mangán, nikkel és cink kinyerésben. Az alumíniumgyártás alapanyaga a timföld, amit a nagy vastartalmú bauxit ércből állítanak elő nátrium-hidroxidos kioldással. Számos természetben előforduló szerves anyagot eredeti közegükből kioldással távolítunk el, például a cukrot a cukorrépből forró vízzel lúgozzuk ki, a növényi olajokat magvakból, például szójából vagy gyapotmagból szerves oldószerekkel nyerjük ki. A különböző fakérgéből a tannin vízzel kioldható, és hasonló módon állítható elő számos gyógyszeripari termék növényi szárakból és levelekből (drogokból). A morfint és társ alkaloidokat például a szárított mákgubóból enyhén savas vízzel oldják ki. A japán-akác bimbóból etilalkoholos extrakcióval vonják ki a rutin nevű gyógyszer alapanyagot. A teát és kávékat mind iparilag, mind a háztartásban, kilúgozó műveletekkel készítjük. Mindezekben túlmenően, minden kristályosítási műveletnél, vagy más módon képződött, leválasztott csapadékokra tapadó anyalúgot kilúgozási műveletekhez hasonló módszerekkel és berendezésekkel mossuk ki, mint például a kalcinált szóda és mész reakciójában keletkező kalciumkarbonát csapadékról a nátriumhidroxid-oldatot.

20.1. A szilárd anyag előkészítése a kilúgozáshoz

A szilárd-folyadék extrakció megkezdése előtt a szilárd anyagot elő kell készíteni. A kilúgozás eredménye és az alkalmazandó eljárás igen gyakran a szilárd anyag előkezelésétől függ. Egyes esetekben az oldható anyag kis részecskéi az oldhatatlan anyagba teljesen be vannak ágyazva. Ilyenkor az oldószernek a közegbe be kell diffundálnia, a keletkezett oldatnak pedig ki kell diffundálnia ahhoz, hogy az elválasztás sikeres legyen. Számos metallurgiai nyersanyagnál ilyenek a körülmények. Az aprítás és őrlés a kilúgozást rendkívül meggyorsítja, mivel megkönnyíti az oldószer eljutását az oldódó részecskékhez. Rézérc bizonyos típusa például 4-8 óra alatt kénsavoldattal hatásosan kilúgozható, ha olyan méretűre őrljük, hogy a 60 mesh szitán áthulljon. A 60 mesh szitaméret azt jelenti, hogy 1 négyzet inch ($6,4516 \text{ cm}^2$) szitafelületen 60 nyílás található. Ha körülbelül 0,7 cm nagyságúak a szemcsékre, 5 napot vesz a kilúgozás igénybe, és 4-6 évet, ha 15 cm nagyságú darabokra aprítjuk. Mivel az őrlés költséges művelet, a kilúgozáshoz választandó részecskeméretet az érc minősége erősen befolyásolja. Bizonyos aranyércekben viszont a kis fémrészecskék a beágyazó közetben szét vannak szórva, s ez a közet az oldószer számára annyira áthatolhatatlan, hogy legalább 100 mesh szitán áthulló részecske méretűre kell őrleni ahhoz, hogy kilúgozás egyáltalán létrejöhessen. Az állati és növényi testek sejt szerkezetűek, és a belőlük kilúgozandó anyagok általában a sejtekben helyezkednek el. Ha a megfelelő oldószeres kezelés a sejtfalakat érintetlenül hagyja, akkor az oldott anyag a kilúgozáskor a sejtfalakon ozmózissal hatol át. Ez lassú folyamat. Viszont az anyag olyan kisméretűre őrlése, hogy az egyes sejtek tartalma kiszabaduljon, nem

gazdaságos, és gyakran nem is kívánatos. Például a cukorrépát kilúgozás előtt vékony, ék alakú szeletekre vágják, ilyen módon az oldószer, ebben az esetben a víz, egyes növényi sejtekhez jutásának idejét csökkentik. A sejteket szándékosan sértetlenül hagyják, úgyhogy a cukor a féligáteresztő sejtfalon áthatol, míg a nemkívánatos kolloid és más nemkívánatos anyagok nagy része visszamarad. Növényi gyökerekből, szárból, levelekből számos gyógyszeripari termék nyerhető ki. Ezeket a növényi anyagokat kezelés előtt gyakran megszáritják, mert így a sejtfalak jobban elroncsolódnak, és az oldószer közvetlenebbül hathat az oldandó anyagra. A növényi magvakat és olyan termékeket, mint például a szóját, általában az extrakció előtt megdarálják, és így körülbelül 1 mm részecskeméretre alakítják. A sejtek természetesen kisebbek ennél, de az *örlési* eljárás következtében meglehetősen elroncsolódnak, és az oldószer az olajokat könnyebben eléri. Ha az oldott anyag szilárd részecskék felületén adszorbeálódott, vagy csak a részecskékhez tapadó oldatban van feloldva, örlésre vagy aprításra nincs szükség, és a részecskék közvetlenül moshatók.

20.2. Kilúgozási műveletek

A kilúgozási műveletek szakaszosan, félfolyamatosan instacionárius körülmények között, valamint teljesen folyamatosan stacionárius körülmények között végezhetők. Valamennyi kategóriában mind fokozatszerű, mind folytonos érintkezést biztosító berendezéseket is alkalmaznak. Főleg két műveleti fajta terjedt el, a folyadék permetezése vagy porlasztása a szilárd anyagra, és a szilárd anyag teljes bemelegítése a folyadékba. A berendezés megválasztását a szilárd anyag fizikai alakja, a kezelési nehézségek és a költségek erősen befolyásolják. Emiatt egyes iparágakban sok esetben specializált típusú berendezések váltak szükségessé. A kilúgozást általában a lehető legmagasabb hőmérsékleten célszerű végezni, mert megnövekszik a kivonandó anyag oldékonysága az oldószerben, és ennek következtében a kilúgozó folyadék végső koncentrációja is nagyobb lesz. Magasabb hőmérsékleten az oldat viszkozitása is kisebb, a diffúziós együtthatók nagyobbak, és mindezek a paraméterek a kilúgozás sebességét növelik. Vannak olyan természetes anyagok, például a cukorrépa, amelyekből túl magas hőmérséklet hatására nemkívánatos anyagok is kioldódnak, vagy van olyan eset is, amikor a szilárd anyag kémiai bomlik.

20.2.1. Szakaszos műveletek

Instacionárius vagy időben nem állandósult műveletek azok, amelyekben a szilárd extrahálendő anyag és folyadékok csak szakaszosan érintkeznek egymással. Ebbe a csoportba tartoznak még azok is, amelyekben a szilárd anyag egy adagja megszakítás nélkül az áramló folyadékárammal érintkezik. Ezek az úgynevezett félfolyamatos eljárások.

20.2.1.1. Perkolációs módszerek

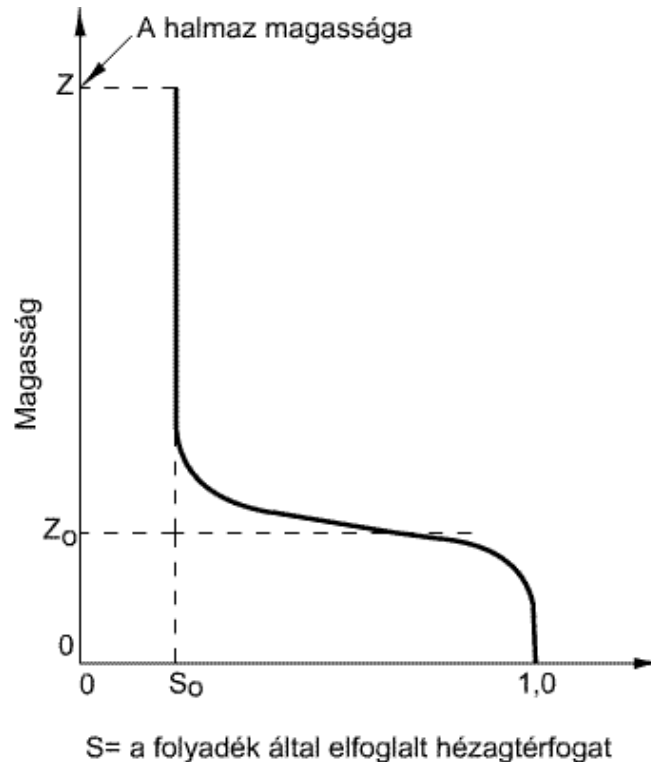
Durva, szilárd részecskéket általában nyugvó halmazban perkolációs eljárásokkal kezelnek, míg a finom eloszlású, könnyebben szuszpenzióban tartható anyagokat megfelelő keverő segítségével diszpergálják a folyadékban. Kilúgozás történhet a nyersanyag kitermelésének helyén is. Ezzel az eljárással a bányában, helyben, perkolációs módszerrel kezelik az ásványokat oly módon, hogy az oldatot az érc tömeg felett és az érc tömegen át keringtetik. A 0,5% réznél kevesebbe fém tartalmozó rossz minőségű rézércet kilúgozására ezt a módszert alkalmazták. Az érc értéke ugyanis túl kicsi ahhoz, hogy a kibányászás költségei megtérüljenek. Földalatti só telepeknél is rendszeresen használják ezt a módszert, a sót a telepbe szivattyúzott vízzel oldják ki. A kilúgozás halomban is történhet. Ez a módszer terjedt el a környezetvédelemben például a talaj rehabilitációnál. Rossz minőségű ércet, amelyeknek

ásványértéke az aprítás vagy őrlés költségeit nem bírja el, úgy lúgozhatók ki, hogy a bányából kikerülő göröngyöket át nem eresztő talajon halmokba rakják, majd a kilúgozó oldatot az érc fölé szivattyúzzák. Az oldat átszivárog a halmon, és a lecsurgó folyadékot összegyűjtik. Ezzel a módszerrel pirites ércekből rezet lúgoztak ki.

A kilúgozás végezhető perkolációs edényekben. Közepes részecskenagyságú szilárd anyag halmazt kényelmesen lehet kilúgozni nyitott edényekben perkolációs módszerekkel. Az edények konstrukciója tág határok között változhat, függ a kezelendő szilárd anyag és folyadék tulajdonságaitól, valamint a művelet méretétől. Ez az eljárás viszonylag olcsó. Kis tartályok gyakran készülnek fából, ha a kilúgozó folyadék nem támadja meg a fát. A kilúgozandó szilárd részecskéket egy kettős fenék felett helyezik el, amelyet legegyszerűbben egymáshoz elég közel elhelyezett párhuzamos falécek rácsozatából képeznek ki. Ez a rácsozás viszont hasonló, egymástól körülbelül 15 cm távolságra levő derékszögben elrendezett lécek felett helyezkedik el úgy, hogy a kilúgozó folyadék az edény aljáról elvezető lefolyócsőbe folyhat. Ha igen finom részecskéket kell feldolgozni, a farácsozatot még gyékény fonattal és szorosan kifeszített szűrővászonnal borítják, amelyeket a kettős fenék kerületén futó horonyban levő kötéllel rögzítenek. Kis edények fémből is készíthetők, perforált kettős fenékekkel, amely fölé szűrővásznot feszítenek. Ilyen rendszerű berendezést használnak gyógyszeripari termékek kinyerésére. Igen nagy perkolációs edények (50x40x6 m mély) vasbetonból, bitumen- vagy ólombéléssel készülnek. Ezeket például rézércet kilúgozására használják. Kis edényeken a fenék közelében oldalajtókat helyeznek el, amelyeken keresztül a kilúgozott szilárd anyag eltávolítható, míg igen nagy edényeket általában fenékről való kotrással ürítenek ki. Az edényeket a gyakorlati szempontoknak megfelelő legegységesebb részecskenagyságú szilárd anyaggal töltik, mivel ilyen körülmények között biztosítható százalékosan a legnagyobb hézag és a kilúgozó folyadék áramlásához szükséges legkisebb nyomásesés. Ennek következtében az egyes szilárd részecskék kilúgozásának mértéke is egységes lesz, és kevesebb nehézség adódik abból, hogy a folyadék kiszámú csatornán halad keresztül a szilárd halmazon. Az ilyen edények működése számos más művelettel jár együtt. Miután az edényt a szilárd szemcsés anyaggal megtöltik, teljes elfedéséhez elegendő mennyiségű oldószert szivattyúznak az edénybe, és a teljes tömeget előírt időtartamig ázni vagy nedvesedni hagyják. Ez idő alatt, ha szükséges, a folyadékmennyiséget szivattyúzással keringtetni lehet a szilárd anyag felett. Ezután a folyadékot a szilárd testről leeresztik az edény kettős fenekén keresztül. Ilyen körülmények között az egész művelet egyetlen fokozatnak felel meg. A művelet ismételtetése végül az oldható anyag csaknem teljes mennyiségének kioldását eredményezi, és csak annyi marad vissza, amennyi a leszívás után a szilárd anyagban, mint nedvesítő oldatrétegben van jelen. Ez úgy mosható ki, hogy az edényt friss oldószernel megtöltik, és ezt a műveletet annyiszor ismétlik meg, ahányszor szükségesnek mutatkozik. A módszer egyik változata, amikor az edénybe folyamatosan bocsátanak folyadékot, és a keletkező oldatot folyamatosan távolítják el, miközben a teljes átáramló mennyiség egy részét esetleg recirkuláltatják. Az ilyen művelet több fokozattal egyenértékű. Mivel a keletkező oldat általában az oldószernél sűrűbb, a keveredést a felfelé irányuló perkolálással csökkentik. Egyes esetekben felfelé irányuló áramlást alkalmaznak, ezzel megakadályozva, hogy a részecskehalmaz vagy a szűrő finom részecskékkal eltömődjön, viszont ennek eredményeképpen a finom részecskéket a felfelé áramló folyadék túlságosan magával ragadhatja. Kevésbé gyakran használt műveleti változatban a folyadékot folyamatosan az edény tetejére permetezik, és lecsörgedeztetik a halmazon át anélkül, hogy az utóbbit a folyadék bármikor teljesen ellepne.

A visszamaradó folyadék leszívása a szemcsés halmazról. Képzeljünk el szemcsés szilárd részecskékből álló halmazt, amelynek hézagait a folyadék teljesen kitölti. Ha a folyadék a nehézségi erő hatására csurog le a halmazról oly módon, hogy a levegőt a hézagokba a halmaz tetejéről engedjük utána, a folyadék sebessége először igen nagy. Ez a sebesség fokozatosan

csökken, majd egy bizonyos, (viszonylag hosszú) idő eltelte után további lecsurgás nem tapasztalható. A halmaz azonban még tartalmaz folyadékot. A hézagokat folyadékkal kitöltött tört részét *maradék töltőlének* nevezzük, és S -se jelöljük. A **207. ábra** S változását a halmazmagasság függvényében tüntetjük fel. A halmaz felső részében S értéke állandó S_0 , és azt a folyadékmennyiséget jelenti, amely a részecskék közötti hézagokban és kis szögletekben rétegenként a felületi feszültség következtében tapadva marad.



207. ábra: Szemcsés halmaz leszívása

A halmaz alján a folyadék a hézagokban marad, és azokat kapilláris hatás folytán teljesen kitölti, $S = 1,0$. A Z_0 lecsúszási magasságot azzal a magassággal definiáljuk, amely az S_0 -tól az egységig terjedő S átlagértékének megfelel. Ez látható a 6.1. ábrán. S átlagértéke az egész halmazra vonatkoztatva az ordinátatengely és a görbe közötti terület osztva a Z halmaz magassággal:

$$(6.1) \quad S_{\text{atl}} = \frac{(Z - Z_0)S_0}{Z} + \frac{Z_0}{Z}$$

A Z_0 -t változó körülmények közötti nagyszámú kísérletekből meghatározták, és azt tapasztalták, hogy megközelítően

$$(6.2) \quad Z_0 = \frac{0,275}{\left(\frac{K}{g}\right)^{0,5} \frac{\rho_F}{\sigma}}$$

empirikus egyenlettel adható meg. Ahol K a szemcsés halmaz átteresztő képessége (permeabilitása), ρ_F a folyadék sűrűsége, σ a folyadék felületi feszültsége. A (6.3) egyenlettel definiáltak egy kapilláris számot:

$$(6.3) \quad N_k = \frac{K\rho_F}{g\sigma}.$$

Azt találták, hogy S_0 a következőképpen függ a kapilláris számnak nevezett mennyiségtől:

$$(6.4) \quad S_0 = \begin{cases} 0,075 & \text{ha } \frac{K\rho_F}{g\sigma} < 0,02 \\ \frac{0,0018}{\frac{K\rho_F}{g\sigma}} & \text{ha } \frac{K\rho_F}{g\sigma} > 0,02 \end{cases}$$

Ezekben a kifejezésekben feltételezzük, hogy a lecsurgás kizárólag a nehézségi erő hatására jött létre, és hogy a folyadék- és szilárd fázis illeszkedési szöge 180° . A K permeabilitás a halmazban áthaladó lamináris áramlás egyenletének arányossági állandója:

$$(6.5) \quad j_m = \frac{\dot{m}}{A} = \frac{K\rho_F\Delta p}{\mu_F Z}$$

ahol Δp a halmazban fellépő nyomáscsökkenés és j_m , az áramlás tömegáram sűrűsége a halmaz teljes keresztmetszetére vonatkoztatva. A szemcsés szilárd anyag halmazán át az áramlást az Ergun egyenlet írja le. Lamináris áramlásra ennek az egyenletnek jobb oldalából csak az első tagot alkalmazzuk (Blake-Kozeny egyenlet):

$$(6.6) \quad \Delta p = \frac{150\mu Z v_0}{D_p^2} \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3}$$

Ha ebből $\Delta p/Z$ -t a (6.5) egyenletbe helyettesítjük, és Re helyére

$$(6.7) \quad Re = \frac{v d_p \rho}{\mu} = \frac{j_m d_p}{\mu}$$

egyenletet írjuk, akkor az egyszerűsítés után a következő egyenlethez jutunk:

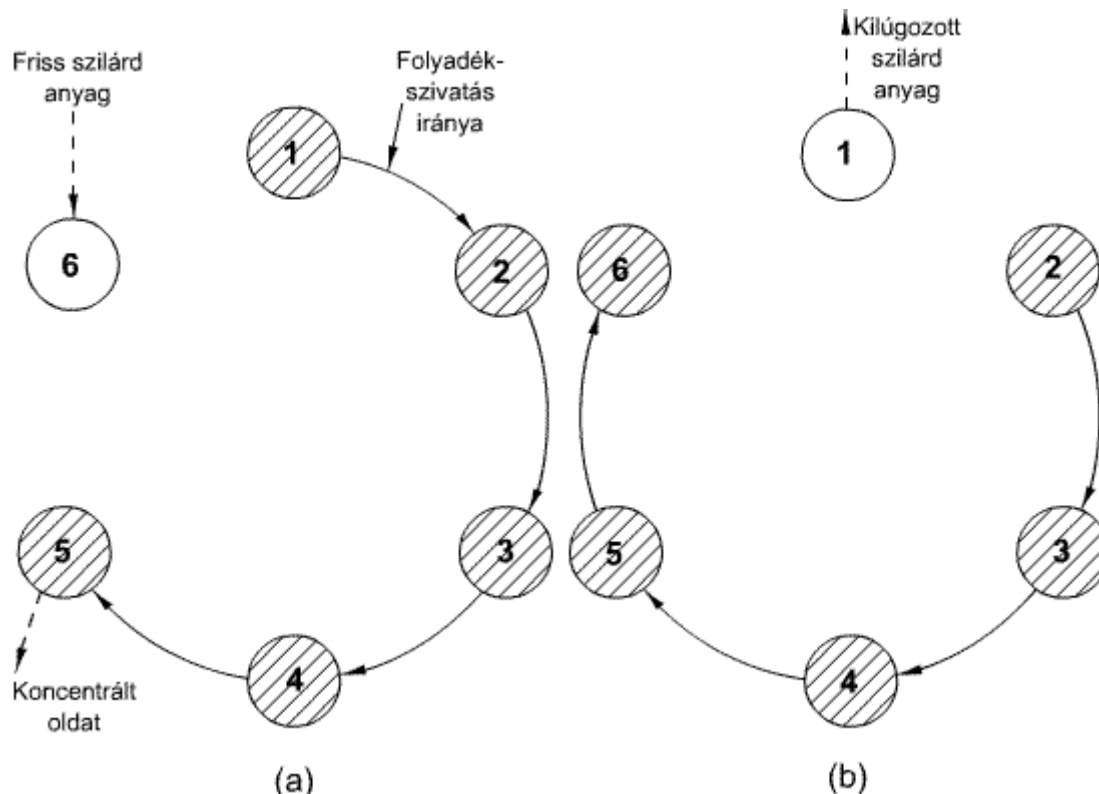
$$(6.8) \quad K = \frac{d_p^2 \varepsilon^3 g}{150(1-\varepsilon)^3}$$

ahol d_p a részecskékével azonos térfogatra vonatkozó fajlagos felületű gömb átmérője és ε a hézagterfogat. Rostos vagy más olyan anyagoknál, ahol a d_p értékét nehéz meghatározni, K értékét a (6.5) egyenletből határozzuk meg a halmazban áthaladó lamináris áramlásnál fellépő nyomáscsökkenés mérése alapján.

20.2.1.2. Ellenáramú többszörös érintkezés.

Ebben a csoportban a legelterjedtebb a *Shanks-rendszer*. A perkolációs edényekben előzőekben leírt egyenáramú kilúgzás és az oldott anyag ezt követő kimosása elkerülhetetlenül híg

oldatokat eredményez. A legtöményebb oldatokat akkor kapjuk, ha olyan ellenáramú módszert alkalmazunk, amelyben az utolsónak leeresztett oldat a legfrissebb szilárd anyaggal érintkezik, a friss oldószert viszont olyan szilárd anyaggal hozzuk érintkezésbe, amelyből az oldható anyag legnagyobb részét már kilúgoztuk vagy kimostuk. Annak elkerülésére, hogy ilyen folyamatban a szilárd anyagot fizikailag edényről edényre kelljen továbbítani, a **208. ábra** vázlatosan szemléltetett hat edényből álló elrendezést használják. Az úgynevezett *Shanks-rendszer* a következőképpen működik.



208. ábra: Ellenáramú többszöri érintkezés, Shanks-rendszer

1. A **208. ábra** feltételezzük, hogy a rendszer már bizonyos ideje működik. A 6 edény üres, az 1-5 edények szilárd anyaggal töltöttek, mégpedig az 5 edény legfrissebben és az 1 edény legrégebben. Az 1-5 edényekben kilúgozó folyadék is van, mégpedig az 5 edényben található a legtöményebb oldat, minthogy ez érintkezik a legfrissebb szilárd anyaggal. Az 1 edénybe éppen most szívattak be friss oldószert.

2. Az 5 edényből kiengedjük a tömény oldatot, a 4 edényből a folyadékot az 5-be, a 3-ból a 4-be, a 2-ből a 3-ba és az 1-ből 2-be visszük át. A 6 edénybe friss szilárd anyagot helyezünk.

3. A **208. ábra** szerint most az 1-es edényből a feldolgozott szilárd anyagot kiürítjük. A folyadékot az 5-ből a 6-ba, a 4-ből az 5-be, a 3-ból a 4-be és a 2-ből a 3-ba visszük át. A 2 edénybe friss oldószert adagolunk. Ugyanolyan körülményeket létesítettünk, mint induláskor a **208. ábra**, azzal a különbséggel, hogy az edényszámok eggyel továbbhaladtak.

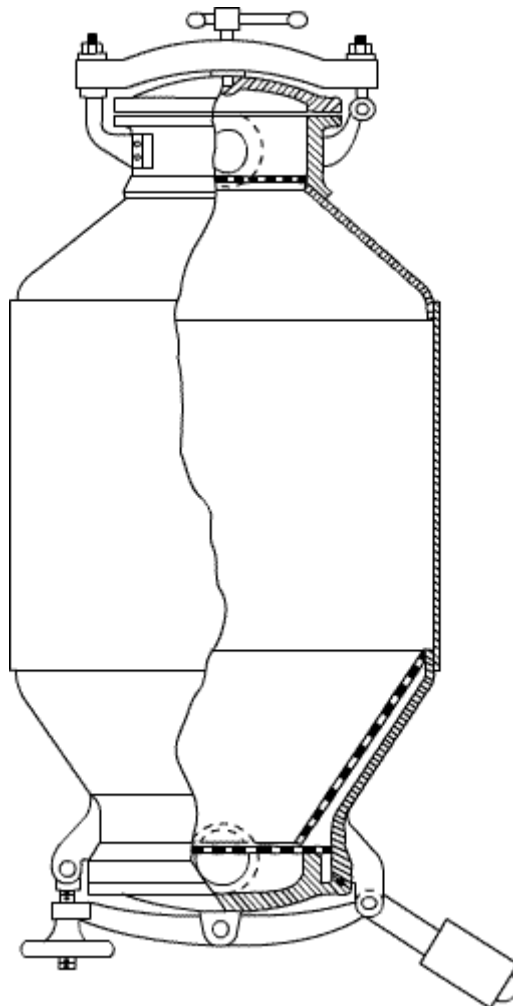
4. A műveletet az előző módon tovább folytatjuk.

Miután több ilyen ciklust lefolytattunk, az oldatkonzentráció és az egyes edényekben a szilárd anyagokban fennálló koncentráció igen nagymértékben megközelíti a valódi folyamatos ellenáramú több fokozatú kilúgozással kapható értékeket. A rendszer természetesen tetszőleges számú edénnyel működhet, általában 6—16 egységet használnak. A kör alakú elrendezés nem feltétlenül szükséges, előnyösebb az edényeket sorba kapcsolni, az így kapott rendszert nevezzük „extrakciós telepnek”, s ez, amennyiben erre vonatkozó igény felmerül, tetszés szerint kiegészíthető további edényekkel. Elhelyezhetjük az edényeket fokozatosan alacsonyabb

szinteken is, úgy, hogy a folyadék egyikből a másikba minimális szivattyúzás segítségével, vagy a nehézségi erő hatására folyhat. A fenti rendszerű kilúgozó edényeket és berendezéseket a növényi extraktumok előállítására a gyógyszeriparban, például a rutin előállítása japánakác bimbóból, illetve a kozmetikai iparban, metallurgiai iparokban, tannin kinyerésére fakérgéből és fából, nátriumnitrát kilúgozására chilei salétromot tartalmazó kőzetekből és számos más eljárásban használják.

20.2.1.3. Perkoláció zárt edényekben.

Ha a folyadékáram nyomásesése gravitációs áramláshoz túl nagy, zárt edényeket kell használnunk, és a folyadékot a szilárd halmazon át kell szivattyúznunk. Az ilyen edényeket „diffuzőrök-nek” is nevezik.



209. ábra: Cukorrépa diffuzőr

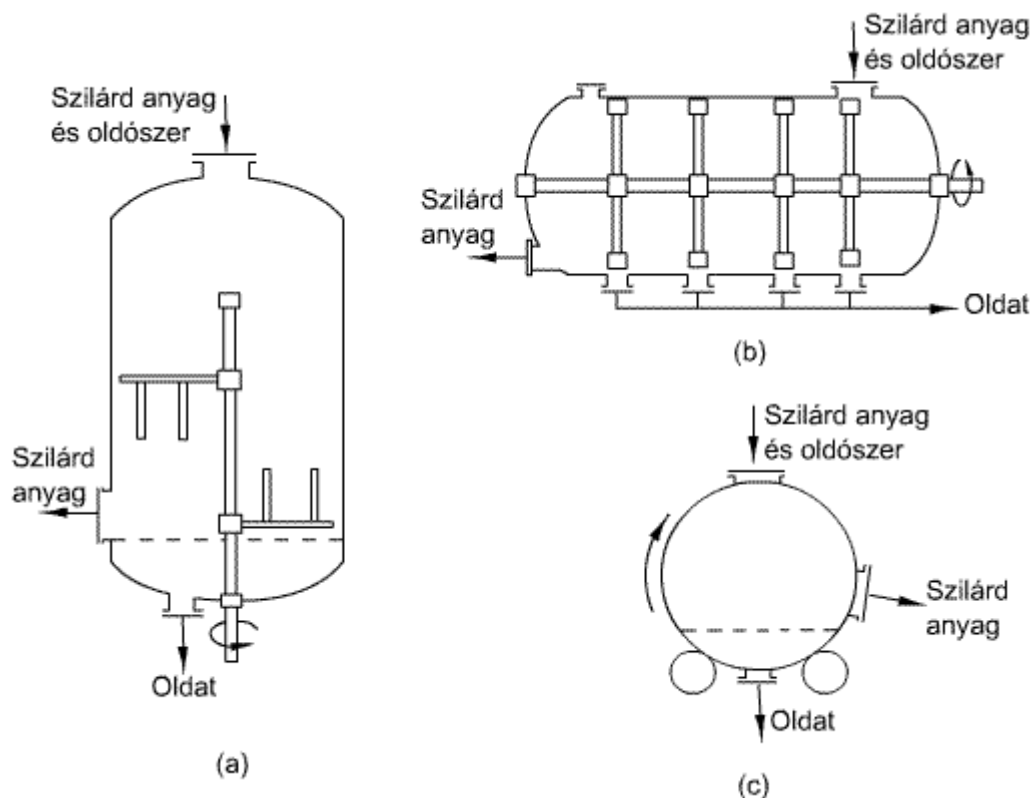
Zárt edények szükségesek párolgási veszteségek elkerülésére olyan esetekben is, amikor vagy az oldószer nagyon illékony, vagy pedig az oldószer forráspontja feletti hőmérsékletek alkalmazása kívánatos. Például egyes tanninfajtákat vízzel 120°C-on, 345 kPa nyomáson zárt perkolációs edényekben oldják ki. Az edények alakja a felhasználástól nagymértékben függ. Cukor kioldása cukorrépaszeletekből a **209. ábra** látható diffuzőr típust használják. Ebből a diffuzőr típusból maximálisan 16 tagú telepet kapcsolnak össze, és a cukorrépa-szeleteket forró

vízzel Shanks-rendszerű ellenáramú megoldással vonják ki. Az egyes diffuzorok közé hőcserélőket helyeznek el, ezzel az oldat hőmérsékletét 55-60°C-on tartják. A módszerrel a répa eredeti 18%-os cukortartalmának 95-98 %-át vonják ki és a kapott oldat 12%-os.

Kilúgozás szűrőpréssel. Az olyan finom eloszlású szilárd anyagokat, amelyek túl finomak ahhoz, hogy viszonylag mély perkolációs edényekben kezeljék, szűrőpréssben szűrik és egyidejűleg a szűrőlepenyén átszivattyúzott oldószerrel lúgozzák ki. Ezt a módszert gyakran használják anyalúg kimosására leszűrt csapadékokból.

20.2.1.4. Keverés és ülepítés.

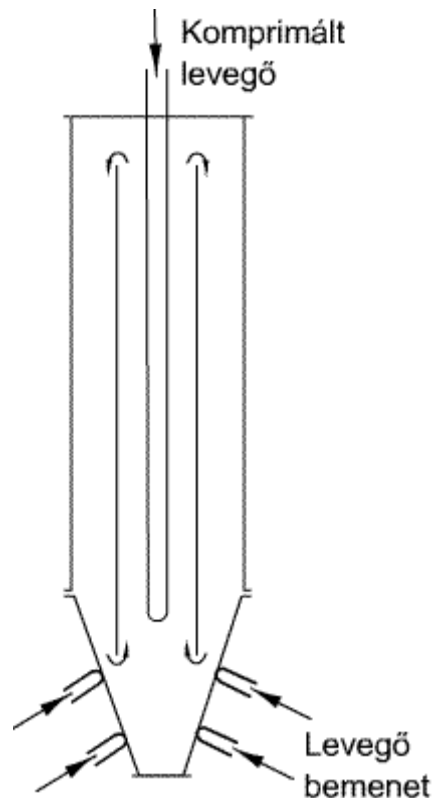
Rögzített halmazban perkolációs vagy szűrőprésses kilúgozásnál az oldószer csatornákat képezhet, ennek következtében a kilúgozás lassúvá és tökéletlenné válik. Ez a probléma elkerülhető, ha a folyadékot és a szilárd anyagot a kilúgozó edényekben keverjük. Számos keveréssel vagy kavarrással működő berendezés ismeretes, amelyek durva eloszlású szilárd anyagok kilúgozására alkalmasak. Egyik típusú, a zárt hengeres edényeket függőlegesen állítják fel, mint azt a **210. ábra** láthatjuk. A keverést motorral hajtott függőleges tengelyű lapátok vagy kavarrók, a kilúgozó oldat leszívását pedig kettős fenekek biztosítják. Másfajta berendezésekben az edényeket vízszintesen helyezik el, és a keverő is vízszintes tengelyű. Ilyen berendezés látható a **210. ábra**. Egyes esetekben az extraháló edény vízszintesen elhelyezett dob, amelyben a szilárd anyag és a folyadék érintkezését a görgőkön mozgó dob forgása segíti elő. Ilyen berendezés látható a **210. ábra**. Ezek a berendezések szakaszosan működnek, és egyetlen kilúgozási fokozatnak felelnek meg, melyeket önmagukban is használhatók, azonban igen gyakran ellenáramban működő telepekké kapcsolják össze.



210. ábra: Keverővel ellátott szakaszosan működő kilúgozó berendezések

Finom eloszlású szilárd anyagokat keveréssel szuszpendálhatunk a kilúgozó oldószerben. Többféle szakaszos működésű keverős berendezés ismeretes. Ezek közül legegyszerűbb a *Pachuca-edény*, amelyet a metallurgiai iparokban elterjedten használnak. Fából, fémből vagy

betonból készülhet olyan fémbéléssel, amelyet a kilúgozó folyadék nem támad meg. A keverést levegő befújással végzik.

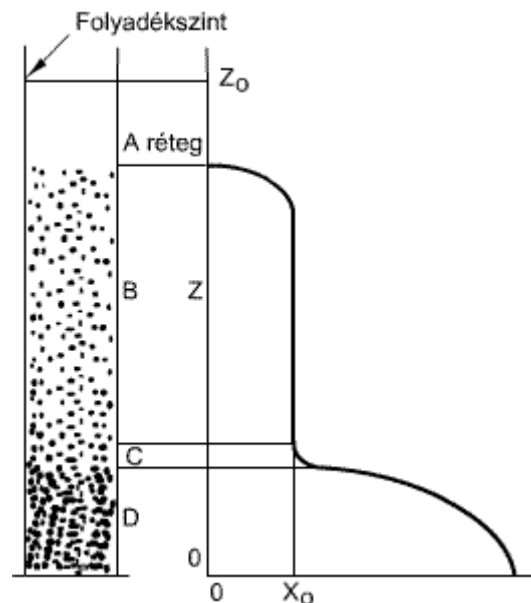


211. ábra: Pachuca edény

A középen elhelyezett csövön keresztül érkező levegőbuborékok hatására a folyadék és a szuszpendált szilárd részecskék a csőben felfelé áramlanak, és ennek következtében az edény tartalma függőleges irányban cirkulál. A finom eloszlású szilárd részecskék szuszpenzióban tartására szabványos turbinakeverők is használhatók. A kilúgozás befejezése után a keverést leállítják, megvárják, míg a szilárd anyag a tartályban leülepszik, és a folyadék tisztáját dekantálják. A dekantálást végezhetik úgy, hogy a tartály tetejéről leszivornyázzák a tiszta oldatot vagy úgy, hogy a tartály oldalán megfelelő magasságban elhelyezett kiömlő csövön keresztül engedik le. Ha a szilárd anyag finom eloszlású és az üledék összenyomható, a leülepedett szilárd anyaghoz tapadó oldatmennyiség jelentős lehet. Ebben az esetben az oldott anyagot el kell távolítani az üledékből. Ezt úgy oldják meg, hogy az üledéket mosófolyadékkal összekeverik, majd ülepitik vagy a szilárd anyagot szűrik, és a szűrőn mossák.

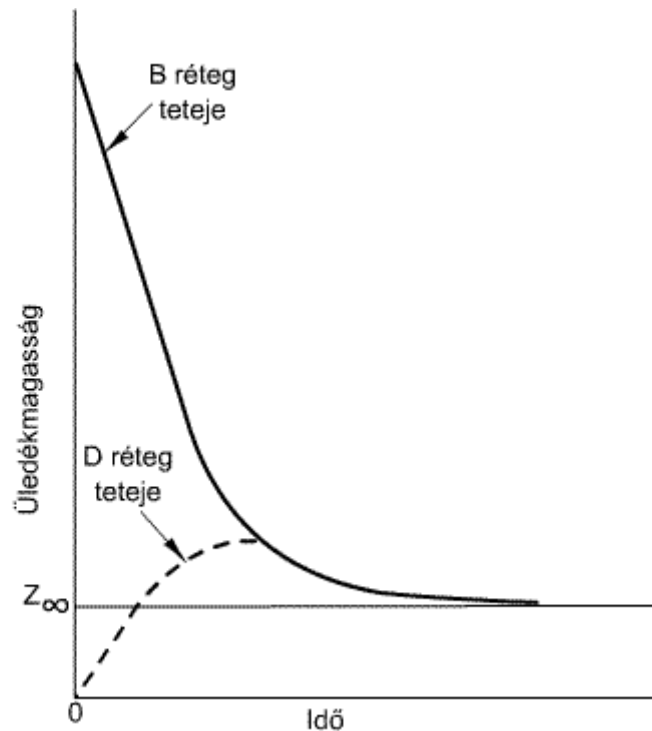
Szakaszos ülepités tehát egy részfolyamata a kilúgozásnak. Finom eloszlású szuszpenzió ülepedési jellemzőit, ha az egyenletes sűrűségű és közelítőleg egyenletes nagyságú részecskékből áll, könnyen meghatározhatjuk, ha egy szuszpenzió mintát üveghengerben zavartalanul állni hagyunk. Ha a szuszpenzió kezdetben nagyon híg, a megfigyelt részecskék egyenként ülepsznek, az ülepedési sebességük a részecskék nagyságától, a folyadék és a szilárd anyag sűrűség különbségétől, valamint a folyadék viszkozitásától függ. A részecskék a henger alján gyűlnek össze. Végül a folyadék tisztává válik, de a tiszta folyadék és az ülepedő szuszpenzió között az egész folyamat során nem észlelhető éles határvonal. A kilúgozó és mosóműveletek során általában keletkező koncentráltabb szuszpenziók azonban másképpen viselkednek. A megfigyelések szerint a részecskék közötti kölcsönhatások következtében az ülepedés lassú, gátolt ülepedés. A kisszámú, viszonylag nagyméretű részecskéktől eltekintve, a részecskék méretei közel azonosak, és a részecskék nagyjában egyszerre ülepednek le. Ennek eredményeképpen a henger felső részében levő tiszta folyadék és az alsó részben elhelyezkedő

üledő szilárd anyagréteg között általában meglehetősen éles határvonal mutatkozik. A **211. ábra** látható hengert eredetileg Z_0 magasságig olyan szuszpenzióval töltöttük meg, amelynek koncentrációja a szilárd anyag tömeg törtjében kifejezve egyenletesen x_0 , és amelyben az üledés már megkezdődött.



212. ábra: Szakaszos ülepítés

A megfigyelés időpontjában felül a tiszta folyadékot tartalmazó A réteg helyezkedik el. Közvetlenül ez alatt található a B réteg, amelyen belül a szilárd anyag koncentrációja nagyjából egyenletesen a kiindulási x_0 értékkel egyenlő, ahogy az a közölt diagramon is látható. A henger alján levő D rétegben, amelyet általában „kompressziós rétegnek” neveznek, a felülről összegyűlt részecskék egymáson nyugszanak, és súlyuk következtében a részecskék közül folyadék szorul ki. Összenyomható üledékeknél ennek következtében a rétegmélységgel a szilárd anyag koncentrációja nő, ahogy ez a görbén is látható. B és D között helyezkedik el a C átmeneti réteg, amely nem minden esetben definiálható élesen. Az üledés az ábrán feltüntetett időponton túl is folytatódik, az A és B közötti határvonal süllyed, a D réteg magassága pedig növekszik, míg végül a B réteg eltűnik, és csak a jelenlevő szilárd anyag teljes mennyiségét tartalmazó kompressziós réteg marad meg. Ez aztán lassan egy végső magasságra áll be. Az üledési sebesség változását általában úgy ábrázoljuk, hogy a koordináta-rendszer tengelyeire az A és B közötti határvonal magasságát, illetve az időt visszük fel. Ilyet mutat a **213. ábra** kihúzott görbéje. A szaggatott görbe a D réteg felső szintjének helyzetét ábrázolja. A B réteg teteje az üledés megindulásától egyenletes sebességgel ülepszik (a Z-t az idő függvényében feltüntetett vonal) egészen addig, míg a B csaknem eltűnt, és az összes szilárd anyag a kompressziós rétegbe került. A kompressziós réteg üledési sebessége a Z_∞ végső magasság eléréséig viszonylag lassú és nem állandó. Néhány esetben két állandó sebességű üledési periódus figyelhető meg, és kompressziós periódus lényegében nem jelentkezik. A görbék alakja nemcsak az üledéktől (a szilárd anyag részecske méretétől és tulajdonságától, valamint a folyadék tulajdonságától), hanem a szuszpenzió kezdeti magasságától és koncentrációjától, a flokulálás mérvétől, továbbá attól is függ, hogy üledés közben keverjük-e a rendszert.



213. ábra: Az ülepedés sebessége

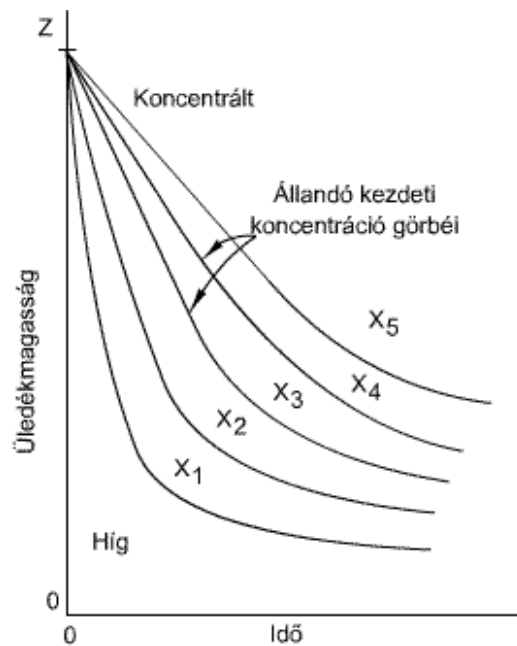
A *Flokulálás* jelenség akkor lép fel, ha valamennyi finom eloszlású szilárd részecskének azonos előjelű elektromos töltése van, a részecskék egymást taszítják, és ennek következtében diszpergálva maradnak. Ha a töltést például elektrolit hozzáadással közömbösítjük (flokulálószer), a részecskék aggregátumokat, pelyhes csapadékot képeznek. Mivel a pelyhek nagyobb méretűek, gyorsabban is ülepednek. A kémiai műveletek során keletkező iszapok és szuszpenziók általában flokulálnak.

Olyan lassú *kavarás*, amelynek következtében a folyadékban örvényáramok nem keletkeznek, az ülepedés jellegét mélyrehatóan megváltoztatja. A pelyhestruktúra megváltozik, úgyhogy a szilárd anyag koncentrációja a *B* rétegben többé már nem egyenletes, a kiindulási érték, és a *D* réteg nem definiálható pontosan. A leülepedett iszap végső magassága a kavarás nélkül kapottnak csak töredéke, ami a kompressziós zóna rácsos vagy üreges pelyhe struktúrája összeomlásának tulajdonítható. A szilárd anyag végső koncentrációja a leülepedett tömegben ennek megfelelően nagyobb. Általában az állandó és csökkenő ülepedési sebességű rétegek még megfigyelhetők, bár a sebességértékek a kavarás nélkül fellépőktől különböznek.

Az ülepedés sebessége csökken, ha a szilárd anyag kezdeti koncentrációja nagyobb. Ez annak tulajdonítható, hogy ilyenkor nagyobb a közeg effektív sűrűsége és viszkozitása. A **214. ábra** a szuszpenzió koncentrációhatását tünteti fel abban az esetben, ha ugyanannak az anyagnak növekvő koncentrációjú szuszpenzióit azonos nagyságú hengerekben ülepítik. Bebizonyosodott, hogy a Z_{∞} végső ülepedési magassága bármilyen szuszpenzió típusnál a kezdeti koncentrációval van összefüggésben:

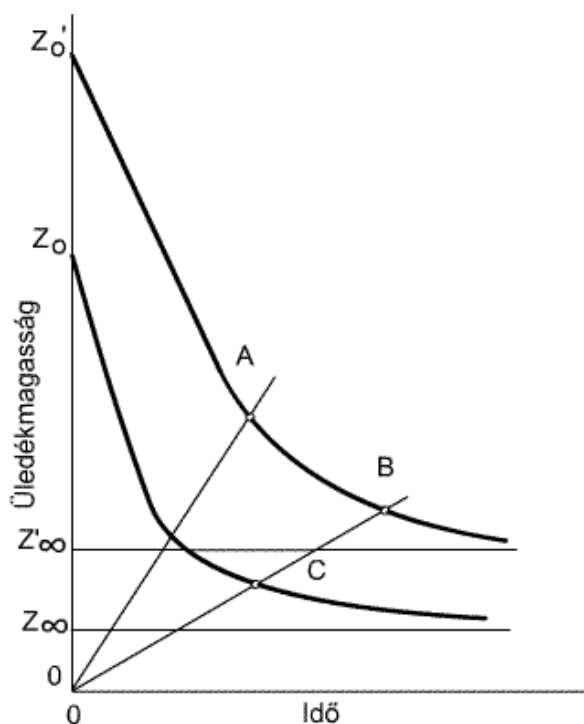
$$(6.9) \quad \frac{Z_{\infty}}{Z_0} = ax^b$$

ahol a és b állandók, amelyeket Z_{∞} -nek és Z_0 -nak x két értékénél végzett méréseiből kell megállapítani. Kavart ülepedésnél, a fenti egyenlet csak az x nem nagy értékeinél érvényes.



214. ábra: A szuszpenzió koncentrációjának befolyása az ülepedési sebességre

A **215. ábra** olyan ülepedési görbék láthatók, amelyeket ugyanazzal a szuszpenzióval különböző kezdeti magasságoknál vettek fel.



215. ábra: Ülepedés különböző kezdeti magasságok mellett

A kezdeti állandó ülepedési sebesség a magasságtól független, és ha csak Z_0 egy kritikus minimális értékét nem lépjük túl, Z_∞/Z_0 végső értéke ugyancsak állandó. Mind a két állandó ülepedési sebességnek megfelelő egyenes szakasz az origóból kiinduló OA egyenesen végződik, és általában bármely, az origóból kiinduló egyenest, mint pl. az OB -t, az ülepedési görbe úgy metszi, hogy $OC/OB = Z_0/Z_\infty$. Ebből következik, hogy az idő, amelyre az iszapnak az eredeti oszlop magasság meghatározott Z/Z_0 törtrészére ülepedéshez szüksége van, a Z_0

kezdeti magassággal arányos. Ilyen módon a laboratóriumi mérő hengerekben végzett mérések alapján előre pontosan meg lehet határozni, a nagyméretű üzemi edényeknél várható értékeket. Az ilyen laboratóriumi mérések elvégzésénél azonban igen fontos, hogy a hengerek legalább 1 méter magasak és legalább 5 cm átmérőjűek legyenek, és a laboratóriumi vizsgálat körülményei az üzemi méretekben végzett műveletével megegyezzenek.

20.2.1.5. *Perkolálás és keverés.*

Ha nagy rögökből álló szilárd anyagot kell kilúgoznunk, az alábbi választási lehetőségünk van, vagy törjük durva darabokra és végezzük a kilúgozást perkolálással, vagy őröljük finomra, és keveréssel, majd ülepítéssel lúgozzuk ki. Erre a kérdésre általános válasz nem adható, a döntést a különböző szilárd anyagok eltérő kilúgozási sajátosságai és az oldott anyagok értékei befolyásolják. A következő szempontokat azonban mindenképpen figyelembe kell venni. A finomra őrlés költségesebb, de gyorsabb és feltehetően alaposabb kioldást tesz lehetővé. Hátránya, hogy a leülepedett szilárd anyaggal asszociált folyadék tömege a szilárd anyag tömegével egyenlő vagy annál nagyobb lehet, úgyhogy jelentős oldószer mennyiségekre van szükség ahhoz, hogy a kilúgozott szilárd anyagról az oldott anyagot lemossuk, és az így keletkezett oldat híg lesz. Durván őrölt részecskék viszont lassabban és feltehetően kevésbé alaposan lúgozhatók ki, leszíváskor azonban viszonylag kevés oldatot tartanak vissza, kevesebb mosást igényelnek, és ennek következtében koncentráltabb végső oldatot kapunk.

20.2.2. **Folyamatos műveletek**

A folyamatos állandósult állapotú műveletek berendezéseit durván két nagy csoportba oszthatjuk, attól függően, hogy fokozatos vagy folytonos érintkezéssel működnek. A fokozatszerű berendezések összekapcsolásával többfokozatú berendezéseket képezik ki, és így több fokozattal egyenértékű hatást érnek el. A folytonos érintkezésszerű berendezések egyetlen berendezésben számos fokozattal egyenértékű működést biztosítanak.

20.2.2.1. *Kilúgozás őrlés közben*

Mint már az előzőekben kifejtettük, a szilárd anyagot számos esetben meg kell őrölni ahhoz, hogy a kilúgozó oldószer az oldódó részekhez hozzáférjen. Folyamatos nedves őrléskor a kilúgozás egy részét az őrléssel egyidejűleg végezhetjük. Az oldható arány 50-75%-a kioldható, például ha az ércet cianid oldat jelenlétében őrlik. A ricinus magvakat görgős zúzómalomokban a ricinolosajat oldó oldószer jelenlétében őrlik. A folyadék és a szilárd anyag párhuzamosan áramlik a malmon át, és ennek következtében a koncentráció egyensúly beálltára törekszenek. Ez a művelet egyfokozatú kilúgozás, és rendszerint további keveréssel vagy mosó műveletekkel egészül ki.

20.2.2.2. *Keverős edények.*

Finomra őrölt szilárd anyagokat, amelyek keveréssel folyadékokban könnyen szuszpendálhatók, folyamatosan lehet kilúgozni az ismert keverős tartályokban vagy edényekben. A berendezésnek biztosítania kell, hogy a folyadék és a szilárd anyag az edénybe és az edényből folyamatosan áramolhasson, és a szilárd anyag összegyűlését meg kell akadályoznia. Ezek a berendezések az alapos keverés következtében működésükben egy fokozatnak felelnek meg, mivel a folyadék és a szilárd anyag az edényen belül igyekszik egyensúlyba kerülni. Mechanikusan kevert edényekben általában a turbinakeverők alkalmazása a legelőnyösebb. A metallurgiai iparokban gyakran használják a Pachuca edényeket. A *Dorr*

keverő a levegő befújásos elvet és a szilárd anyag mechanikus kotrását alkalmazza, és finom eloszlású szilárd anyagok folyamatos kilúgozására és mosására mind a kémiai, mind a metallurgiai iparban elterjedten használják.

A keverő tengelye egy cső, ami levegőbefúvóként is szolgál, és egyidejűleg lassan forog. A tengely aljára erősített karok a leülepedett szilárd anyagot lassan az edény fenekének középpontja felé kotorják, ahonnan a tengelyen keresztüli levegő befújás a felső részre erősített forgó folyadékvezetékhez viszi. Ekkor a folyadékvezeték a folyadék és szilárd anyag felhajtott elegyét az edény teljes keresztmetszete mentén eloszlatják. A kotrókarok felhúzhatók, és így meg lehet szabadítani őket az egy menet alatt rájuk rakódó szilárd anyagoktól. Ezen kívül segédlevegő-vezetékkel is el vannak látva, amelyek elősegítik a ráakódott szilárd anyagok eltávolítását. Ha a szilárd anyag nem egyenletes részecskeméretű, a keverő működését úgy állíthatjuk be, hogy a hosszabb kilúgozási időt igénylő durva részecskék hosszabb ideig maradnak a tartályban, mint a finomabbak. A keverős edények általában 2-15 m átmérőjűek. Az anyag tartózkodásának átlagos időtartamát a keverős edényben úgy számíthatjuk ki, hogy a tartályban levő kevert anyag térfogatát osztjuk a beáramlási sebességgel. Ezt végezhetjük külön a szilárd anyagra és külön a folyadékra. Ha az egymáshoz viszonyított mennyiségük a tartályon belül más, mint a betápláláskor, tartózkodási idejük különböző lehet. A szilárd anyag átlagos tartózkodási idejének akkorának kell lennie, hogy a kilúgozás kívánt mértékét biztosítsa. Egyes szilárd részecskék természetesen a számított átlagnál sokkal rövidebb idő alatt is áthaladnak a berendezésen, ami kis fokozathatásfokot eredményez. Ez úgy kerülhető el, hogy a szilárd anyag és folyadék elegyét kisebb keverős tartályok sorozatán bocsátják át. A tartályokban az átlagos tartózkodási idők összege a szükséges kilúgozási idő. Ezt a szuszpenzió gravitációs áramlásával lehet megvalósítani oly módon, hogy az edényeket sorban fokozatosan alacsonyabb szinteken helyezzük el. Meg kell jegyezni, hogy a folyadék és a szilárd anyag párhuzamos áramlásának következtében az egész sorozat még mindig egyetlen fokozatnak felel meg. A folyamatos keverő berendezésekből belépő zagyot szeparálás céljából szűrőre vihetjük, amelyen a fennmaradó szilárd anyagot oldott szilárd anyagoktól mentesre moshatjuk. Szűrő helyett ülepitők sorozatában ellenáramú mosást is végezhetünk.

20.2.2.3. Ülepitők.

Az ülepitők olyan mechanikai berendezések, amelyeknek célja, hogy kisméretű szilárd részecskék híg szuszpenziójában a szilárd anyag és a folyadék arányát ülepitéssel és dekantálással folyamatosan növeljék úgy, hogy végül külön termékként tiszta folyadék és leülepedett iszap keletkezzen. Az ülepitők a szűrők előtt használhatók, a szűrési költségek csökkentésére. Mivel mind a két távozó fázis szivattyúzható, és így könnyen szállítható, az ülepitőket gyakran használják folyamatos többfokozatú ellenáramú berendezések készülékeiként, hogy velük kilúgozott szilárd anyagokhoz és kémiai csapadékokhoz tapadó oldat maradványait kimossák. Jellegzetes egyszakaszos *Dorr-féle* ülepitőt elterjedten alkalmaznak. A szuszpendált szilárd anyagból és folyadékból álló híg szuszpenzió a készülék felső részének középpontjában elhelyezett adagolócsövön keresztül kerül a széles ülepitő edénybe oly módon, hogy ez a szuszpenzió a tartály felső részén levő tiszta folyadékkal nem elegyedhet. A szilárd részecskék az edényt megtöltő folyadékból leülepszene, és az üledéket kaparó vagy gereblyesor a fenéken elhelyezett ürítő kúphoz irányítja. A kaparósorok lassan forognak, nehogy a leülepedett szilárd anyagot túlságosan felkavarják. Az üledéket az ürítő kútból membrán szivattyúval távolítják el. A tiszta legfelső folyadékréteg átfolyik az edény felső kerületén elhelyezett túlfolyóba. Az ülepitők általában 1,5-100 m átmérőjűek, szemcsés és pelyhes szilárd anyagok ülepitésére is alkalmazhatók, és tervezésük során a méretekhez és a felhasználás módjához kell alkalmazkodni. A területigény csökkentésére több párhuzamos ülepitőt helyeznek egymás fölé. Az ilyen berendezés egyetlen üledékterméket szolgáltat. Az

üledék folyadéktartalma általában 15- 75% körüli, nagymértékben függ a szilárd anyag és a folyadék tulajdonságaitól, valamint az ülepedés időtartamától. Minél kevesebb folyadék marad vissza, az elvégzendő kilúgozási vagy mosóművelet annál hatásosabb lesz.

20.2.2.4. *Folyamatos ellenáramú dekantálás.*

A kilúgozó berendezésül használt keverőkből vagy őrlőmalmokból a kilépő folyékony anyagok üleptető kaszkádba vihetők, hogy a finom eloszlású szilárd anyagot folyamatos ellenáramú mosással megszabadítsák a hozzátapadó oldott anyagtól. Ugyanilyen típusú kaszkáddal lehet mosni a kémiai reakciókban keletkező szilárd anyagokat is, mint például a foszforit kénsavas kezelésével előállított foszforsavat, a kénsav és bárium-szulfid reakciójával kicsapott bárium-szulfátot.

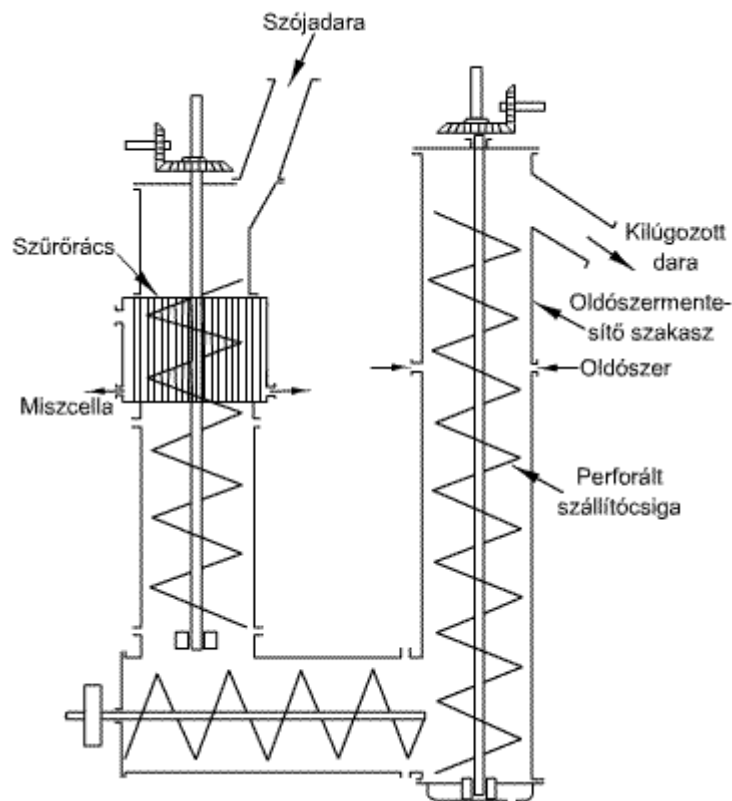
20.2.2.5. *Durván aprított szilárd anyagok folyamatos kilúgozása*

Számos berendezést valósítottak meg, amelyekkel szilárd anyag folyamatos ellenáramban vihető át kilúgozó berendezésen. E gépek kifejlesztését a metallurgiai iparokban használt osztályozókon kívül főleg a cukorrépa és növényi magvak, mint például gyapotmag, szója, kilúgozásával kapcsolatos szilárdanyag kezelési problémák tették szükségessé.

Növényi magvak kilúgozása. Gyapotmagot, szóját, lenmagot, földimogyorót, rizskorpát, ricinusmagot és számos hasonló terményt általában szerves oldószerekkel lúgoznak ki vagy *extrahálnak* abból a célból, hogy a bennük levő növényi olajakat kinyerjék. A legelőnyösebb kilúgozás biztosítására a magvakat általában megfelelő módon elő kell készíteni. Az előkészítés állhat hántolásból, előfőzésből, a nedvesség tartalom beállításából, valamint hajalásból vagy darálásból. Egyes esetekben a jelenlevő olaj egy részét előbb mechanikai módszerekkel, sajtolással távolítják el. A kilúgozó oldószerek általában ásványolaj szénhidrogének. A legtöbb olaj a hexánnak kivonható, de klórozott szénhidrogéneket és alkoholokat is alkalmaznak. Az olaj tartalmú oldószert, amely általában kis mennyiségű finom eloszlású szuszpendált szilárd anyagot tartalmaz, *miscellának*, a kilúgozott szilárd anyagot pedig *velő*-nek nevezik. A különböző kilúgozó-berendezéseket ebben az iparban általában extraktoroknak nevezik.

A szilárd anyag továbbítására számos extraktorban szállítócsigát vagy perforált kosarakat használnak. A *Hildebrandt* extraktorban **216. ábra**, például a szállítócsigák a szilárd anyagot U alakban elhelyezett csöveken viszik keresztül. A perforált szállítócsigák különböző sebességekkel forognak úgy, hogy a szilárd anyag különösen az U vízszintes szárában összetömörül.

A csöveken belül különleges vezetősínek akadályozzák meg, hogy a szilárd anyag továbbjutása során forogjon. A miscellát hengeres lemezekből álló szűrőrácson keresztül távolítják el, amelyen számos olyan függőleges rés van, amelyeknek belső nyílása kisebb, mint a külső. Ezáltal elkerüljük az összetömörülést. A szűrőrácscról a szállítócsiga kaparó hatása tisztítja le a szilárd anyagot. Használnak vízszintes szállítócsigákat is.



216. ábra: Hildebrandt extraktor

20.2.3. Számítási Módszerek

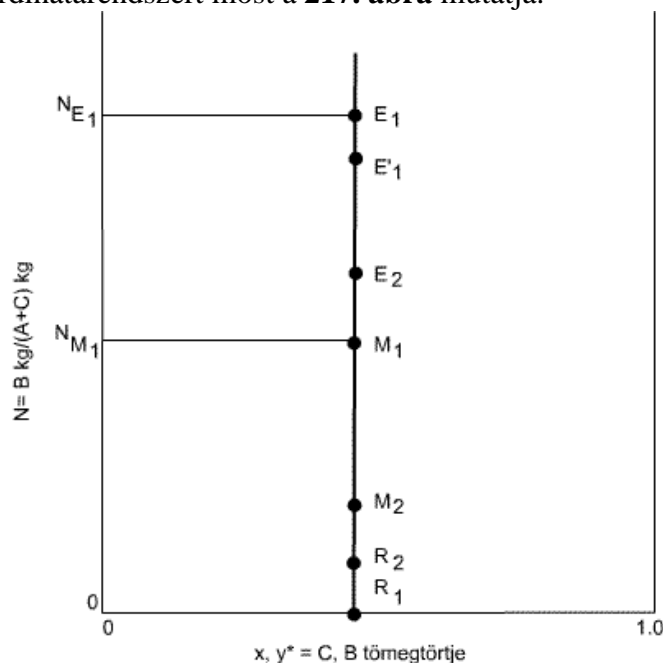
Igen fontos annak meghatározása, hogy adott eljárásban milyen mértékű kilúgozás érhető el, azaz, hogy ki tudjuk számítani valamilyen szilárd anyagból kilúgozható oldódó anyag mennyiségét, ha ismeretes a szilárd anyag kezdeti oldható mennyisége, a kilúgozó oldószerrel végzett mosások száma, a kilúgozó folyadék mennyisége, a kilúgozó oldószer oldott anyag koncentrációja, és hogy az alkalmazott módszer szakaszos vagy folyamatos ellenáramú. Vagy fordítva, szükségessé válhat, hogy a kilúgozó oldószer mennyiségének és oldott anyag koncentrációjának ismeretében meg tudjuk adni a mosások vagy fokozatok számát, amelyek ahhoz szükségesek, hogy a szilárd anyag oldható mennyiségét valamilyen meghatározott értékre csökkentsék.

20.2.3.1. Fokozathatásfok

Vizsgáljunk egy egyszerű szakaszos kilúgozó műveletet, amelyben a szilárd anyagot a teljes oldható anyagmennyiség kioldásához szükségesnél nagyobb mennyiségű oldószerrel lúgozzuk ki, és ahol a szilárd anyag sem az oldószert, sem az oldott anyagot nem adszorbeálja szelektívebben. Ha a szilárd anyag és oldószer megfelelő ideig érintkezhet, a teljes oldható anyagmennyiség feloldódik, és az eredményül kapott elegy a kilúgozott oldható anyag oldatában elosztatott oldhatatlan szilárd anyag szuszpenziója. Ezután az oldhatatlan fázisokat fizikai módszerekkel, ülepítéssel, szűréssel vagy lecsurgatással elválasztjuk, így az egész művelet egyetlen fokozatot alkot. Ha a szilárd anyag és a folyadék mechanikus elválasztása tökéletes volt, a műveletből kikerülő szilárd anyagra nem tapad oldott anyag, és ezzel az oldott anyag és az oldhatatlan szilárd test elválasztása egyetlen fokozatban megvalósítható. Ez 100% fokozat hatásfokú, ideális fokozatnak felelne meg. A gyakorlatban a fokozathatásfokok ennél sokkal kisebbek. Egyrészt az érintkezési idő nem elegendő, ezért az oldható anyag nem teljesen oldódik ki.

Másrészt, gyakorlati szempontból nem érdemes a folyadék és a szilárd anyag mechanikai elválasztását tökéletessé tenni, és a fokozatból kikerülő szilárd anyag mindig tartalmaz valamennyi folyadékot, és ezzel valamennyi oldott anyagot is. Azokban az esetekben, amikor a szilárd anyag az oldott anyagot adszorbeálja, még ha a szilárd és folyékony fázisok között az egyensúly be is áll, a tökéletlen ülepedés vagy lecsurgás csökkent fokozat hatásfokot eredményez.

Gyakorlati egyensúly. Általános esetben, más anyagátadási műveletekhez hasonlóan, a számításokat legegyszerűbb grafikusán végezni, amihez az egyensúlyi feltételek grafikus ábrázolása szükséges. A legegyszerűbben úgy járhatunk el, hogy a gyakorlati egyensúlyi feltételekkel dolgozunk, amelyek a fokozathatásfokokat közvetlenül figyelembe veszik, akár egészben, akár részben, hasonlóan ahhoz, ahogy a gázabszorpciónál vagy a lepárlásnál eljártunk. A legegyszerűbb esetekben tiszta oldószert (A), oldhatatlan szilárd hordozót (B) és oldható anyagot (C) tartalmazó háromkomponensű rendszerrel kell számolnunk. Az ilyen terner rendszerek számítása és grafikus ábrázolása háromszögű koordináták segítségével végezhető. Miután a vonalak gyakran az ilyen diagramok egyik sarkában sűrűsödnek, előnyösebb, ha a derékszögű koordinátát használunk. A B oldhatatlan szilárd anyag koncentrációja akár keverékben, akár szuszpenzióban $N = B / (A + C)$ kg, függetlenül attól, hogy a szilárd anyagot az oldat nedvesíti-e vagy sem. A C oldható anyag koncentrációját B -mentes bázisra vonatkozó tömegtörtként fejezzük ki, $x = C$ tömegtörtje a fokozatból kilépő oldatban (B -mentes alapon), és $y = C$ tömegtörtje a szilárd anyagban vagy szuszpenzióban (B -mentes alapon). Az y értéknek a teljes C oldható anyagmennyiséget tartalmaznia kell, beleértve a szilárd anyaghoz tapadó oldatban feloldott, valamint a fel nem oldott vagy adszorbeált oldható anyagot. Ha a szilárd anyag száraz, mint például a kilúgozó művelet megkezdése előtt, az N az oldhatatlan anyag tömegének az oldhatóhoz való arányát jelenti és $y = 1,0$. A tiszta A oldószere vonatkozóan $N = 0$, $x = 0$. A koordináta-rendszert most a **217. ábra** mutatja.



217. ábra: Koncentrációk a kilúgozásnál és mosásnál

Vegyünk először azt az egyszerű esetet, amikor az oldhatatlan szilárd anyag, amelyből a teljes oldható anyagmennyiséget kilúgozták, az oldható anyag oldatában szuszpendálva van. Ennek megfelelő pont az ábrán az M_1 . A tiszta oldat koncentrációja x és az oldhatatlan szilárd anyag/oldat arány N_{M1} . Tegyük fel, hogy az oldhatatlan szilárd anyag nem adszorbeál. Ha az

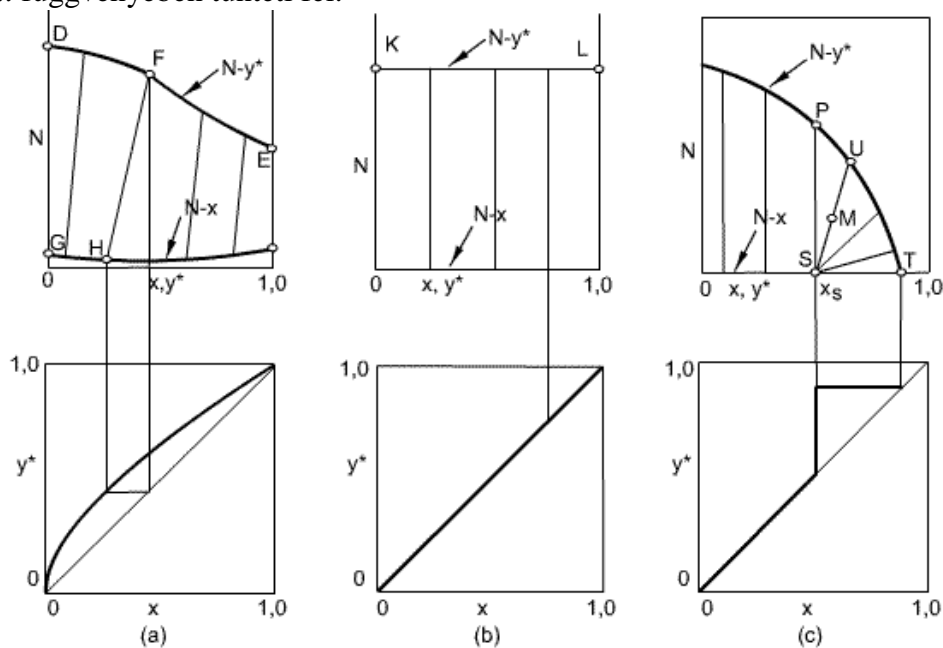
elegyet üleptjük, például szakaszos üleptő tartályban, a leszívható tiszta folyadékot az R_1 pont ábrázolja, és a visszamaradó üledék az oldat kis mennyiségében szuszpendált szilárd oldhatatlan anyagból áll. Az üledékben levő oldat összetétele azonos az eltávolított tiszta folyadékéval, úgyhogy $y^* = x$. A B szilárd anyag koncentrációja az N_{E1} üledékben az ülepedésre rendelkezésre álló τ időtől függ, ahogy ebben az esetben az E_1 pont a szuszpenziót ábrázolja. Az E_1R_1 a két elfolyó áramot, a tiszta folyadékot és szuszpenziót jelentő pontokat függőlegesen összekötő egyenes. Ha a leírt körülményeket egy adott kilúgozásnál betartják, az E_1 és R_1 pontok e kilúgozás gyakorlati egyensúlyi feltételeinek tekinthetők. Ha az ülepedéshez rendelkezésre álló idő kisebb, tegyük fel τ_1' , az üledék oldhatatlan szilárd anyag koncentrációja kisebb és az E_1' ponttal ábrázolható. A végső ülepedési magasságnak megfelelően az üledékre vonatkozó N -nek maximuma lenne, megegyezésben az előzőkben a szakaszos üleptésről mondottakkal, azonban az ülepedéshez gyakorlatilag rendelkezésre álló idő nem elég ennek elérésére. Mivel meghatározott idő alatt leülepedett üledék oldhatatlan anyagának koncentrációja a szuszpenzió kezdeti koncentrációjától függ, a τ_1 idő alatt ülepedő M_2 elegy az E_2 pontnak megfelelő üledéket szolgáltatja. Ha a szilárd anyag nem ülepszik le annyira, hogy teljesen tiszta oldatot kapjunk, vagy ha az ülepedett anyagról túl sok oldatot szívunk le, úgyhogy az kis mennyiségű szilárd anyagot is magával ragad, vagy ha a B szilárd anyag az oldatban kis mértékben feloldódik, a leszívott oldatot egy R_2 pont ábrázolja valamivel a grafikon alsó tengelye felett. Hasonlóan ábrázolhatjuk azokat az összetételeket, amelyeket úgy kapunk, hogy a nedves szilárd anyagot üleptés helyett szűrjük, vagy az oldatot leszivatjuk, illetve folyamatosan besűrítjük.

A szuszpenziók ülepedési vagy sűrűsödési jellemzői a szuszpendáló folyadék viszkozitásától és relatív sűrűségétől függenek. Mivel utóbbiak viszont az oldat összetételének függvényei, kísérletileg meg lehet állapítani, hogy a besűrített zagy összetétele hogyan változik az oldat összetételével, és e kísérletek adatai a gyakorlati egyensúly feltételeként diagramban ábrázolhatók. Világos azonban, hogy az adatokat olyan idő, hőmérséklet és koncentrációs viszonyok mellett kell felvennünk, amelyek azonosak a tervezett üzem vagy eljárás megfelelő viszonyaival. Ha a szilárd anyagréteg leszivatása perkolálás után hosszú ideig tart, akkor a maradék telítettségnek megfelelő egyensúlyt a szakaszos üleptésnél leírtak szerint határozhatjuk meg. A rövid tartamú leszivatásra vonatkozó adatokat kísérletileg kell meghatározni.

Mosó műveletekben, amelyekben az oldható anyag már feloldott állapotban van jelen, gyorsan elérjük az egész oldószeren belüli egyenletes koncentrációt, és a csökkent fokozathatásfok valószínűleg a tökéletlen leszivatásnak vagy üleptésnek a következménye. Ha a szilárd testben elosztatott fel nem oldott anyagot lúgozunk ki, a csökkent fokozathatásfok vagy a túl rövid érintkezési időnek, vagy a folyadék és szilárd anyag tökéletlen mechanikai elválasztásának következménye. A két hatás kísérletileg megkülönböztethető oly módon, hogy a szilárd anyagon visszamaradt folyadék mennyiségét és összetételét rövid és hosszú érintkezési időknél megmérjük, és az egyensúlyi feltételek meghatározásához az utóbbiakat használjuk.

Vizsgáljunk meg néhány szóba jövő egyensúlyi görbe típust. A **218. ábra** adatait olyan esetekben kapjuk, amikor a C oldható anyag az A oldószerben korlátlanul oldódik, úgyhogy x és y értéke 0-tól 1,0-ig terjedhet. Ilyenek a körülmények a szójaolaj (C)-szójaliszt (B)-hexán (A) rendszerben, ahol az olaj és a hexán korlátlanul elegyednek. A DFE görbe az elválasztott szilárd anyagot ábrázolja a gyakorlatban várható körülmények között, a fenti tárgyalásnak megfelelően. A GHI görbe, a leszívott oldat összetétele, az $N = 0$ tengely felett van, és ezért ebben az esetben vagy a B szilárd anyag oldódik részlegesen az oldószerben, vagy nem teljesen kiüleptített folyadékot távolítottunk el. Az összekötővonalak, például az FH , nem függőlegesek. Ez akkor következik be, ha az érintkezés a kilúgozó oldószerrel túl rövid volt ahhoz, hogy a teljes oldható anyagmennyiség kioldását biztosítsa, vagy ha az oldható anyag szelektíve adszorbeálódik, vagy ha az oldható anyag a B szilárd testben oldódik, és egyensúlykor a

folyadék és szilárd fázis között egyenlőtlenül oszlik meg. Az adatokat grafikonra vihetjük, amely y -t x függvényében tünteti fel.

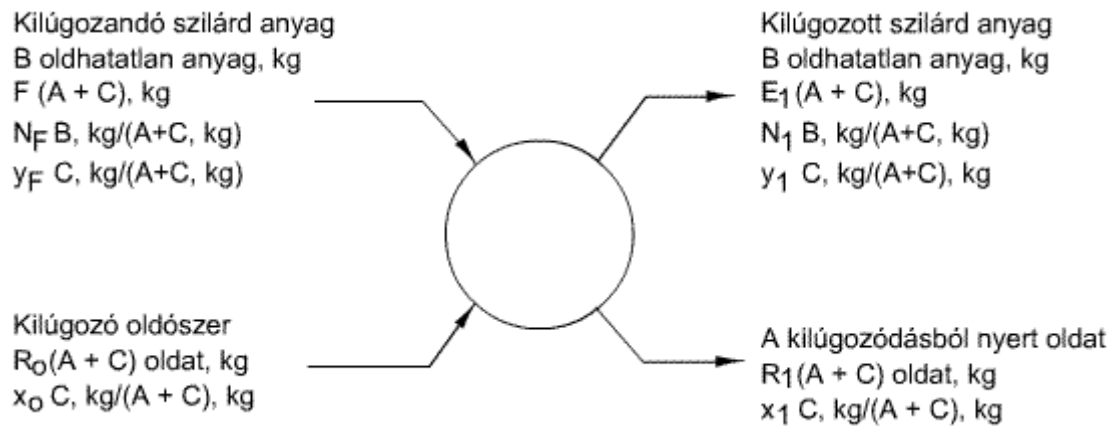


218. ábra: Tipikus egyensúlyi diagramok

A **218. ábra** azt az esetet tünteti fel, amelyben az oldható anyag nem adszorbeálódik, úgyhogy a leszívott oldat és a szilárd anyaghoz tapadó oldat összetétele azonos, és az összekötővonalak függőlegesek. Ez az alsó x, y koordináta rendszerben 45° -os egyenest eredményez, és az y^*/x -szel definiált m együttható egységnyi. A KL vízszintes, jelezve, hogy a szilárd anyagot az oldható anyag minden koncentrációjánál ugyanolyan mértékben ülepítették vagy szívatták le. A folyamatos ülepítők működése szabályozható úgy, hogy ez így megvalósuljon. Ennek feltételeit, állandó elfolyásnak lehet nevezni. Ebben az esetben az oldat B anyagot sem oldott, sem diszpergált állapotban nem tartalmaz. A **218. ábra** azt az esetet tünteti fel, amikor a C oldandó anyag az A oldószerben x_s oldékonysággal csak korlátozottan oldható. Az x_s -nél töményebb tiszta oldatot nem lehet előállítani, és emiatt a szuszpenziót és a telített oldatot összekötő egyenesek az ábrán látható módon összetartanak. Ebben az esetben a PS -től jobbra eső bármilyen M elegy úgy ülepszik, hogy S tiszta telített oldat és olyan U szuszpenzió keletkezik, amelynek összetétele M helyzetétől függ. A T pont a tiszta szilárd oldható anyag összetételét ábrázolja a telített oldat leszívása vagy kiülepítése után. Minthogy a PS -től balra eső összekötő egyenesek függőlegesnek mutatkoznak, adszorpció nem lép fel, és a lecsurgó folyadékok tiszták. Meg kell jegyezni, hogy a gyakorlatban a különböző esetek kombinációi egyetlen diagramban is felléphetnek.

20.2.3.2. Egyfokozatú kilúgozás.

Vizsgáljuk a **219. ábra**, amely egyetlen kilúgozó- vagy mosófokozatot mutat. A kör a teljes műveletet jelenti, beleértve a szilárd anyag és kilúgozó oldószer összekeverését és az eredményül kapott nem elegendő fázisok bármely ismert módon való elkülönítését.



219. ábra: Egyfokozatú kilúgozás vagy kioldás

Az egyes áramok tömegét szakaszos műveleteknél kg-ban, folyamatos áramlásnál tömegáramban, kg/s-ban, vagy tömegáram sűrűségben, kg/m²s-ban adjuk meg. Minthogy a legtöbb esetben a B szilárd anyag az oldószerben oldhatatlan és a kapott oldat tiszta folyadék, a kilúgozott szilárd anyagban levő B mennyisége azonosnak vehető a kilúgozandó szilárd anyagban találhatóval. N definíciójának megfelelően

$$(6.10) \quad B = N_F F - E_1 N_1$$

Az oldható anyag (C) mérlege

$$(6.11) \quad F y_F + R_0 x_0 = E_1 y_1 + R_1 x_1$$

Az oldószer (A) mérlege

$$(6.12) \quad F(1 - y_F) + R_0(1 - x_0) = E_1(1 - y_1) + R_1(1 - x_1)$$

Az oldat (oldható anyag+oldószer) mérlege

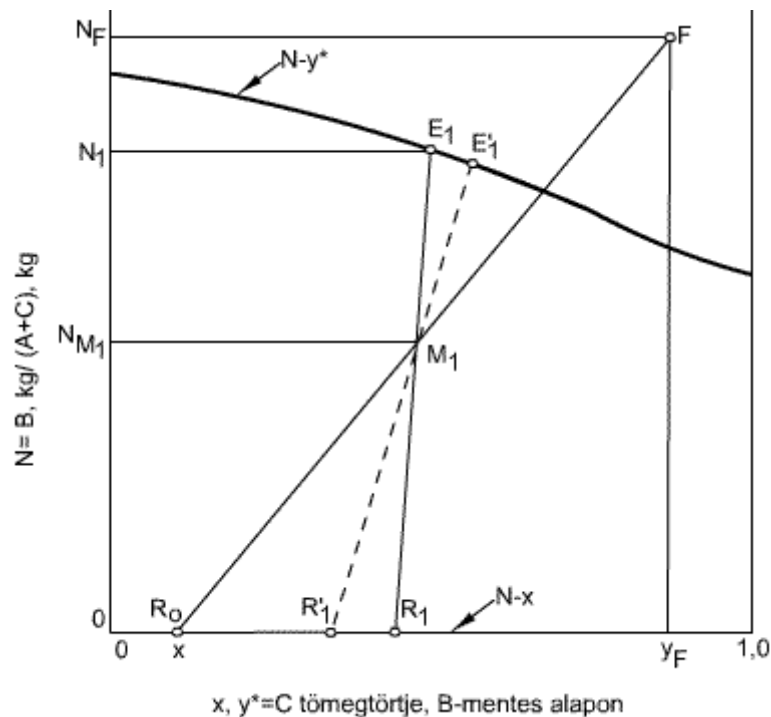
$$(6.13) \quad F + R_0 = E_1 + R_1 = M_1$$

A kilúgozandó szilárd anyag és kilúgozó oldószer elegyítése M_1 kg tömegű B -mentes elegyet eredményez, amelyre vonatkozóan

$$(6.14) \quad N_{M_1} = \frac{B}{F + R_0} = \frac{B}{M_1}$$

$$(6.15) \quad y_{M_1} = \frac{y_F F + R_0 x_0}{F + R_0}$$

Ezeket az összefüggéseket a **220. ábra** koordináta rendszerében lehet ábrázolni. Az F pont a kilúgozandó szilárd anyagot, az R_0 pedig a kilúgozó oldószerrel ábrázolja. Az M_1 pont a teljes elegyet tünteti fel, ennek megfelelően az R_0 -t és F -et összekötő egyenesre kell esnie.



220. ábra: Egyfokozatú kilúgozás vagy mosás

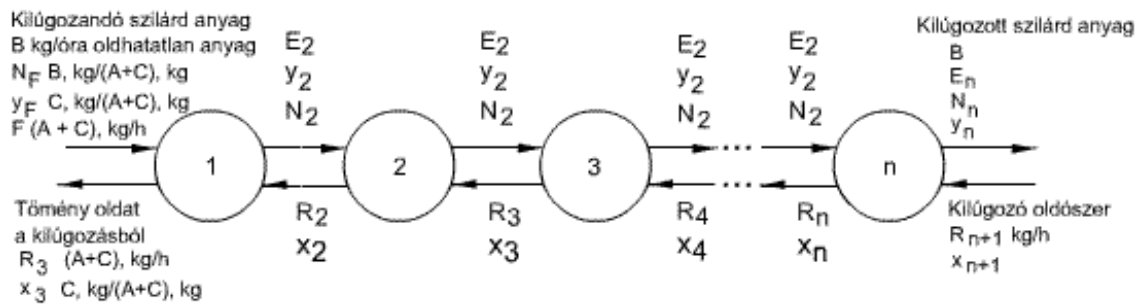
A kilépő áramokat ábrázoló E_1 és R_1 pont az M_1 -en keresztül haladó összekötő egyenes ellenkező végein van, és összetételük a diagramról leolvasható. E_1 tömegét a (6.10) egyenlet alapján ki lehet számítani, az R_1 -et pedig a (6.15) egyenlet alapján. Ha a leszívott folyadékban B van jelen, a **218. ábra** megfelelő egyensúlyi diagramra van szükség.

20.2.3.3. Többfokozatú keresztáramú kilúgozás.

Ha a kilúgozott szilárd anyagot újabb adag friss oldószerrel hozzuk érintkezésbe, az oldhatatlan anyagból további oldható anyagmennyiséget oldunk vagy mosunk ki. A további fokozatokra vonatkozó számítások az egy fokozat számításainak csupán ismétlései olyan módon, hogy az egyes fokozatok kilúgozott szilárd anyaga a következő fokozat betáplált szilárd anyaga lesz. A (6.10)–(6.15) egyenletek azzal a változtatással alkalmazhatók, hogy a további fokozatok jelzésére megfelelő indexeket kell használni. Ha egy anyag oldhatóanyag tartalmának meghatározott értékre csökkentéséhez szükséges fokozatok számát kell meghatároznunk, minthogy a „gyakorlati” egyensúlyi adatok használata következtében valóságos fokozatokkal van dolgunk, figyelembe kell venni, hogy a kapott számnak egész számnak kell lennie. Ennek következtében vagy a kilúgozandó anyag mennyiségét, vagy pedig az oldószer mennyiségét és egyes fokozatokra való eloszlását próbálgatással kell meghatározni.

20.2.3.4. Többfokozatú ellenáramú kilúgozás.

A **221. ábra** a kilúgozó-, ill. mosóműveletek vázolata látható.



221. ábra: Többfokozatú ellenáramú kilúgozás

Ahhoz, hogy állandósult állapotú körülmények uralkodjanak, a műveletnek szükségképpen folyamatosnak kell lennie, bár a Shanks rendszer szerinti kilúgozás nagyszámú ciklus lefolytatása után szintén megközelíti az állandósult állapotot. A vázolt műveletben feltételezzük, hogy a B szilárd anyag oldhatatlan, és a tiszta oldatba nem megy át, de az alább körvonalazott módszert könnyű átalakítani olyan esetre is, ahol ez nem áll fenn. Az egész berendezés oldószermérlége a következő:

$$(6.16) \quad F + R_{N+1} = R_1 + E_N = M$$

Az oldat $(A+C)$ mérlege:

$$(6.17) \quad Fy_F + R_{N+1}x_{N+1} = R_1x_1 + E_Ny_N = My_M$$

Az M érték feltételezett B szilárd anyagtól mentes elegyet képvisel, amelyet a kilúgozandó szilárd anyag és a kilúgozó oldószer összekeverésével kapunk. A **221. ábra** az üzem műveleti diagramja.

Az M pont koordinátái a következők:

$$(6.18) \quad N_M = \frac{B}{F + R_{N+1}}$$

$$(6.19) \quad y_M = \frac{Fy_F + R_{N+1}x_{N+1}}{F + R_{N+1}}$$

A kaszkádból kilépő anyagokat ábrázoló E_N és R_1 pontnak az M -en áthaladó egyenesen kell feküdni, és E_N a „gyakorlati” egyensúlyi görbén fekszik. A (6.16) egyenlet következőképpen rendezhető át

$$(6.20) \quad F - R_1 = E_N - R_{N+1} = H$$

Ennek mintájára akárhány fokozat oldatmérlege, így például az első háromé a következőképpen rendezhető:

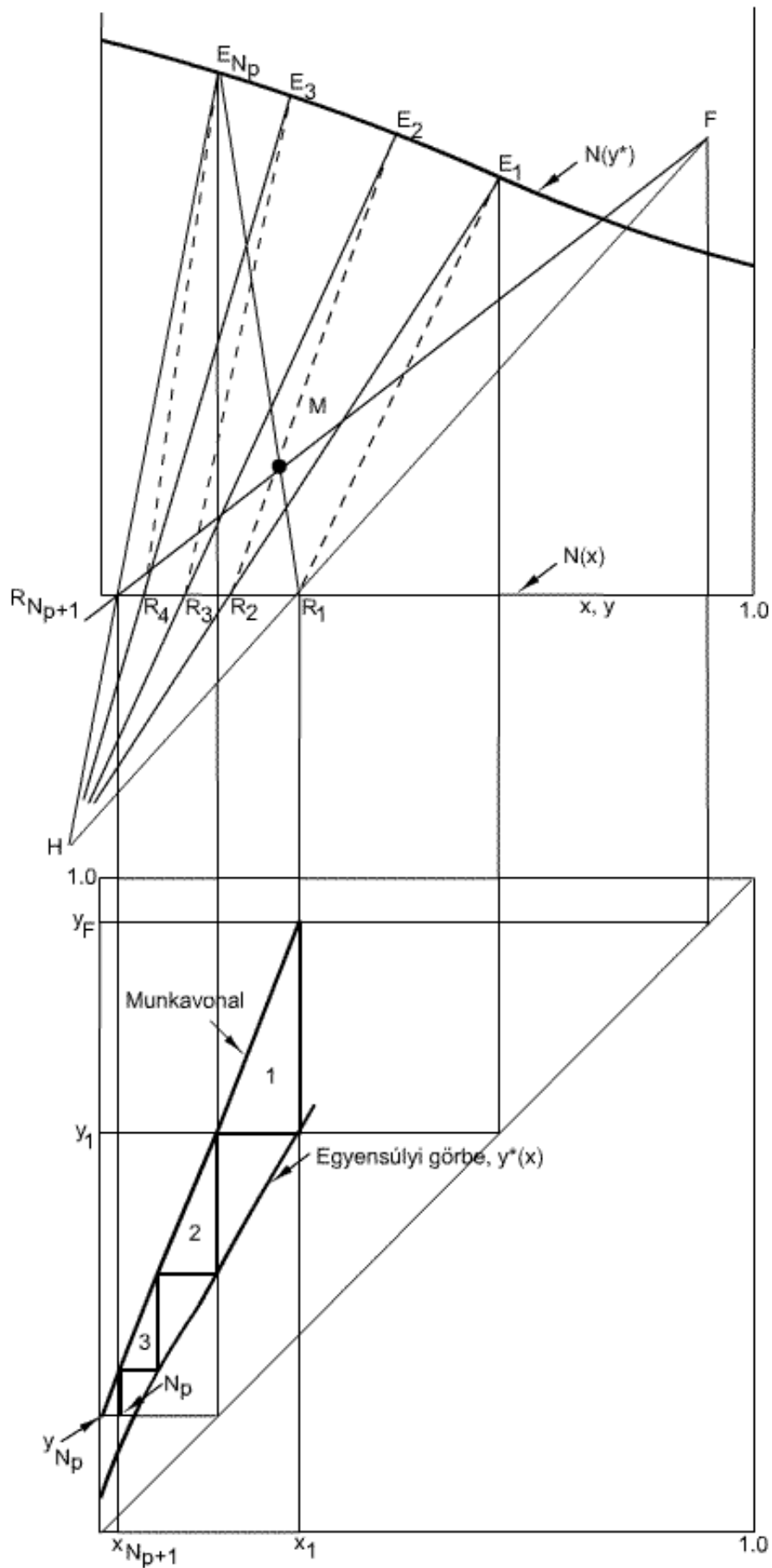
$$(6.21) \quad F - R_1 = E_3 - R_4 = H$$

A H az egyes fokozatok közötti állandó $E-R$ anyagáram különbséget (általában negatív mennyiség) jelenti. A **222. ábra** az FR_1 és az $E_N R_{N+1}$ egyenes meghosszabbításának metszéspontjával ábrázolható, a koordináták jelentésének megfelelően. Minthogy az egyes fokozatokból kilépő

anyag mennyiségeket a fennálló gyakorlati feltételeknek megfelelő gyakorlati összekötő egyenes köti össze, E_1 -et az R_1 -en keresztülhaladó összekötő egyenes végén kapjuk. Az E_1 -től H -hez húzott egyenes kimetszi R_2 -t és így tovább. A fokozatok megszerkesztése az ábra alsó részén látható x, y koordinátarendszerben is lehetséges a munkavonal megrajzolása után. A munkavonalat úgy nyerjük, hogy a H pontból tetszőleges vonalakat húzunk, és metszéspontjait az egyensúlyi diagrammal a szokásos módon az alsó görbére vetítjük. A munkavonal iránytangense R/E , amely általános esetben fokozatról fokozatra változik. A fokozatok számát a szokásos lépcsőszerkesztés adja meg. A fokozatok inkább reálisak, mint ideálisak, mivel a gyakorlati egyensúlyi adatok a fokozathatásfokot már figyelembe vették, és így egész számokat kell kapnunk. Különösen akkor, ha a szükséges fokozatok száma az ismeretlen, a kilépő folyadék koncentrációjának vagy az oldószer mennyiségének iterációs meghatározása szükséges ahhoz, hogy egész számot kapjunk.

Abban a speciális esetben, ha „állandó elfolyás”-ról vagy minden üledékre állandó N -értékről van szó, az x, y diagramban a munkavonal egyenes és állandó R/E iránytangensű. Ha ezen a diagramon a gyakorlati egyensúlyi görbe is egyenes, $m = y^*/x = \text{konstans}$, akkor az abszorpciónál használatos (3.17) egyenlet alkalmazható. Ezekben az esetekben írhatjuk:

$$(6.22) \quad \frac{y_F - y_n}{y_F - mx_{n+1}} = \frac{(R/mE)^{n+1} - (E/mE)}{(R/mE)^{n+1} - 1}$$



222. ábra: Szilárd-folyadék egyensúlyi diagramja

20.2.4. A kilúgozás sebessége.

Mivel a kilúgozás gyakorlati megvalósításakor számos különböző jelenséggel találkozunk, a kilúgozó művelet nem magyarázható egyetlen elmélettel. Mint láttuk, a kilúgozás jelentheti egyszerűen a szilárd anyag felületéről oldat kimosását, vagy oldható anyag kioldását a körülvevő oldhatatlan anyagból, jelenthet ozmózist és még más mechanizmusokat. Várható, hogy áthatolhatatlan szilárd részecskék felületéről az oldat kimosása gyorsan megy végbe, mivel ehhez csak az oldat és az oldószer keveredése szükséges, és a fokozathatásfokot ekkor kizárólag a folyadék és szilárd anyag mechanikai elválásának tökéletessége szabja meg. Ezzel szemben, ha szilárd anyag belső részeiből kell kioldanunk az oldható anyagot, viszonylag lassú folyamattal lesz dolgunk. Természetes anyagok, mint például növények extrakciója a bonyolult szerkezet nehezé teheti a módszer alkalmazását. A fánál például egy oldható impregnáló anyag kilúgozási sebességében különbségek mutatkoznak attól függően, hogy a diffúzió a fa rostjaival párhuzamosan vagy azzal keresztirányban megy végbe. Ha az oldható anyagoknak a sejtfalakon dialízissel kell áthatolniuk, a módszer egyáltalán nem alkalmazható. A szójadarából kinyerhető szójaolaj diffúziós sebessége nem értelmezhető egyszerűen, és ezt annak tulajdonítják, hogy az olajat beágyazó anyagban többféle típusú struktúra és az olajban lassan oldódó alkotórészek vannak jelen. A kilúgozott olaj, különböző viselkedésű anyagok elegye, abból látszik, hogy a rövid és hosszú kilúgozási idő után kapott olajok különböző tulajdonságúak. Ezek a példák is megvilágítják, hogy a legtöbb gyakorlati kilúgozási folyamat bonyolult. Ha a szilárd anyagok, mint az említett esetekben is, a kilúgozó oldószerekbe merülnek, feltehető, hogy a folyamatot meghatározó ellenállás a szilárd anyagon belül az anyagátadással szemben fellépő ellenállás, és a szilárd anyagot körülvevő folyadék ellenállása sokkal kisebb. Ilyen esetekben a szilárd felülettel érintkező folyadék áramlási sebességének növelése a kilúgozás sebességét nem befolyásolja, mivel az egész folyamat sebességét a legnagyobb ellenállású részfolyamat sebessége határozza meg.

21. Szilárd-fluidum rendszerek közötti anyagtranszport, adszorpció

Ebben a csoportban az *adszorpció* és *ioncsere* diffúziós műveleteket tárgyaljuk. Az adszorpció szilárd anyag és folyadék, illetve gáz érintkezése útján megy végbe, és az anyagátvitel a fluidumból a szilárd fázisba irányul. Az ioncserét felfoghatjuk, mint az adszorpció speciális esetét, mivel az ioncsere műveletnél szintén folyadék és szilárd anyag érintkezik egymással, viszont az anyagátvitel folyadékból szilárd anyagba és szilárd anyagból folyadékba, tehát oda-vissza irányul. A szilárd-folyadék extrakciót, ahol szilárd és folyadék érintkezik egymással és az anyagátvitel minden esetben a szilárd anyagból a folyadékba irányul, a deszorpció különleges esetének, azaz az adszorpció fordított műveletének fogják fel, ezért egyes szerzők a kilúgozást is ebben a rendszerben tárgyalják.

21.1. Adsorbensek

Az adszorpció olyan művelet, amelynek során szilárd anyagok felületén gőzöket, gázokat, folyadékokat, oldószerben oldott vagy diszpergált szilárd anyagokat és kolloidokat lehet megkötni elválasztásuk céljából. Az adszorpciónak a környezetvédelem területén is jelentős szerepe van. A művelet megvalósításához szükséges szilárd anyagot adszorbensnek nevezik, a felületen megkötött anyagokat pedig adszorptívumnak vagy adszorbátumnak. A felületi erők, amelyek az adszorbátumot az adszorbens felületén megkötik, lehetnek fizikai vagy kémiai jellegűek. Ilyen értelemben megkülönböztetünk fizikai és kémiai adszorpciót. Az első esetben nincs kémiai kölcsönhatás az adszorbens és az adszorbátum között és a gáz adszorbátumot a cseppfolyós halmazállapot tulajdonságaival lehet jellemezni.

Gőzök adszorbeáltatása esetén a megkötődést néha a gőzök kondenzálódása kíséri, aminek eredményeképpen az adszorbens pórusai folyadékkal telítődnek. Ez a jelenség a kapillár kondenzáció. A kondenzációnak az oka, hogy a felületi feszültség hatására a folyadék meniszkusza felett a folyadék gőznyomása erősen csökken.

Ellentétben az abszorpcióval, az adszorpció akkor is használható, amikor a megkötendő komponensnek igen kicsi a kiindulási koncentrációja. Jól tervezett készülékkel, adszorberrel a komponens gyakorlatilag teljes egészében meg lehet kötni. Az adszorpciónak ezt a tulajdonságát a környezetvédelemben lehet jól alkalmazni, amikor a levegőben levő különböző szerves oldószergőzök káros emisszióját kell egy megengedett küszöbérték alá csökkenteni. A teljes kinyerésre, gazdaságossági megfontolások miatt, ritkán kerül sor.

Az adszorpció magától végbemenő, spontán felületi jelenség. Fizikai adszorpció esetén a spontán folyamat miatt keletkező adszorpció hő nagyságrendben a szublimációs hőhöz esik közel. Az adszorbens felületével érintkezésbe kerülő molekulák anyagi tulajdonságaiktól függően, vagy megkötődnek, vagy visszaverődnek. Adott pillanatban, feltéve, hogy az egyensúly még nem állt be, mindig nagyobb az adszorbátumot alkotó molekulák száma, mint a felületről visszaverődő, deszorbeálódó molekulák száma. Az adszorpció során tehát az adszorbens telítődik, míg a gázfázis koncentrációja csökken.

Az *adszorpció*s művelet az egyes szilárd anyagoknak azt a tulajdonságát használja ki, hogy bizonyos anyagokat oldataikból szelektív módon koncentrálnak felületükön. Ilyen módon gáz- és folyadékelegyek komponensei egymástól elválaszthatók. Néhány példával megvilágítjuk a lehetséges szétválasztások természetét és egyben a gyakorlati alkalmazások széles körét. A gázok szétválasztásának területén adszorpciót alkalmaznak levegő és más gázok szárítására, ipari gázokból nemkívánatos szagok, valamint szennyezések, például széndioxid eltávolítására, értékes oldószergőzök visszanyerésére levegővel és más gázokkal alkotott híg elegyükből,

valamint metánt, etilént, etánt, propilént és propánt tartalmazó szénhidrogén gáz elegyek frakcionálására. Tipikus folyadék szétválasztások: petróleum termékek és vizes cukoroldatok szintelenítése, vízből nemkívánatos ízek és szagok eltávolítása, valamint aromás, illetve paraffin-szénhidrogének elegyének frakcionálása

Másik nagy fontosságú, folyadék-szilárd rendszerben végzett művelet az *ioncsere*, az ionok reverzibilis kicserélődése bizonyos szilárd anyagok és egy elektrolit oldat között. Az ioncsere lehetővé teszi elektrolit oldatok szétválasztását és frakcionálását. A folyamat lényegében kémiai művelet, de nemcsak az ionok és a szilárd anyag kölcsönhatása játszik benne szerepet, hanem az ionok diffúziója is a szilárd fázisban. Bár a folyamat maga sokkal bonyolultabb, mint az adszorpció, a gyakorlati megoldás és a kapott eredmények nagyon hasonlóak. Már kezdetben különbséget kell tennünk két különböző típusú adszorpciós folyamat, a fizikai és a kémiai adszorpció között. A fizikai adszorpció könnyen megfordítható folyamat, a szilárd anyag és az adszorbeálódó anyag molekulái intermolekuláris vonzásának eredménye. Ha például a szilárd anyag és a gáz molekulái között a vonzóerő nagyobb, mint a gázmolekulák között, a gáz a szilárd anyag felületére kondenzál, jóllehet a nyomása kisebb, mint az uralkodó hőmérsékletre tartozó tenzió. Az ilyen kondenzáció hőfejlődéssel jár. A felszabaduló hőmennyiség rendszerint valamivel nagyobb, mint a párolgáshő, nagyságrendben körülbelül a gáz szublimációs hőjének felel meg. Az adszorbeált anyag nem hatol be a szilárd anyag kristályszerkezetébe és nem oszlik szét benne, hanem teljes egészében a felületen marad. Ha azonban a szilárd anyag porózus, a felületén sok kis kapilláris van, akkor az adszorbeált anyag behatol ezekbe a pórusokba, ha nedvesíti a szilárd anyagot. Kis görbületi sugarú homorú folyadékfelszín fölött az egyensúlyi gőznyomás kisebb, mint sík felszín fölött, az adszorpció mértéke tehát növekszik. Egyensúlyban az adszorbeált anyag parciális nyomása mindig ugyanakkora, mint az anyag parciális nyomása a vele érintkező gázfázisban. A gázfázis nyomásának csökkentésével vagy a hőmérséklet emelésével az adszorbeált gáz változatlan alakban könnyen eltávolítható, vagyis *deszorbeálható*. Az ilyen típusú ipari adszorpciós műveletek ezt a megfordíthatóságot használják ki az adszorbens visszanyerésére, az adszorbeált anyag kinyerésére és elegyek frakcionálására. A megfordítható adszorpció nem egyedül gázok tulajdonsága, ugyanígy megfigyelhető folyadékok esetében is. A *kemisorpció* vagy aktivált adszorpció a szilárd anyag és az adszorbeálódó anyag közötti kémiai kölcsönhatás eredménye. A kémiai kötés erőssége rendkívül különböző lehet, és rendszerint nem képződnek a szokásos értelemben vett és identifikálható vegyületek, de az adhéziós erők lényegesen nagyobbak, mint a fizikai adszorpció esetében. A kemisorpció folytán felszabaduló hőmennyiség rendszerint nagy, a kémiai reakcióhők nagyságrendjében van. A folyamat gyakran nem megfordítható, és deszorpció után gyakran tapasztalhatjuk, hogy az anyag kémiai változáson ment át. Ugyanaz az anyag, amelyet egy adszorbens alacsony hőmérsékleten fizikai adszorpcióval köt meg, magasabb hőmérsékleten néha kemisorpciót szenved, sőt az is előfordul, hogy mindkét folyamat egyidejűleg végbemegy. A kemisorpciónak a katalízisben van rendkívüli fontossága. Az adszorbensek rendszerint szemcsés szilárd anyagok, méretük 1 cm átmérőtől 50 μ -ig változik. Attól függően, hogyan kívánják őket alkalmazni, bizonyos műszaki tulajdonságaiknak kell lenniük. Ha például rögzített ágyas adszorberben használják, amelyen át gőzt vagy folyadékot áramoltatnak, áramlási ellenállásuk ne legyen túl nagy, és a folyadékáram ne hordhassa ki könnyen a részecskéket. Megfelelő szilárdságot és keménységet kell mutatniuk, nehogy kezelés közben vagy a megfelelő magas rétegben saját súlyuk alatt töredezzenek. Ha gyakran kell tartályokból kiüríteni és betölteni, könnyen ömleszthetők is legyenek. Ezek a tulajdonságok könnyen felismerhetők.

Az adszorpció jelensége egészen általános, bizonyos mértékig közönséges szilárd anyagok is adszorbeálnak gázokat és gőzöket. Például az analitikai laboratóriumban mindenki tapasztalhatta, hogy mérés közben az analitikai mérlegen levő kiszáritott porcelántégely tömege nedves időben növekszik a nedves levegőből a nedvességnek a tégely felületére történő

adszorpciója következtében. Azonban csak néhány anyagnak van olyan fajlagos adszorpciós kapacitása, hogy ipari adszorbensként alkalmazható legyen. Abból, hogy az adszorbensek gyakran feltűnően nagy fajlagos adszorpciós képességet mutatnak, és bizonyos anyagokat nagy mennyiségben képesek megkötni nyilvánvaló, hogy az adszorpciós tulajdonságok szorosan összefüggenek az anyag kémiai természetével. A kémiai összetétel egyedül azonban nem elegendő az adszorpciós képesség jellemzésére. Az adszorpciós képesség nagymértékben függ az adszorbens előállításának módjától és adszorpciós, valamint deszorpciós előéletétől. A gyakorlatban használható adszorbens lényeges jellemzője a nagy *fajlagos felület*. Különösen a gáz adszorpció esetében a működő felület nem azonos az általában használatos szemcsék bruttó felületével, hanem a részecskék belső pórusainak az előbbinél sokkal nagyobb a felülete. Ezek a pórusok rendszerint nagyon kicsinyek, néha csak egy-két molekula szélességűek, de nagy számuk miatt óriási adszorpciós felületet jelentenek. A gázálarokban használt aktív szén fajlagos felülete 10^6 m²/kg. Az alábbiakban összefoglaljuk az adszorbensekkel szemben támasztott legfontosabb követelményeket:

- Megfelelő szelektivitás.
- Nagy fajlagos felület, amit általában nitrogén adszorpcióval mérnek és a BET (*Brunauer – Emmet – Teller*) izotermával határoznak meg.
- Nagy telítettség még kis koncentrációk esetén is,
- Nagy mechanikai szilárdság és jó kopásállóság,
- Kis hidraulikus ellenállás,
- Jó korrózióállóság.
- Hosszú élettartam, lehetőleg állandó értékű telítődési kapacitással.

Az adszorbensek kémiai összetétel és a szilárd vázszerkezet szerint két fő csoportba sorolhatók: szénbázisú adszorbensek és oxidbázisú adszorbensek.

A szénbázisú adszorbensek közül a legfontosabbak a különböző szemcseméretű amorf, vagy granulált aktív szének. Az aktív szén igen szelektív és jól alkalmazható gázok szétválasztására, oldószerek visszanyerésére. Az aktív szén hidrofób, ezért kiválóan alkalmas szerves oldószergőzők és más nem poláros vegyületek adszorpciójára és illó szerves szénvegyületet tartalmazó véggázok tisztítására. Speciális feladatokra megjelentek újabban a szén alapú szűrővászna és a szabályos belső rácsszerkezettel és rácsközi hézagokkal rendelkező szénelapú molekulaszűrők.

Az oxidbázisú adszorbensekhez a szilikagél, az aktivált timföld, illetve a természetes vagy szintetikus molekulaszűrők (molekulasziták) tartoznak. A molekulaszitákhoz tartozó zeolitok kristályos alumínium-szilikátok, amelyhez a semleges töltés biztosítására különböző kationokat adagolnak. A zeolitok erősen hidrofil jellegűek, elsősorban poláros anyagok adszorbeálására alkalmasak. Segítségükkel, például igen alacsony harmatpontú levegő-, vagy vízmentes szerves oldószerek állíthatók elő.

Az első három adszorbens féleségnek inhomogén a pórus szerkezete. A pórusok alakja és mérete változó, egyszersmind jellemző az illető csoportra. A molekulaszita viszont, az előzőekben közöltek alapján, kristályos, szabályos belső szerkezettel és rácsközi hézagokkal rendelkezik. A hézagok, pórusok méretei összemérhetők az adszorbeálódó molekulák méreteivel. Innen ered a molekulaszita elnevezés, mert ezek a zeolitok nem adszorbeálják azokat a molekulákat, amelyek átmérője nagyobb a pórusátmérőnél. A rácshézagokba beférő molekulákat viszont jó élességgel választják el a nagyobbaktól. A továbbiakban az egyes adszorberek előállítását foglaljuk össze:

1. *Fullerföldek*. Főleg magnézium- alumínium-szilikátból álló természetes anyagok. Az anyagot hevítik és szárítják azért, hogy porózus szerkezet alakuljon ki, majd megőrlik és szitálják. A kereskedelmi forgalomban megtalálható minden méret a durva szemcséktől

- egészen a finom porig. A fullerföld különösen ásványolajtermékek, mint kenőolaj, transzformátorolaj, petróleum, gázolaj, valamint növényi és állati olajok szintelenítésére, derítésére, semlegesítésére és szárítására használatos. Az anyag felületén adszorbeált szerves anyag kimosása és kiegészítése után az adszorbens többször újra felhasználható.
- 2. Aktivált agyagok.** Ilyenek a bentonit vagy más olyan agyag, amelyek különleges aktiváló eljárás előtt nem mutatnak adszorpciós képességet. Az aktiválást kénsavval vagy sósavval végzik, majd kimossák az agyagot, szárítják, és finom porrá őrlik. Ez az adszorbens különösen ásványolajtermékek derítésére alkalmas és egyszeri használat után rendszerint eldobják.
 - 3. Bauxit.** Ez a természetben előforduló alumíniumhidrátok egyik fajtája, 230-800 °C-ra való hevítéssel aktiválják, hogy adszorpcióképes legyen. Ásványolajtermékek derítésére, gázok szárítására használják. Hevítéssel regenerálható.
 - 4. Timföld.** Kemény, vízmentes alumíniumoxid. Hevítéssel aktiválják, azért, hogy nedvesség tartalmát eltávolítsák. A porózus termék szemcse vagy por alakban hozzák forgalomba, főként gázok és folyadékok szárítására használják. Újbóli felhasználás céljából hevítéssel regenerálható.
 - 5. Csontszén.** Örölt, szárított csont száraz lepárlásával nyerik 600-900 C°-on. A cukor finomítására is használják, mosás és kiizzítás után újból felhasználható.
 - 6. Derítőszenek.** Növényi anyagok, fa, fűrészpor különböző módszerekkel történő elszenesítésével állítják elő, majd aktiválják. Sok alkalmazási területük van, így cukoroldatok, ipari vegyszerek szintelenítése, folyadékok szárítása és tisztítása, víztisztítás, illetve állati olajok finomítása.
 - 7. Gázadszorbens szén.** Kókuszdióhéj, gyümölcs magvak, ásványi szén vagy fa elszenesítése útján készül. Aktiválását, amely lényegében részleges oxidáció, forró levegő vagy gőzzel végzik. Szemcsés vagy pasztilla alakban kapható. Felhasználják gázelegyekből oldószer-visszanyerésre, gázálcokban, valamint szénhidrogéngázok frakcionálására. Az adszorbeált gáz kihajlásával regenerálják.
 - 8. Szilikagél.** Kemény, szemcsés, nagyon porózus anyag; nátrium-szilikát oldatból savas kezeléssel nyerik. Nedvességtartalma használat előtt 4-7% körül van, főleg levegő és más gázok szárítására, gázálcokban, továbbá szénhidrogének frakcionálására használják. Az adszorbeált anyag kihajlásával regenerálják.

Az egyes gyakran használt típusok jellemző adatai a **8.** táblázat foglaljuk össze.

8. táblázat: Adszorbensek jellemző adatai

Jellemzők		Aktív szén	Szilikagél		Alumínium szilikát	Molekula szita
			szűk-pórusú	tág-pórusú		
Sűrűség (g/cm ³)	Valódi ¹	1,75-2,1	2,1-2,3	2,1-2,3	2,3	-
	látszólagos ²	0,5-1	1,3-1,4	0,75-0,85	1,06-1,09	-
	Halmaz ³	0,2-0,45	0,8	0,5	0,7	0,6-0,7
Átlagos pórusméret (A)		20-70	5-30	70-100	20-25	3-12
Pórustérfogat(cm ³ /g)		0,56-0,68	0,28	0,90	0,35-0,57	-
Fajlagos felület (m ² /g)		600-1700	450-500	270-350	300-350	500-1000
Max. hőmérséklet (°C)		150	400	400	500	600

A **8.** táblázat a *valódi* sűrűség a kapillárpórusos anyagot alkotó szilárd váz sűrűsége, a *látszólagos* sűrűség a kapillárpórusos anyagnak a belső pórusokkal együtt vett térfogategységnyi tömege, és a *halmaz* sűrűség a réteget alkotó abszorbensek a szemcsék közötti gáztérrel együtt vett térfogategységnyi tömege.

Az üzemelés szempontjából fontos paraméterek a **9. táblázat** táblázatban találhatóak.

9. táblázat: Adsorbensek üzemelési paramétereit.

Tulajdonság	Aktív szén	Szilikagél	Aktív Al ₂ O ₃	Molekula szita
Szemcseméret (mm)	1,5-5	2-8	2-6	3-6
Ajánlott gázsebesség (cm/s)	10-40	12,5-50	12,5-50	15-25
Δp (Pa/1m réteg)	ha v=10 cm/s	300	300	450
	ha v=30 cm/s	1300	1300	1450
Adszorpciós hőmérséklet (°C)	5-50	5-35	0-25	15-40
Deszorpciós hőmérséklet (°C)	105-115	155-175	175-320	200-300

Az adszorpció során a szilárd adszorbens gáz- vagy folyadék elegy egy vagy több komponensét megkötí, és így az adszorbens telítődik. Az adszorpció tágabb értelemben nemcsak a telítődés műveletét jelenti, hanem azt a ciklust is, aminek során a telítődött adszorbent ismét aktívvá, adszorpcióra képessé tesszük. Az adszorpciós ciklus részműveletekből áll, nevezetesen a telítődést, magát az adszorpciós műveletet követi a deszorpcióra, szárításra és hűtés művelete. A négy részműveletből álló adszorpciós ciklus mellett elterjedt a három és a két részműveletből álló ciklus is. Ez utóbbi csak adszorpcióból és deszorpcióból áll. Az adszorpció során megkötött adszorbátumot a deszorpció részműveletével nyerik vissza, vagy távolíthatják el. A deszorpció a technológiai adottságoktól függően végezhető direkt vízgőzzel, direkt füstgázzal, közvetett melegítéssel, vákuumos leszívással, valamely jobban adszorbeálódó anyagcsere adszorpciójával, vagy az előző módszerek kombinációjával.

A deszorpcióhoz szükséges vízgőz mennyisége függ a deszorbeálandó anyag mennyiségétől, valamint a réteg felmelegítéséhez és az adszorpciós hővel azonos értékű deszorpciós hő közléséhez együttesen szükséges hőmennyiségtől. Szerves oldószerek deszorbeáltatásához általában 0,25- 0,35 kg gőz szükséges 1 kg aktív szénre vonatkoztatva. A mikropórusokban kötött adszorbátum kihajtásához nagyobb fajlagos gőzszükséglettel kell számolni, a gőzfogyasztás elérheti a 4 kg/kg értéket is. A deszorpciót általában ellentétesen végzik, mint az adszorpciót. A vízgőz rendszerint felülről lefelé áramlik, az adszorbens réteg hézagjaiban kikondenzálódó víz ekkor könnyebben lecsorog.

A vízgőzös deszorpció során az adszorbátumot tartalmazó vízgőzt kondenzáltatják. Ha a binér folyadékkeleg alkotói egymásban nem oldódnak, akkor a víztől a folyékony adszorbátum, például a szénhidrogének egyszerű dekantálással szétválaszthatók. Ellenkező esetben a kondenzátumot desztillálással lehet szétválasztani.

A vízgőzös deszorpció során az adszorbens nedves lesz, ezért a deszorpciót ilyenkor a szárítás részművelete követi. Mivel a szárítás során az adszorbens felmelegszik, a telítődés viszont az alacsonyabb hőmérsékleteken megy kedvezőbben végbe, a szárítás után célszerű az adszorbens réteget hűteni.

Kezdetben az adszorpciót folyadékok derítésére is használták. A gázok tisztítására alkalmas gázalarcok kifejlesztését ugyanakkor munkavédelmi és haditechnikai igények elősegítették. Számos esetben alkalmaznak adszorpciót az oldószertartalmú véggázok környezetvédelmi kezelésére. A levegőtisztaság-védelem emissziós előírásait sokszor csak adszorpcióval lehet betartani, de esetenként gazdaságossági számítással kell tisztázni az alternatív szeparációs műveletek, mint a membránszűrés, a kifagyasztási rendszerek, vagy az egyéb kémiai oxidációs rendszerek (például ózonos kezelés) alkalmazhatóságát.

Jelenleg az adszorberek és adszorbensek széles palettáját használják a különböző technológiai folyamatokhoz, például gázok szétválasztására, levegő és földgáz szárítására, a kokszoláskor keletkező gázokból aromás szénhidrogének kinyerésére.

Robbanásveszélyes anyagok adszorpciós kezelésekor a levegő helyett célszerű inert gázáramot, például nitrogént alkalmazni vivőgázként. Egyes eljárásoknál, amelyet általában kis

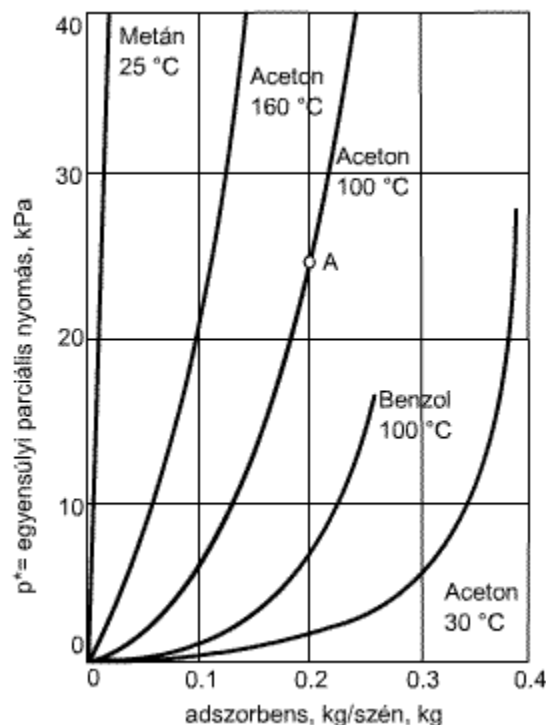
koncentrációban jelenlevő és jól adszorbeálódó bűzös szerves anyagok levegőből való kivonására alkalmaznak, 200°C-on védőgázzal semlegesítik az adszorbert.

21.2. Adszorpciós egyensúlyok

Az adszorpciós egyensúly szempontjából megkülönböztethetünk egyszerű gázok és gőzök-, gáz- és gőzelegyek-, valamint folyadékok adszorpcióját.

21.2.1. Egyszerű gázok és gőzök egyensúlya

Valamely gáz vagy gőz adszorpciója egy szilárd anyagon sok tekintetben hasonló a gázoknak folyadékokban való egyensúlyi oldhatóságához. Gáznak szilárd fázis felületén való szorpciójának két típusát különböztetjük meg. Az első a gázréteges adszorpció, ahol a gáz az adszorbens felületén összesűrűsödik, de megőrzi a gáz tulajdonságait. Az adszorbens X megkötő képessége az 1 kg adszorbens által megkötött komponens mennyiségét jelenti kg-ban. A gázfázisban a komponens p parciális nyomását adjuk meg. A **223. ábra** bemutatunk néhány egyensúlyi, adszorpciós izotermát aktív szén adszorbensen.

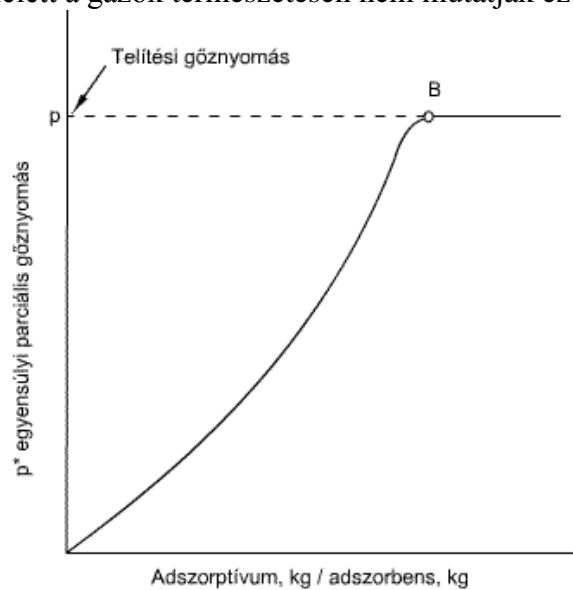


223. ábra: Egyensúlyi adszorpció aktív szénen

A **223. ábra** az adszorbeált gáznak (az adszorptívum) a szilárd anyagon talált koncentrációja függvényében tüntettük fel a gáz vagy gőz állandó hőmérsékleten mért p^* egyensúlyi parciális nyomását. 100 °C-on például 25,3 kPa nyomású tiszta acetone gőz 0,2 g adszorbeált acetone/g szén adszorptívum koncentrációval (A pont) tart egyensúlyt. Az acetone nyomását növelve, több acetone adszorbeálódik, amint azt a görbe emelkedése mutatja, a nyomás csökkentésekor pedig az A ponttal jellemzett rendszerből a szén felületéről acetone deszorbeálódik. Viszont tudjuk, hogy az acetone 100 °C-os izotermája csak 372 kPa nyomásig, az acetone ehhez a hőmérséklethez tartozó tenziójáig növekszik tovább. Nagyobb nyomáson az acetone ezen a hőmérsékleten nem maradhat gőz állapotban, hanem teljes egészében folyadékká kondenzálódik, így tehát az anyagot tetszés szerinti nagy koncentrációban lehet a szilárd anyagra vinni a gőznyomásnál

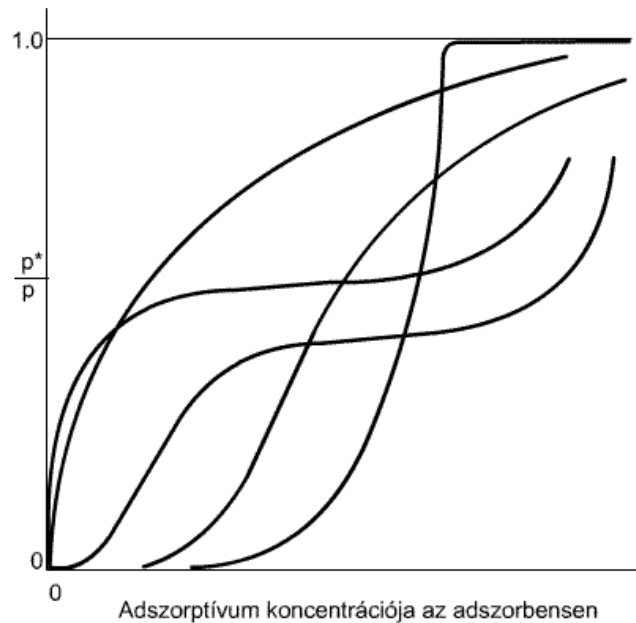
nagyobb nyomással, mint például a *B* pontban **224. ábra**. A *B* pontnak megfelelő koncentrációnál nagyobb koncentrációk azonban nem jelentenek szükségképpen gőz adszorpciót, hanem cseppfolyósodásra mutatnak. Ezt a második típusú adszorpciót kondenzációs adszorpciónak is nevezzük. Ez akkor megy végbe, ha az adszorbeált komponens kritikus hőmérséklete eléggé magas. Ekkor a felületen adszorbeált gáz sűrűsödése kondenzációig megy. A kondenzátum kitölti az adszorbens pórusait. Mivel a kis kapillárisok szívó hatása, mint tudjuk, jelentős, tehát kis folyadéktartalom esetén főleg az adszorbens kis kapillárisait tölti ki a folyadék. Ez azt jelenti, hogy a kis kapillárisokban a meniszkusz sugara kicsi. *Kelvin* törvénye szerint a meniszkuszok feletti gőznyomás kisebb a folyadék felülete fölötti gőznyomásnál. Az adszorbensben levő folyadéktartalom növelésével növekednie kell a gőz (adszorbeált gáz) egyensúlyi nyomásának, mint ahogy azt a **224. ábra** mutatja.

A kritikus hőmérséklet felett a gázok természetesen nem mutatják ezt a sajátságot.



224. ábra: Jellegzetes, teljes adszorpció izoterma

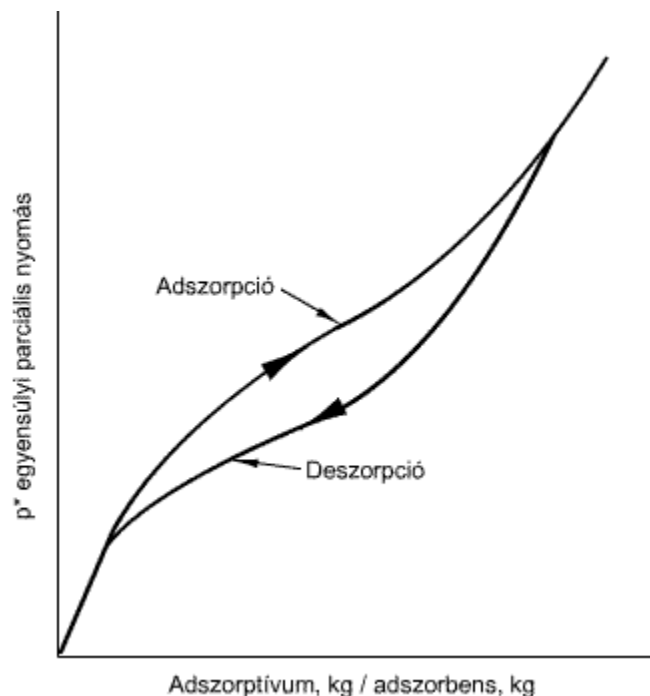
Hasonló körülmények között különböző gázok és gőzök különböző mértékben adszorbeálódnak, így a benzol (**223. ábra**) ugyanazon a hőmérsékleten könnyebben adszorbeálódik, mint az aceton, és adott egyensúlyi nyomáson nagyobb adszorptívum koncentrációra vezet. Általános szabályként gőzök és gázok annál könnyebben adszorbeálódnak minél nagyobb a molekula tömegük, és minél alacsonyabb a kritikus hőmérsékletük. Kémiai különbségek azonban, mint például a molekulán belüli telítettség, ugyancsak befolyásolják az adszorpció mértékét. Az úgynevezett permanens gázok rendszerint csak viszonylag kismértékben adszorbeálódnak, amint azt a metán izotermája mutatja a **223. ábra**. Az adszorpció izotermák nem mindig konkávok a nyomás-tengely felől nézve. Különböző rendszereknél a **225. ábra** bemutatott alakok mindegyikét megfigyelhetjük.



225. ábra: Gőzök jellemző adszorpciós izotermái

A különböző görbék összehasonlíthatósága céljából ebben az ábrában ordinátaként a p^* egyensúlyi parciális nyomásának és az adszorbeált anyag p tenziójának hányadosát (azaz a relatív telítettséget) ábrázoltuk.

Az adszorpció során adszorpciós hiszterézis is felléphet. A **223. ábra** görbéi egyensúlyi görbék, és így teljesen reverzibilis jelenségeket írnak le. Például az ábra A pontjának megfelelő körülményeket megvalósíthatjuk úgy is, hogy friss szénen adszorpciót hozunk létre, valamint úgy is, hogy egy kezdetben nagyobb adszorptívum koncentrációjú mintán deszorpciót idézünk elő.

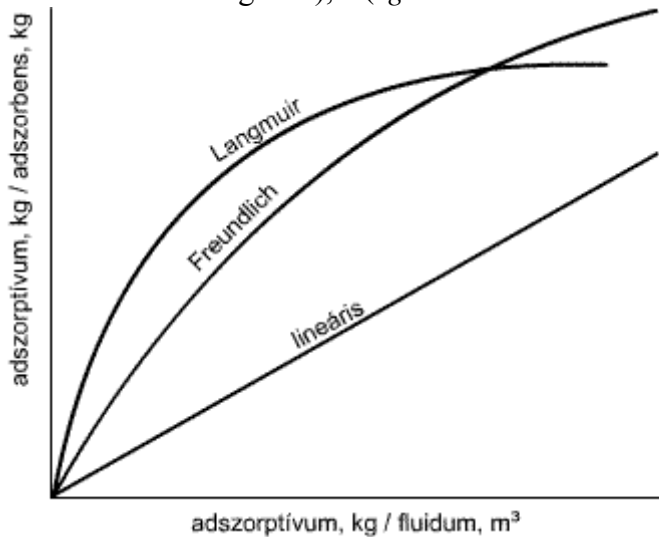


226. ábra: Ábra. Hiszterézist mutató adszorpciós izoterma

Előfordul azonban, hogy különböző egyensúlyokra jutunk, legalábbis az izoterma egy részén attól függően, hogy a gőz adszorbeálódott vagy deszorbeálódott. Ez vezet a **226. ábra** látható hiszterézis jelenségre, ami a szilárd anyag kapillárisaihoz és pórusaihoz vezető nyílások

alakjának vagy a szilárd anyag adszorptívummal való nedvesítése bonyolult jelenségeinek a következménye lehet. Minden esetben, amikor hiszterézist észlelünk, a deszorpciós egyensúlyi nyomás kisebb, mint az adszorpciónál kapott nyomás.

Adszorpciós izotermák egyenletei: Igen gyakran az adszorpciós izotermát, úgy ábrázolják, hogy a szilárd fázis koncentrációját (koncentráció a felületi kötött fázisban), X (kg adszorbeátum/ kg adszorbens) a függőleges tengely, ábrázoljuk a fluid fázis koncentrációjának (koncentráció a fluid fázis fő tömegében), c (kg adszorbeátum/ m^3 fluidum) függvényében.



227. ábra: A gyakoribb adszorpciós izotermák

A **227. ábra** az egyenessel leírt függvénykapcsolat hasonlít a Henry törvényhez

$$(7.1) \quad X = Kc$$

ahol K konstans (m^3/kg adszorbens) kísérletileg kell meghatározni. A lineáris izoterma alkalmazása nem általános, de híg oldatok tartományában számos rendszer egyensúlyi viszonyait jó közelítéssel leírja.

A Freundlich izoterma egyenlete egy empirikus összefüggés. Gyakran alkalmazzák ezt az egyenletet számos fizikai adszorpciós rendszerekre, különös előszeretettel a folyadék fázisú adszorpciónál

$$(7.2) \quad X = Kc^{n_1}$$

ahol K és n_1 konstansok, melyeket kísérletileg kell meghatározni. Ha X -et ábrázoljuk a c függvényében logaritmikus koordináta tengelyeket használva, akkor az egyenes meredeksége az n_1 dimenziómentes kitevő. A K dimenziója az n_1 értékétől függ. Gyakran használják ezt az összefüggést a szénhidrogén gázok aktív szénen történő adszorpciójánál is. Gyakran alkalmazzák a (7.2) egyenlet inverz függvényét is Freundlich egyenletként.

Langmuir izoterma egy elméleti alapon nyugvó összefüggés, melyet elsősorban reverzibilis egyrétegű adszorpciónál alkalmaznak

$$(7.3) \quad X = X_0 \frac{c}{K + c}$$

ahol X_0 (kg adszorbeátum/ kg szilárd adszorbens) az adott adszorbens maximális kötőkapacitása, és K (kg/m^3) az adszorpciós-deszorpciós folyamat egyensúlyi állandója, amelyeket kísérletileg kell meghatározni. Ha ábrázoljuk az $1/X$ -et az $1/c$ függvényében, akkor az egyenes meredeksége K/X_0 , és a tengelymetszete $1/X_0$.

A mérési adatokra mindhárom modell illeszthető. A Langmuir közelítésnek annyi az előnye, hogy a konstansoknak fizikai jelentésük van.

21.2.2. Gáz- és gőzelegyek adszorpciója,

Különbséget kell tennünk az elegyek között aszerint, hogy csak egy komponens vagy valamennyi komponens adszorbeálódik.

21.2.2.1. Egy komponens adszorpciója

Igen gyakran, főleg gőz-gáz elegyek esetében, hogy gyakorlatilag csak egy komponens adszorbeálódik, például ha aceton gőz és metán elegye aktív szénrel érintkezik (**223. ábra**). Ilyenkor a kismértékben adszorbeálódó gáz jelenléte lényegében nem zavarja a gőz adszorpcióját, és a tiszta gőz adszorpcióis izotermája alkalmazható, ha a gőznek a gőzelegyen kifejtett parciális nyomását vesszük egyensúlyi nyomásnak. Az aceton adszorpcióis izotermái (**223. ábra**) tehát érvényesek acetonnak rosszul adszorbeálódó gázokkal, például nitrogénnel, hidrogénnel alkotott elegyeire is. Ez analóg a gázoknak folyadékokban való oldhatóságának hasonló eseteivel.

21.2.2.2. Kétkomponensű gáz- vagy gőzelegyek, mindkét komponens adszorbeálódik

Ha egy biner gáz- vagy gőzelegy mindkét komponense külön-külön, hozzávetőlegesen azonos mértékben adszorbeálódik, akkor az elegyen az egyik komponens jelenléte befolyásolja a másik komponens adszorpcióját. Ha az adszorbenst is figyelembe vesszük, akkor a rendszer háromkomponensű, az egyensúlyi viszonyok kényelmesen ábrázolhatók a terner folyadék egyensúlyokhoz hasonló módon. Ebben az esetben célszerű az adszorbenst az extrakció oldószer folyadékával analógnak tekinteni.

Az adszorpció nagymértékben függ a hőmérséklettől és a nyomástól, eltérően a folyadékok oldékonyságától, amelyet a szokásos körülmények között a nyomás növelése gyakorlatilag nem befolyásol. Ezért az egyensúlyi diagramokat célszerű állandó hőmérsékletre és állandó összes nyomásra ábrázolni, hogy ezek egyúttal *izotermák* és *izobárok* is legyenek

Tehát a gáz és gőzelegyeknél nyomás és a hőmérséklet befolyásolja az adszorpció egyensúlyi viszonyait. A nyomás csökkentésével csökken az egységnyi adszorbensen megkötött adszorptívum mennyisége. Elég nagy nyomástartományban megvizsgált esetekben a relatív adszorptivitás a nyomás növelésével csökkent. Mivel nagyobb nyomáson az adszorbens kapillárisaiban nagyobb a valószínűség a folyadékká való kondenzálódásra, ezért a növekvő nyomással az egyensúly egyszerűen eltolódik a közönséges folyadék-gőz egyensúly felé, és valószínű ez okozta a relatív adszorptivitás csökkenését. Állandó nyomáson a hőmérséklet emelkedésével csökken az adszorbeált gázelegy mennyisége, és megváltozik a relatív adszorptivitás is.

21.2.3. Folyadékok adszorpciója

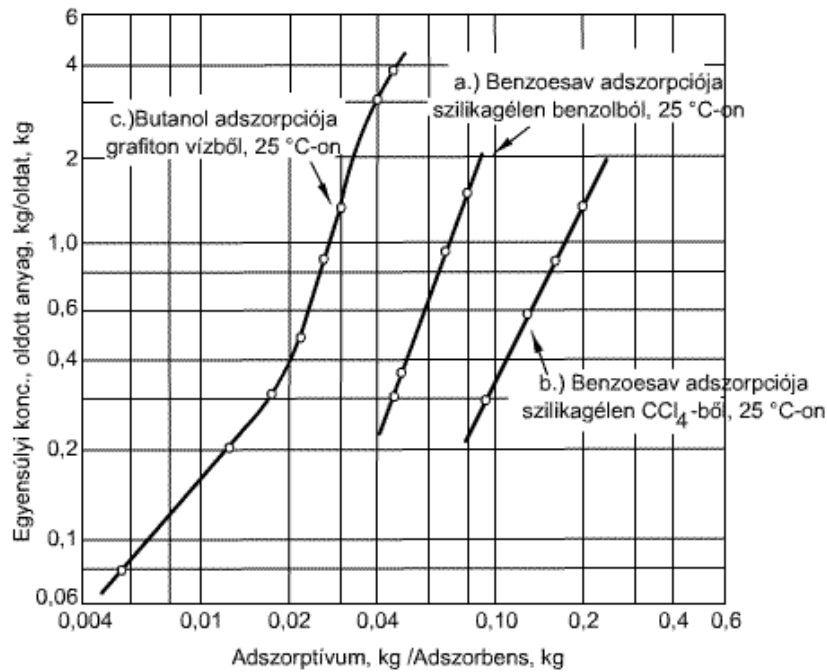
Egy adszorbenst tiszta folyadékba merítünk, és a folyadék adszorbeálódik, akkor a hő fejlődését, az úgynevezett *nedvesítési hő*, mutatja. Az adszorpció mértékének mérésére azonban nincsen célravezető módszer. Térfogatváltozás a folyadékban, ami az adszorpció mértéke lehetne, általában nem figyelhető meg, viszont a szilárd anyag eltávolítása a folyadékból és a tömegmérés nem vezet eredményre, mert nem lehet egymástól elválasztani az adszorbeált és a mechanikusan megtapadt folyadékot. Ez a probléma a gázok adszorpciójánál nem jelentkezik, mivel az adszorbensnek az adszorpció következtében a tömeg gyarapodása könnyen mérhető.

21.2.3.1. Oldott anyag adszorpciója híg oldatból

Ha adszorbenst keverünk egy kétkomponensű oldathoz, és az oldott anyag és az oldószer is adszorbeálódik. Mivel a teljes adszorpció nem mérhető, az oldott anyag viszonylagos vagy látszólagos adszorpcióját szokták meghatározni. Rendszerint úgy járnak el, hogy ismert térfogatú oldatot ismert tömegű adszorbenssel kezelnek, és a V (m^3 oldat/kg adszorbens) mennyiségét mérik. Az oldott anyag szelektív adszorpciója következtében az oldott anyag koncentrációja a folyadékban a kezdeti c_0 értékről a végső egyensúlyi c^* (kg oldott anyag/ m^3 folyadék) értékre csökken. Az oldott anyag, látszólagos adszorpciója így $V(c_0 - c^*)$ (kg adszorbeált oldott anyag/kg adszorbens), amennyiben az oldat térfogatváltozását elhanyagoljuk. Ezt megtehetjük híg oldatok esetében ahol az eredeti oldószernek csak kis része adszorbeálódott. Valamely oldott anyag, látszólagos adszorpciója függ az oldott anyag koncentrációjától, a hőmérséklettől, az oldószertől és az adszorbens típusától. Az oldott anyag adszorpciója gyakorlatilag mindig csökken, ha a hőmérséklet emelkedik, és rendszerint annál nagyobb mértékben, minél rosszabbul oldódik az illető anyag az oldószerben. Az adszorpció rendszerint megfordítható, vagyis adszorpció és deszorpció esetében is ugyanaz az izoterma érvényes. Alacsony koncentráció tartományban, főleg híg oldatok esetében az adszorpciós izotermákat gyakran a *Freundlich* egyenlettel lehet leírni. Ez az egyenlet egy tapasztalati képlet, ami a (7.2) egyenlettel definiáltunk, és az inverz függvényét is Freundlich egyenletként használják, mivel a k és n értékek konstansok.

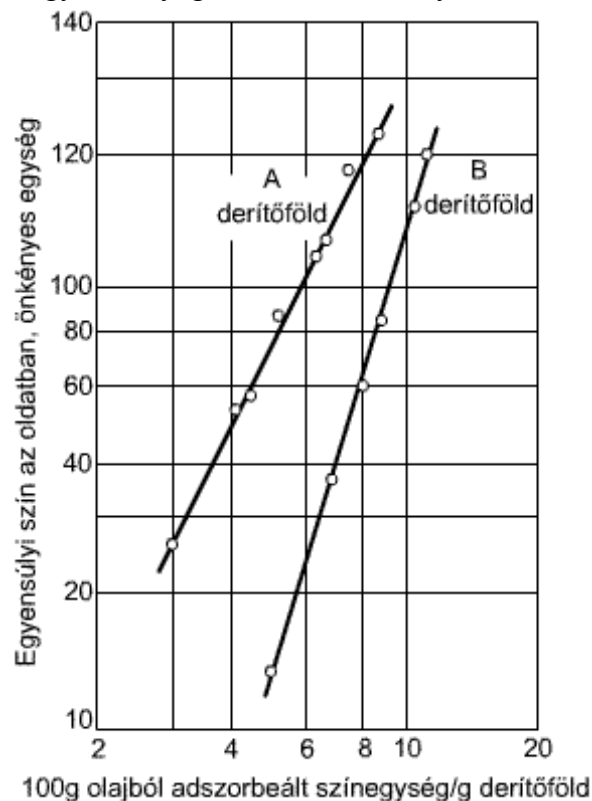
$$(7.4.) \quad c^* = k[V(c_0 - c^*)]^n = kX^n$$

ahol $V(c_0 - c^*)$ az egységnyi tömegű adszorbens által látszólag adszorbeált anyagmennyiség, (kg adszorbeált oldott anyag/kg adszorbens), k és n állandók. Gyakran az itt használtaktól eltérő koncentrációegységeket is alkalmaznak. Ebben az esetben a k állandó értéke megváltozik, de az olyan híg oldatokban, amelyekre az egyenlet érvényes, n értéke változatlan. Az egyenlet alakjából itt is kitűnik, hogy ha az egyensúlyi oldott anyag koncentrációt a szilárd anyag adszorptívum tartalmának függvényében kétszer logaritmikus léptékben ábrázoljuk, n iránytangensű és k tengelymetszetű egyenest kapunk. A **228. ábra** néhány ilyen módon ábrázolt tipikus izotermát mutatunk be. Az (a) és a (b) egyenes az oldószer hatását mutatja benzoésav adszorpciójára szilikagélen. Mindkét görbe követi a (7.4) egyenletet az adott koncentráció tartományban. Az adszorpció kisebb mértékű a benzolos oldatból, ami várható, mivel a benzoésav jobban oldódik benzolban. Az ábra (c) görbéje a linearitástól való eltérést mutatja nagy koncentráció tartományban, bár a (7.4) egyenlet a kisebb koncentrációkra érvényes. A nagyobb koncentrációknál az eltérést az egyenlettől az oldószer nagyobb mérvű adszorpciója okozhatja, amit itt nem vettünk figyelembe, vagy az egyenlet az adott esetre egyszerűen nem alkalmazható.



228. ábra: Adszorpció híg oldatokból [2].

A Freundlich-egyenlet gyakran olyan esetekre is érvényes, amikor az oldott anyag kémiai összetétele nem ismeretes, például színezőanyagok adszorpciójára cukoroldatból és ásványi vagy növényi olajokból, vagy búzanyagok eltávolítása folyadékból vagy gázból.



229. ábra: Olaj színtelenítése derítőföld adszorbens alkalmazásával [2].

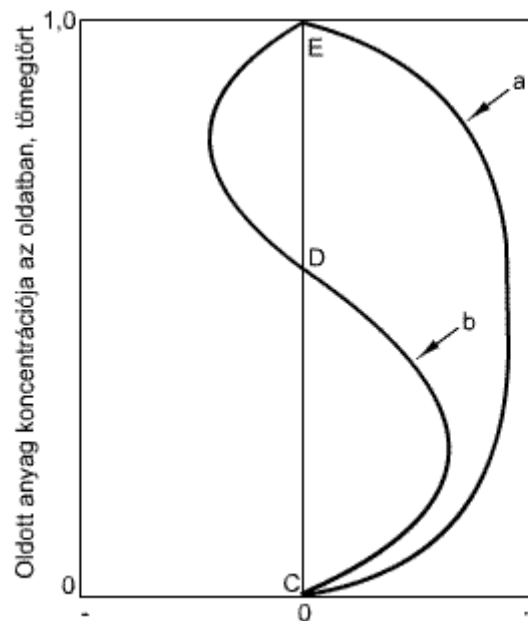
Ilyenkor az oldott anyag koncentrációját koloriméter vagy spektrofotométer segítségével mérhetjük, és a színerősség valamilyen egységével fejezzük ki, feltéve, hogy a használt színskála lineárisan függ a szóban forgó anyag koncentrációjától. A **229. ábra** ennek az

ábrázolásmódnak az alkalmazását mutatjuk be színes anyagok adszorpciójára nyersolaj frakcióból két különböző derítőföldön.

Itt az oldott anyag színerősségét egy önkényesen választott skálán van ábrázolva, az adszorptívum koncentrációját a derítőföldön pedig úgy lett meghatározva, hogy mérték a 100 g olaj színerősségének változását ugyanilyen egységekben különböző adszorbens mennyiségekkel való kezelés hatására.

21.2.3.2. Oldott anyag adszorpció tömény oldatból

Ha az oldott anyagnak a látszólagos adszorpcióját meghatározzuk a tiszta oldószertől a tiszta oldott anyagig terjedő egész koncentráció tartományban, a **230. ábra** látható görbéket nyerünk.



Az adszorbeált oldott anyag látszólagos tömege/adszorbens tömege

230. ábra: Látszólagos adszorpció tömény oldatból

Az (a) görbét akkor kapjuk, ha az oldott anyag az egész koncentráció tartományban jobban adszorbeálódik, mint az oldószer. Az oldott anyag koncentrációjának növekedésével az oldott anyag adszorpciójának mértéke tovább nőhet, de az oldott anyagnak a látszólagos adszorpcióját ábrázoló görbe mindenképpen visszakanyarodik az E ponthoz, mivel a tisztán az oldott anyagból álló folyadékban az adszorpció hatására nem következik be koncentrációváltozás. Olyan esetekben, amikor az oldott anyag és az oldószer közel azonos mértékben adszorbeálódik, a viszonyokat a (b) görbéhez hasonló, S-alakú görbe ábrázolja. A C-től D-ig terjedő koncentráció tartományban az oldott anyag erősebben adszorbeálódik, mint az oldószer. A D pontban mindkét anyag adszorpciója egyenlő mértékű, a látszólagos adszorpció tehát nulla. A D-től E-ig terjedő koncentráció tartományban az oldószer jobban adszorbeálódik. Ilyen oldatokban az adszorbens hozzáadására az oldott anyag koncentrációja növekszik, és az oldott anyagra nézve a $V(c_0 - c^*)$ látszólagos adszorpció negatív érték lesz.

Lehetnek olyan adszorbensek, amelyek az egész koncentráció tartományban szelektíven adszorbeálják a rendszer valamelyik komponensét.

21.3. Adszorpció műveletek

Az adszorpció alkalmazási területei igen széleskörű a környezetvédelemben. Néhány a sokféle alkalmazás közül, például gőzök kinyerése gázokkal alkotott híg elegyükből, oldott anyag kinyerése és szennyezések eltávolítása oldatokból vagy gáz- és folyadékelegyek frakcionálása. A művelet kivitele lehet fokozatszerű és folytonos, és ugyanezek végezhetők szakaszosan, folyamatosan és félfolyamatosan. A tárgyalás anyagát akármelyik szempont szerint csoportosíthatjuk. A **10. táblázat** egy lehetséges felosztást adunk meg. Először két csoportra osztjuk a műveleteket aszerint, hogy az érintkezés fokozatszerű vagy folytonos. Mindkét csoportban vannak olyan műveletek, amelyek teljesen az előző fejezetekben már tárgyalt műveletek analógjai, így például ha egy gáz- vagy folyadékelegynek gyakorlatilag csak egyik komponense adszorbeálódik, a szétválasztás számítás szempontjából analóg a gázabszorpcióval, ahol az elegyhez adott oldhatatlan fázis az adszorbens, az abszorpció esetében pedig a folyadék (abszorbens). Ha a fluidum (gáz vagy folyadék) mindkét komponense jól adszorbeálódik, a szétválasztás frakcionálással végezhető. Ez a művelet analógnak tekinthető a folyadék extrakcióval, ahol a rendszerbe adagolt oldhatatlan adszorbens megfelel az extrakciónál használt oldószernek. Ezekkel az analógiákkal a tárgyalás sok tekintetben egyszerűsíthető.

10. táblázat: Adszorpció műveletek csoportosítása

Érintkezés módja	Kezelt fluidum	Erősen adszorbeált komponensek száma	Relatív adszorptivitás	Műveletek folyamatossága	
Fokozatszerű	Folyadékok	Egy	Nagy	Szakaszos és folyamatos	
Folytonos					
2.1. Állandósult állapotú (mozgó adszorbensréteg)	Gázok Folyadékok	Egy	Több	Nagy Kicsi	Folyamatos
Nem állandósult (nyugvó adszorbensrét.)	Gázok folyadékok	Egy	Több	Nagy Kicsi	Félfolyamatos

21.3.1. Fokozatszerű műveletek és berendezései

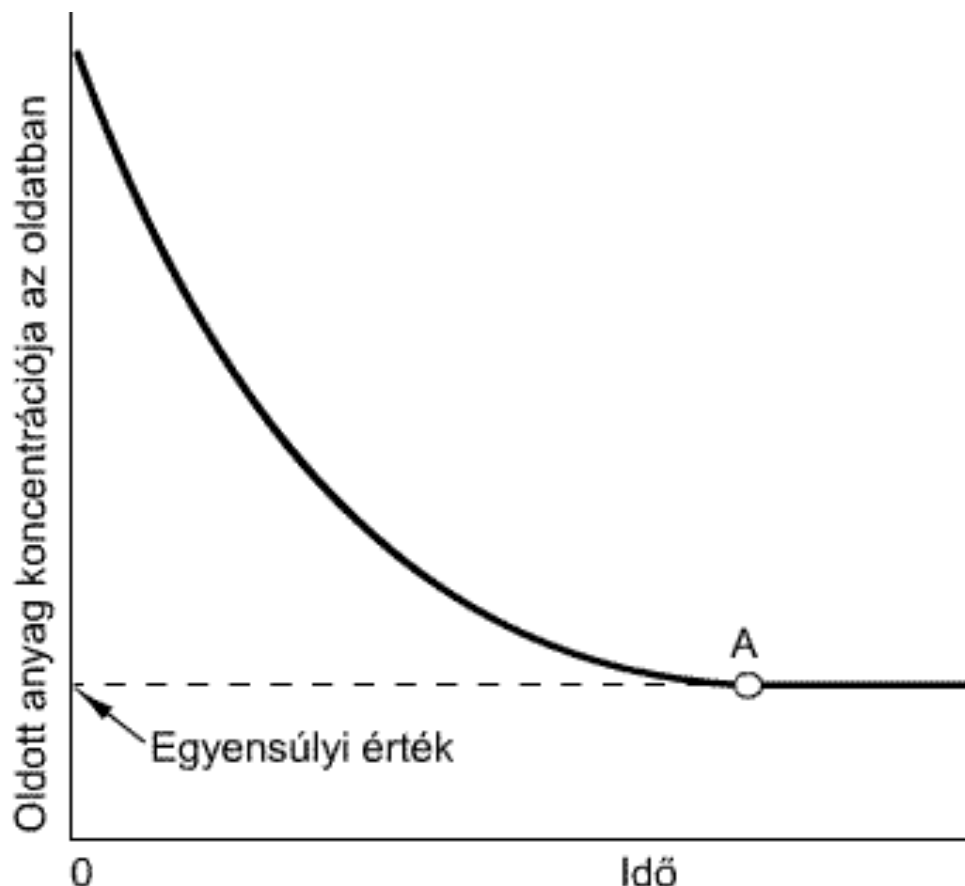
Az iparban a fokozatokból álló adszorpciót híg oldatoknál akkor alkalmazzák, amelyeknél az eltávolítandó oldott anyag az oldat többi alkotórészéhez viszonyítva erősen adszorbeálódik. A műveletet gyakran *kontakt (adszorpciós) szűrésnek* is nevezik. Jellegzetes művelet az értékes oldott anyagok kinyerése, vagy a nemkívánatos szennyeződések eltávolítása híg oldatokból. Ilyen lehet a jód kinyerése sós víz sűrítmenyéből aktív szénrel, miután a jódot oxidációval felszabadították sóiból, vagy inzulin kinyerése híg oldatokból.

Mivel az oldott anyag egyensúlyi megoszlása az adszorbens felé gyakran rendkívül előnyös, az adszorpció nagyon hatásos eszköz az utóbbi cél elérésére, és a fokozatszerű adszorpció legtöbb ipari alkalmazása ebbe a csoportba tartozik. Jellegzetes példa a vizes cukoroldatok derítése aktív szénrel tiszta termék előállítására és a kristályosítás elősegítése céljából. Hasonlóképpen gyakran alkalmazzák az aktív szenet ivóvíz szagtalanítására, és számos környezetvédelmi probléma megoldására.

Amint azt az előzőekben már megállapítottuk, az egyes fokozatokban a két, egymásban oldhatatlan fázist az egyensúly megfelelő megközelítéséhez szükséges ideig intenzív

érintkezésbe kell hozni, majd fizikai úton szét kell választani. Tehát itt is az érintkeztetés és szétválasztás felel meg egy fokozatnak, amit egy szuszpenzió keverésére alkalmas keverővel ellátott tartállyal és egy szűrőberendezéssel vagy egy üleptető berendezéssel tudjuk a legegyszerűbben szakaszos üzemmódban kivitelezni. Az üleptést elvégezhetjük magában a keverős tartályban is. A feladatok kivitelére használt készülékek a szerint különböznek, hogy mi a művelet célja. A szétválasztandó folyadékot és az adszorbenst a reakcióedényben a kívánt hőmérsékleten szükséges ideig alaposan összekeverjük, majd a zagyot leszűrjük, így az adszorbenst és adszorbtióanyagot a folyadéktól elkülönítjük. A berendezés többfokozatú művelet elvégzésére is alkalmas, ha szükséges számban további tartályokat és szűrőket építünk be. Ha a műveletet folyamatosan akarjuk végezni, akkor a szűrőprések helyett centrifugákat vagy folyamatos dobszűrőt alkalmazhatunk, vagy pedig nagy üleptető tartályban engedjük kiülepedni a nagyobb sűrűségű szilárd részecskéket.

Az adszorbens típusa a folyadéktól függ. Vizes oldatokat többnyire az elvégzendő feladatra alkalmas aktív szénnel kezelnek, szerves folyadékokat, például olajokat pedig rendszerint szervesetlen adszorbensekkel (például derítőfölddel). Néha kevert adszorbenst is használnak. Kívánatos, hogy az adszorbens nagy szelektivitást mutasson az eltávolítandó anyaggal szemben, mert így kevesebb adszorbensre van szükség. Az adszorbenst híg folyadék oldatoknál mindig igen finomra őrölt por alakjában alkalmazzák, az előírás legtöbbször az, hogy teljes egészében áthulljon a 200 mesh szitán, de gyakran még ennél is finomabbra kell őrölni.



231. ábra: Az egyensúly beállása szakaszos adszorpciónál

Az egyensúly gyakorlati beállításához szükséges idő főleg a szilárd anyag koncentrációjától és szemcseméretétől, a folyadék viszkozitásától és a keverés intenzitásától függ. A keverésnek intenzívnek kell lenni, hogy az adszorbens részecskék gyorsan érintkezhessenek az egész

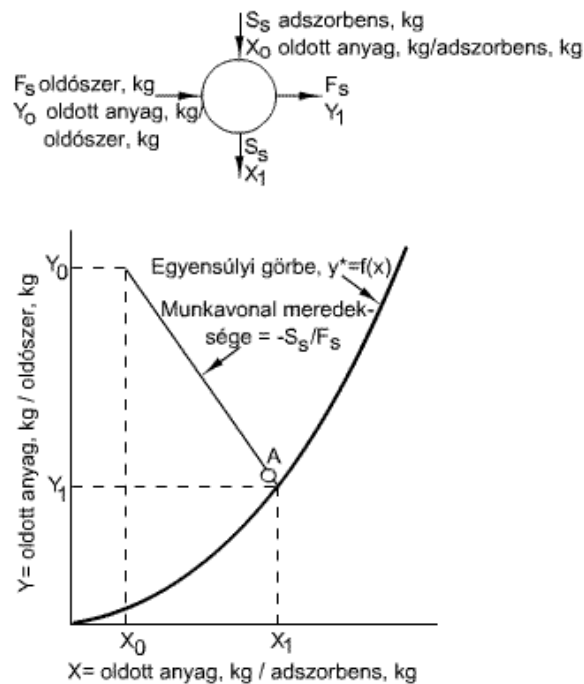
folyadékkal, az érintkezés pedig annál gyorsabb lesz, minél nagyobb koncentrációban van jelen az adszorbens. Az áramlás turbulens legyen, hogy az adszorbens részecskék a folyadék főtömegéhez viszonyítva elmozduljanak. A turbulenciát terelőlapok beépítésével lehet növelni.

Az örvényléssel párosult rotációs mozgás a részecskéket csak a folyadékkal együtt mozgatja, és így nem csökkeni az érintkezési időt. Ezen kívül az örvénylés által az oldatba bevitt levegőnek káros hatása is lehet, mert oxidálja az érzékeny szerves anyagokat. A nem adszorbeálódott oldott anyag maradék koncentrációja az oldatban rend szerint a **231. ábra** látható módon változik az időben. Kezdetben gyorsan csökken, és az egyensúlyi értéket aszimptotikusan éri el. A keverést a gyakorlatban az A időpontban hagyjuk abba, mert a további érintkeztetés alatt már csak jelentéktelen mennyiség adszorbeálódna. A szokásos idő a 10-30 perc. A szűrés alatt a keverést folytatni kell, nehogy a finomabb és durvább szemcsék szétüledjenek. A keverés alatt a hőmérséklet a megengedhető legmagasabb legyen, mert magas hőmérsékleten kisebb viszkozitású oldatban egyrészt gyorsult az oldott anyag diffúziója, másrészt az adszorbens részecskék könnyebben mozdulnak el a folyadékban. Az egyensúlyi adszorpció mértéke rendszerint valamivel kisebb magasabb hőmérsékleten, de ezt ellensúlyozza az egyensúly jobb megközelítése. A műveletet néha a folyadék forráspontján végzik, ha ez a jelenlevő anyagokra nem káros. Nyers kenőolajok derítőföldes kezeléséhez az olaj-adszorbens elegyet csöves hőcserélőben 125-150 C°-ra, sőt a nehezebb olajfrakciókat 300-350 C°-ra is elő szokták melegíteni. Ha az adszorbeálódó anyag illékony, akkor a hőmérséklet igen érzékenyen befolyásolja az egyensúlyi adszorpciót. Az ilyen anyagokkal közönséges hőmérsékleten ajánlatos dolgozni. Mivel az oldat mennyisége az adszorbeált anyaghoz viszonyítva rendszerint igen nagy, az adszorpció hő felszabadulása folytán előálló hőmérsékletemelkedés többnyire elhanyagolható.

Az adszorpció után az adszorbens feldolgozásának módja az adott rendszer tulajdonságaitól függ. A leszűrt iszapot rendszerint kimossák azért, hogy az iszapban ne maradjon vissza oldat, így viszonylag kevés adszorptívum távozik. Ha az adszorptívum a kívánt végtermék, akkor deszorbeálni kell az eredeti oldattól eltérő olyan folyadékkal, amelyben az adszorptívum jobban oldódik. Ezt úgy végzik, hogy az oldószerrel kimossák a szűrőben levő iszapot, vagy a szilárd anyagot diszpergálják az oldószerben. Ha az adszorptívum illékony, akkor úgy deszorbeálható, hogy csökkentjük az adszorbens parciális nyomását a szilárd anyag fölött, például gőznek vagy meleg levegőnek az adszorbensen való átfúvatásával. Ha az adszorbens aktív szén, ügyelni kell arra, hogy az átfúvatott levegő hőmérséklete ne legyen olyan magas, hogy a szén elégjen. A legtöbb színtelenítő (derítő) művelet esetében az adszorptívum értéktelen és nehezen deszorbeálható. Ilyenkor az adszorbensről az adszorptívumot leégetjük, majd az abszorbenst regeneráljuk. Rendszerint csak korlátozott számú regenerálást lehet végezni, mert ennek folyamán az adszorpció képesség csökken, végül az adszorbens kimerül és le kell cserélni.

21.3.1.1. *Egyfokozatú adszorpció*

A művelet szakaszosan és folyamatosan is végezhető. Folyamatábrája a **232. ábra** felső részén látható, a kör jelenti az egy fokozathoz tartozó összes készülékeket és berendezéseket. A művelet lényegében az egyfokozatú gázabszorpció vagy az egyfokozatú folyadék extrakció analógja.



232. ábra: Adszorpció ideális fokozatban

Mivel a felhasznált adszorbens mennyisége az oldat mennyiségéhez viszonyítva nagyon kicsi, és az eltávolítandó oldott anyag sokkal jobban adszorbeálódik rajta, mint a jelenlevő többi komponens, ezért az utóbbiak adszorpciója elhanyagolható. Az adszorbens nem oldódik az oldatban. A szétválasztandó oldat F_s (kg) tartalmazza a nem adszorbeálódó anyagot és az oldószert, melynek koncentrációja az adszorpció folyamán Y_0 -ról Y_1 -re csökken (kg oldott anyag/kg oldószer egységekben). A felhasznált adszorbens mennyisége S_s (kg) adszorptívumot nem tartalmazó szilárd anyag. Az adszorptívum koncentrációja X_0 -ról X_1 -re növekszik (kg adszorptívum/kg adszorbens egységekben). Friss adszorbens használata esetén $X_0 = 0$, folyamatos műveletnél F_s és S_s mennyiségét (kg/s)-ban értjük. A gyakorlatban előforduló híg oldatok esetén a felsorolt mennyiségeket más egységekben is kifejezhetjük. Ha az adszorbeált oldott anyag színes és koncentrációját önkényes egységekben fejezzük ki, az oldat koncentrációja megadható Y (színegység/kg oldat vagy m^3/kg oldat), az adszorbensen megkötött, adszorptívum koncentrációja pedig X (színegység/kg adszorbens) egységekben. Az oldatból eltávolított oldott anyag egyenlő az adszorbens által megkötött mennyiséggel

$$(7.5) \quad F_s(Y_0 - Y_1) = S_s(X_1 - X_0)$$

X - Y koordináta-rendszerben ez a munka vonal egyenes, amely átmegy az (X_0, Y_0) és az (X_1, Y_1) ponton, iránytangense pedig $(-S_s/F_s)$. Ha a fokozat ideális vagy elméleti fokozat, a kilépő anyagáramok egyensúlyban vannak, vagyis az (X_1, Y_1) pont az adszorpció izotermán fekszik. Ezt mutatja a **232. ábra** alsó diagramja. Az egyensúlyi görbe a művelet végének hőmérsékletéhez tartozó izoterma. Ha az érintkezési idő túl rövid, és egyensúly nem áll be, akkor a kilépő folyadék és adszorbens koncentrációja valamilyen A pontnak felel meg (**232. ábra**), de legtöbbször igen közel jutunk az egyensúlyhoz.

A (7.5) egyenlet feltételezi, hogy a szűrés vagy ülepítés után az adszorbensen mechanikusan megtapadó (de nem adszorbeált) folyadék mennyisége elhanyagolható. Ez a feltevés a legtöbb adszorpció műveletnél helytálló, minthogy a felhasznált szilárd anyag mennyisége nagyon kicsi a folyadék mennyiségéhez viszonyítva. Deszorpció esetén, ha a szilárd anyagon tapadó folyadék mennyisége elhanyagolható, szintén érvényes a (7.5) egyenlet, de ebben az esetben a **232. ábra** a munkavonal az egyensúlyi görbe alatt helyezkedik el. Ebben az esetben azonban

előfordul, hogy a szilárd anyagban visszamaradó folyadék mennyisége, az összes műveletben résztvevő folyadék mennyiségnek tekintélyes része. Ilyenkor a kilúgozásra leírt számítási módszert kell követni. Az itt tárgyalt adszorpció típusra is gyakran alkalmazható a Freundlich egyenlet, különös tekintettel arra, hogy az adszorbeálható oldott anyag koncentrációja rendszerint kicsi. Az egyenlet a használt koncentráció egységeivel

$$(7.6) \quad Y^* = mX^n$$

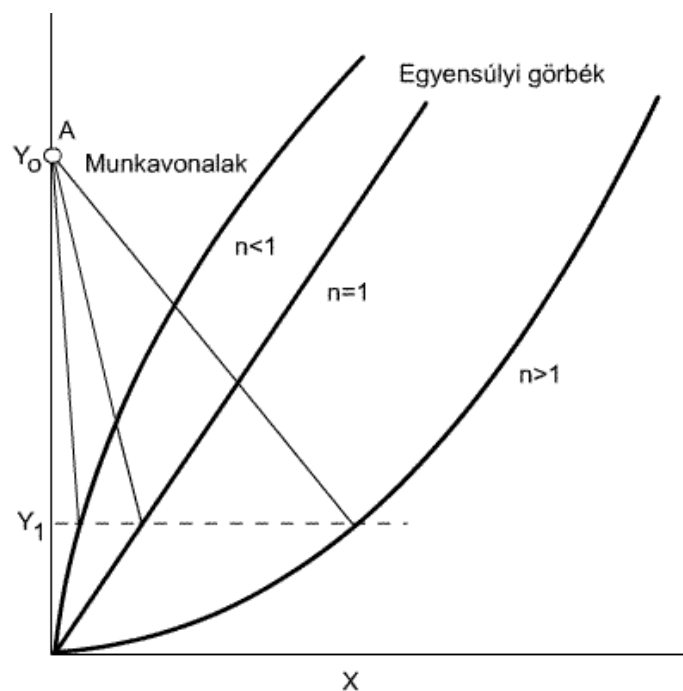
illetve a kilépő anyagáramok koncentrációk közötti összefüggés

$$(7.7) \quad X_1 = \left(\frac{Y_1}{m}\right)^{1/n}$$

Mivel az adszorbens kezdetben rendszerint nem tartalmaz adszorbívumot, ezért $X_0 = 0$, a (7.5) egyenletbe behelyettesítve

$$(7.8) \quad \frac{S_s}{F_s} = \frac{Y_0 - Y_1}{(Y_1/m)^{1/n}}$$

Ennek segítségével adott Y_0 - Y_1 koncentráció változásához kiszámítható az adszorbens/oldat arány. Vizsgáljuk meg a **233. ábra**. Ezen három tipikus Freundlich izotermát mutatunk be. Ha $n = 1$, az izoterma egyenes, ha $n > 1$, lefelé domború, ha $n < 1$, felfelé domború. Az oldott anyag koncentrációjának az oldatban, mindhárom esetben Y_0 -ról Y_1 -re kell csökkenteni.

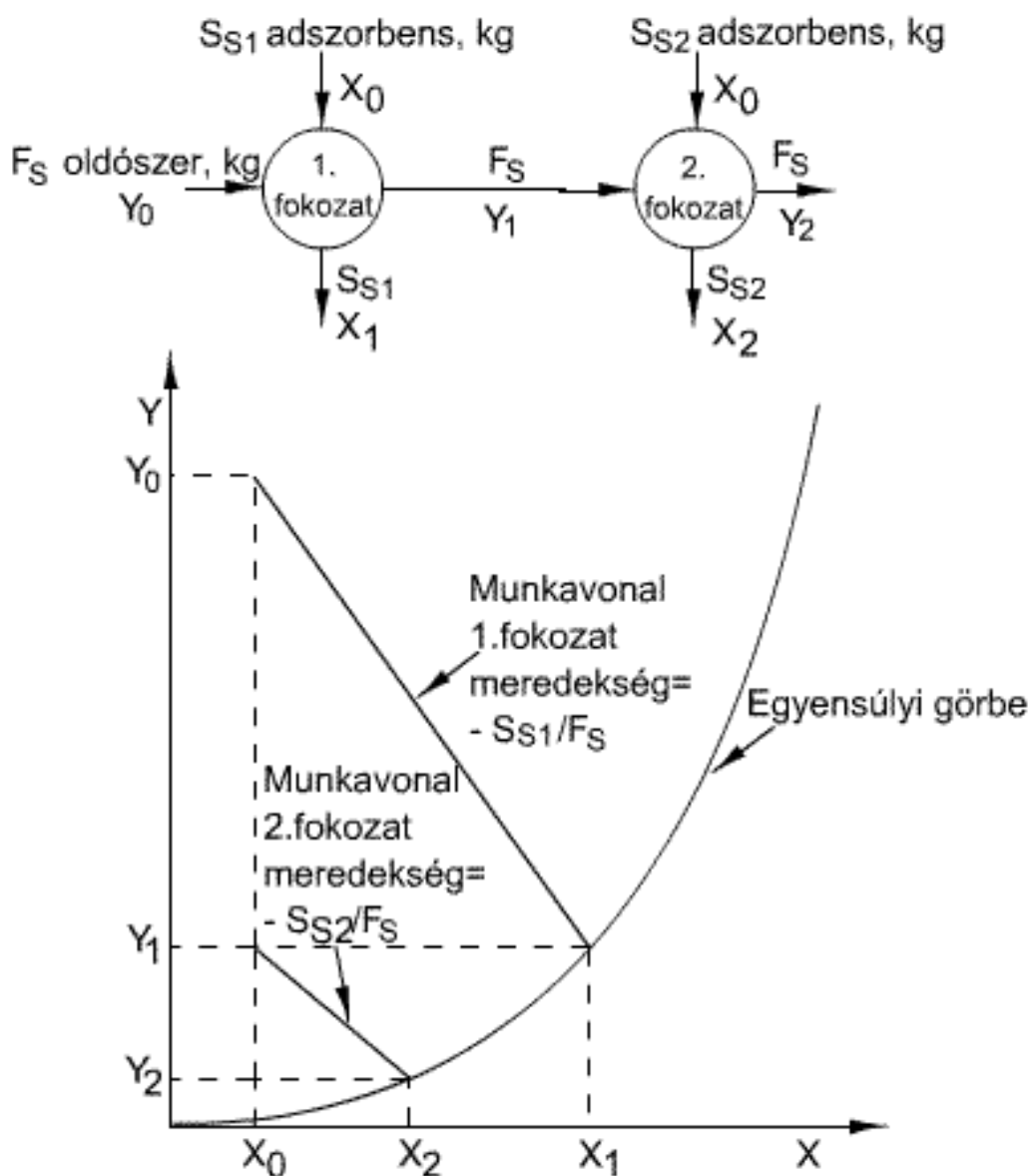


233. ábra: Egyfokozatú adszorpció a Freundlich izotermákkal

A három munkavonal az A pontból indul ki. A munkavonal iránytangense mindhárom esetben arányos az adszorbens/oldat viszonyal. Általánosságban megállapították, hogy ha n értéke 2 és 10 között van, az adszorpció jól, ha 1 és 2 között, közepesen, ha 1 alatt van, nehezen végezhető el. Az utóbbi esetben ugyanis gyakorlati szempontból túl nagy mennyiségű adszorbens lenne szükséges az oldott anyag bizonyos mértékű kinyeréséhez.

21.3.1.2. Többfokozatú keresztáramú adszorpció

Adott mennyiségű oldott anyagot az adszorbens-felhasználás szempontjából gazdaságosabban lehet eltávolítani, ha az adszorbenst nem egyetlen fokozatban, hanem több részletben adjuk az oldathoz, és az egyes fokozatok között szűrünk. Ezt a műveletet rendszerint szakaszosan végzik, bár folyamatosan is megvalósítható. Az adszorbens megtakarítás különösen fontos szempont, ha az adszorber drága. A adszorbens felhasználás annál kisebb, minél több fokozatban dolgozunk, de ez egyúttal növeli a szűrés és egyéb kezelés költségeit is. Ezért kettőnél több fokozat alkalmazása ritkán gazdaságos. Egyes esetekben az adszorpció irreverzibilis, ekkor az egyes adszorbens adagok hozzáadása között nem kell szűrni, ami csökkenti az üzemeltetési költségeket. Ilyen eset azonban csak ritkán fordul elő. Ha közönséges reverzibilis folyamatban is megtakarítjuk a közbelső szűrést, az eredmény ugyanaz lesz, mintha az egész adszorbens mennyiséget egy fokozatban adagoltuk volna. Jellegzetes két elméleti fokozatból álló művelet folyamata és diagramja a **234. ábra** látható.



234. ábra: Kétfokozatú keresztáramú adszorpció

Mind a két fokozatban ugyanazon oldatmennyiséget kezeljük először S_{S1} majd a második fokozatban S_{S2} kg adszorbenssel. A művelet eredményeképpen az oldatban az oldott anyag koncentrációja Y_0 -ról Y_2 -re csökken. Az 1. és 2. fokozat anyagmérlege

$$(7.9) \quad F_S(Y_0 - Y_1) = S_{S1}(X_1 - X_0)$$

$$(7.10) \quad F_S(Y_1 - Y_2) = S_{S2}(X_2 - X_0)$$

Ezek az ábrán látható munkavonalak egyenletei. A munkavonalak iránytangense megfelel az illető fokozatban felhasznált adszorbens mennyiségének. A szerkesztés kiterjesztése több fokozatra nyilvánvaló. Ha az egyes fokozatokban felhasznált adszorbens mennyiség ugyanakkora, a diagramon a munkavonalak egymással párhuzamosak lesznek. Ha feltételül szabjuk, hogy az összes adszorbens felhasználás minimális legyen, akkor az egyes fokozatokban az adszorbens adagolása nem lehet egyenletes, kivéve azt az esetet, ahol az egyensúlyi izoterma egyenes. Általános esetben a minimális adszorbens szükséglet, iterálással határozható meg. Ha a Freundlich (7.4) egyenlet kielégítően írja le az adszorpciós izotermát és mindegyik fokozatban friss adszorbenst használunk ($X_0 = 0$), akkor két fokozat esetén a minimális összes adszorbens szükségletet közvetlenül meghatározhatjuk. Az 1. és 2. fokozatra

$$(7.11) \quad \frac{S_{S1}}{F_S} = \frac{Y_0 - Y_1}{(Y_1/m)^{1/n}}$$

$$(7.12) \quad \frac{S_{S2}}{F_S} = \frac{Y_1 - Y_2}{(Y_2/m)^{1/n}}$$

Az összes fajlagos adszorbens felhasználás

$$(7.13) \quad \frac{S_{S1} + S_{S2}}{F_S} = m^{1/n} \left(\frac{Y_0 - Y_1}{Y_1^{1/n}} + \frac{Y_1 - Y_2}{Y_2^{1/n}} \right)$$

Ha az összes fajlagos felhasználás minimális, akkor

$$(7.14) \quad \frac{d[(S_{S1} + S_{S2})/F_S]}{dY_1} = 0$$

Mivel adott esetben m , n , Y_0 és Y_2 állandók, ezért ebből az következik, hogy

$$(7.15) \quad \left(\frac{Y_1}{Y_2} \right)^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} \frac{Y_0}{Y_1} = 1 - \frac{1}{n}$$

A (7.15) egyenletből kiszámíthatjuk a közbenső Y_1 koncentrációt, az adszorbeált mennyiségeket pedig a (7.12) és a (7.13) egyenletekből kapjuk. A (7.15) egyenletet valamilyen iterációs módszerrel lehet megoldani.

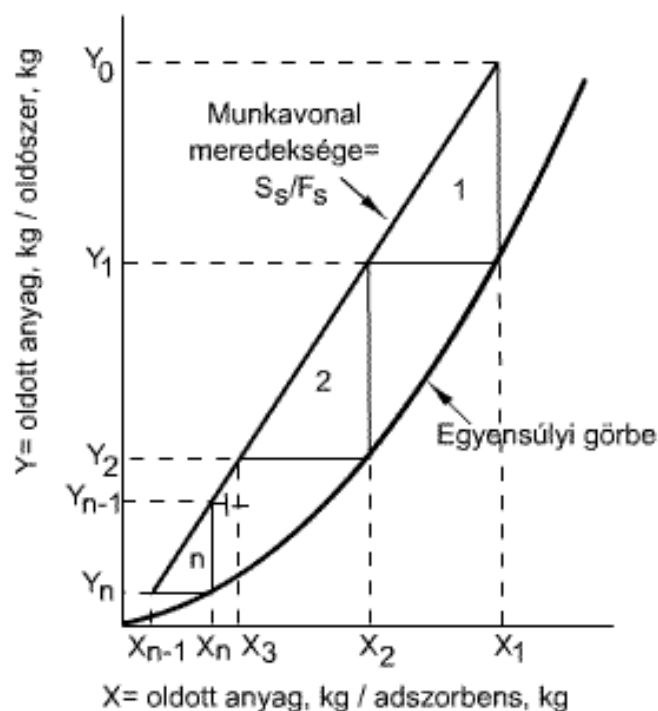
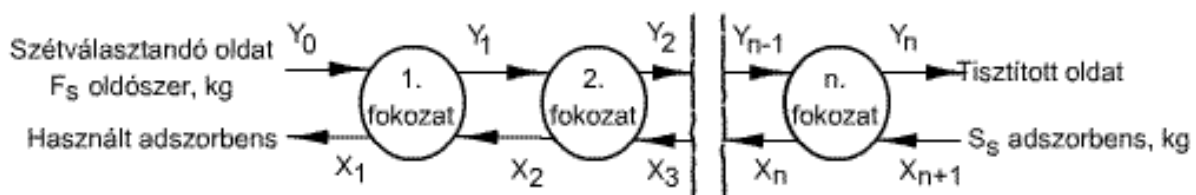
21.3.1.3. Többfokozatú ellenáramú adszorpció

Ellenáramú művelettel még nagyobb adszorbens megtakarítást érhetünk el. Az n fokozatú művelet folyamatábrája és diagramja **235. ábra** látható. A rendszerbe belépő adszorbens kezdeti adszorbptívum koncentráció X_{n+1} . Az oldott anyag mérlegegyenlete az n fokozatú berendezésre

$$(7.16) \quad F_S(Y_0 - Y_n) = S_S(X_1 - X_{n+1})$$

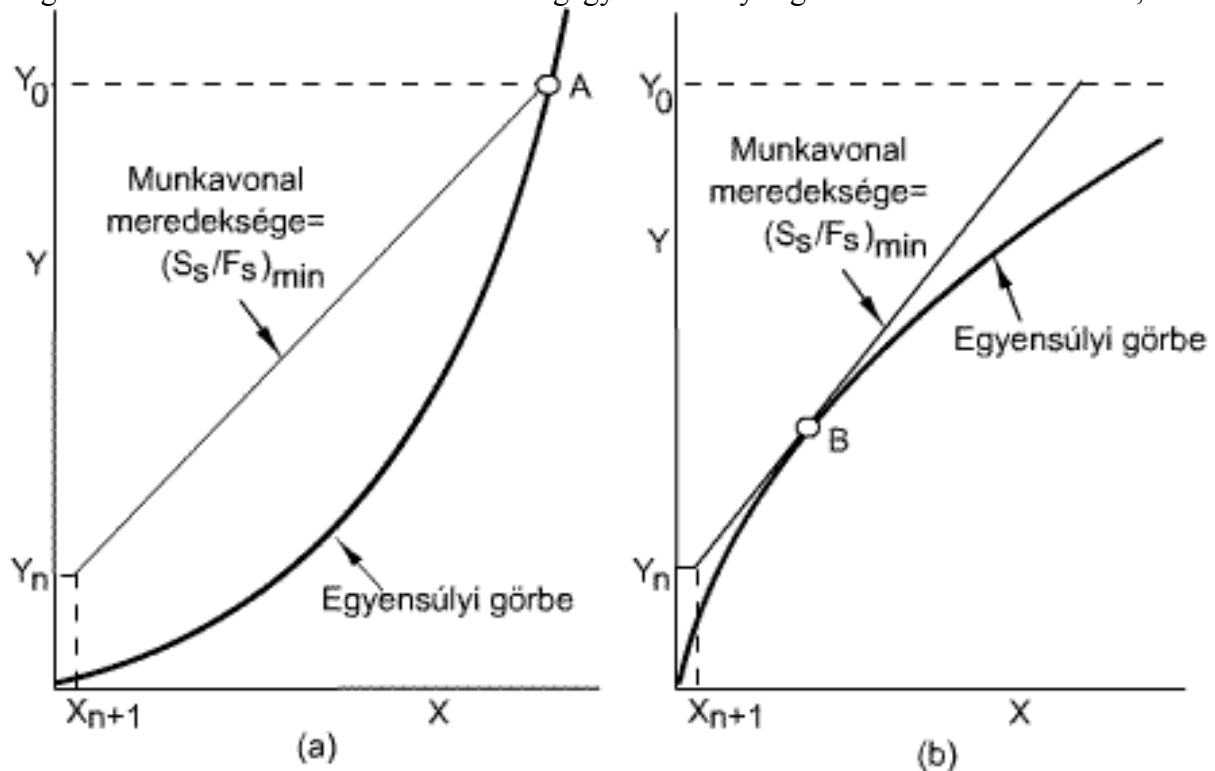
A munkavonal átmegey a határkoncentrációkat jelentő (X_{n+1}, Y_n) és (X_1, Y_0) pontokon, iránytangense pedig S_S/F_S . Az elméleti fokozatok számát a szokásos módon, az egyensúlyi görbe és a munkavonal közé rajzolható lépcsők számával nyerjük. Adott fokozatszám esetén viszont a szükséges adszorbens/oldat arányt a munka vonal iterációs elhelyezésével kapjuk meg. *Deszorpció* esetén (ami a gáz-folyadék rendszerekkel végzett műveletek közül a kigőzölésnek felel meg), a munkavonal az egyensúlyi görbe alatt helyezkedik el.

Az a legkisebb adszorbens/oldat viszony, amellyel az adott koncentrációváltozás csak végtelen sok fokozatban érhető el, a minimális adszorbensarány. Ez az egyensúlyi görbét még az adott koncentrációtartományban metsző legkisebb iránytangensű munkavonalnak felel meg. Ha az egyensúlyi izoterma egyenes vagy felfelé homorú, mint a **236. ábra**, a metszéspont és a fokozatok sűrűsödése a rendszer nagyobb koncentrációjú végén van (az ábrán az A pontban). Ha az izoterma lefelé homorú, mint a **236. ábra**, a sűrűsödési hely egy érintési pont közelében jön létre, az ábrán például a B pontban, ha Y_0 elég nagy. A helyzet a gázabszorpciónál megismert viszonyokhoz hasonló.



235. ábra: Többfokozatú ellenáramú adszorpció.

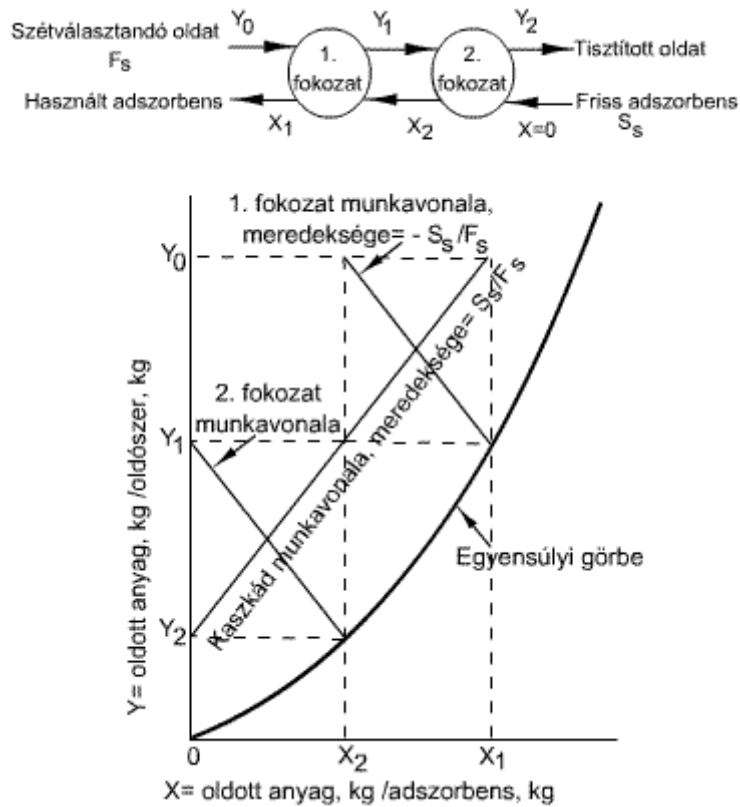
A fokozatok számának növelésével az adszorbens szükséglet először rohamosan csökken, de a minimális értéket aszimptotikusan közelíti meg. A gyakorlatban, mivel a fokozatok között a szilárd anyagot ki kell szűrni a folyadékból, ritkán gazdaságos kettőnél több fokozattal dolgozni. Bár a műveletet elvileg folyamatosan kellene végezni, a valóságban rendszerint szakaszosan dolgoznak, mégpedig úgy, hogy az oldat egy részletét már egyszer használt adszorbenssel kezelik, majd szűrés után az adszorbenst vagy regenerálják, vagy megsemmisítik. A szűrletet az előzővel megegyező mennyiségű friss oldószerrel kezelik,



236. ábra: Kétfokozatú ellenáramú adszorpció

ennek eredményeképpen nyerik a végső oldatot és a következő adag friss oldathoz az egyszer használt adszorbenst. Több ciklus befejezése után (felfutási periódus) a viszonyok éppen olyanok lesznek, mint a valódi folyamatos művelet esetén, az eredményes alkalmazásnak azonban feltétele, hogy az egyes anyagáramok mennyisége és koncentrációja az egyes ciklusok folyamán a megfelelő fokozatokban azonos legyen.

Kis anyagmennyiségek esetén a feldolgozandó oldat mennyisége az egyes adagokban jelentősen különbözhet. Ezen kívül az egyes adagok feldolgozása között hosszabb idő telhet el, emiatt a részben felhasznált adszorbenst tárolni kell az egyes fokozatok között. Főként az aktív szén, jelentős mértékben károsodhat a tárolás közben oxidáció, az adszorptívum polimerizációja vagy egyéb kémiai változás miatt. Ilyen esetekben célszerűbb keresztáramot alkalmazni. Az adszorbens szükségletet analitikusan is meghatározható, ha az egyensúlyi görbét kielégítő pontossággal le lehet írni algebrai egyenlettel. Gyakran használható itt is a (7.4) *Freundlich* egyenlet. Az utolsó fokozatba rendszerint friss adszorbenst vezetnek be ($X_{n+1} = 0$). Egy jellegzetes ellenáramú kétfokozatú kaszkádot a **237. ábra** mutatunk be.



237. ábra: Kétfokozatú ellenáramú adszorpció

Anyagmérlege az oldott anyagra

$$(7.17) \quad S_s(X_1 - 0) = F_s(Y_0 - Y_2)$$

Alkalmazva a (7.6) egyenletet az első fokozatból kilépő anyagra

$$(7.18) \quad X_1 = \left(\frac{Y_1}{m}\right)^{1/n}$$

A (7.17) és (7.18) egyenletekből

$$(7.19) \quad \frac{S_s}{F_s} = \frac{Y_0 - Y_2}{(Y_1/m)^{1/n}}$$

A második elméleti fokozat munkavonala, a **237. ábra** látható egyenlete

$$(7.20) \quad F_s(Y_1 - Y_2) = S_s X_2 = S \left(\frac{Y_2}{m}\right)^{1/n}$$

Fejezzük ki a (7.20) és egyenletből az S_s/F_s -t, és tegyük egyenlővé a (7.19) egyenlettel, eredményül kapjuk:

$$(7.21) \frac{Y_0}{Y_2} - 1 = \left(\frac{Y_1}{Y_2} \right)^n \left(\frac{Y_1}{Y_2} - 1 \right)$$

A (7.21) egyenlet adott Y_0 és Y_2 végkoncentrációk esetén megoldható az Y_1 közbenső koncentrációra, és ezzel kiszámítható S_S/F_S a (7.19) egyenletből. Az adszorbens megtakarítás, az egyfokozatú művelethez viszonyítva annál nagyobb, minél nagyobb az n értéke.

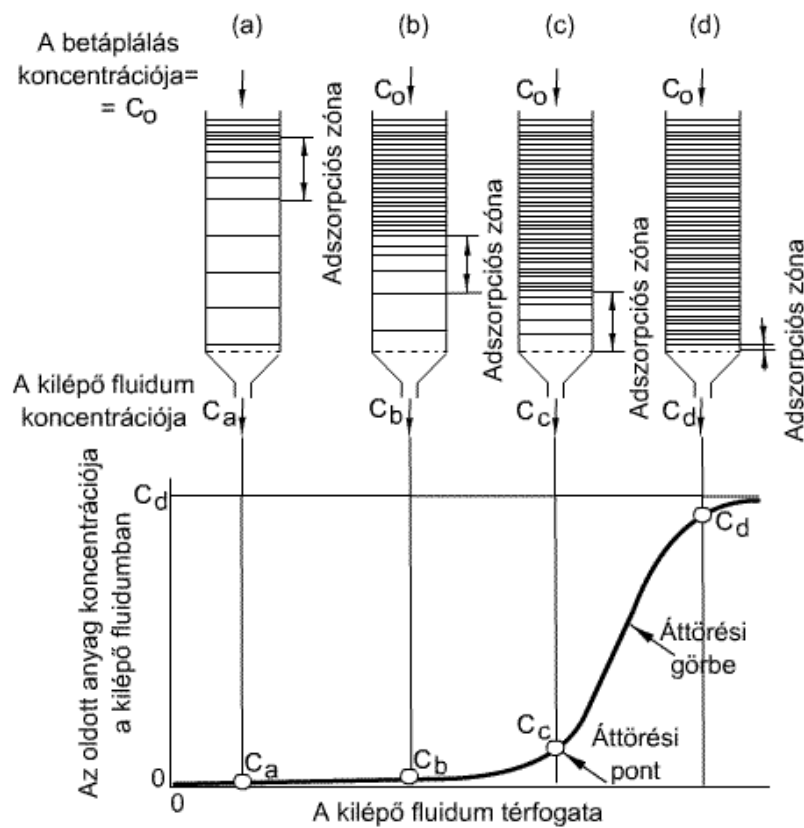
21.3.2. Folytonos, nem állandósult állapotú, nyugvóréteges adszorpció

Folyamatos érintkeztetésű műveleteknél a fluidum és az adszorbens az egész berendezésben folytonosan érintkezik, a fázisok időnkénti szétválasztása nélkül. A művelet elvégezhető szigorúan folytonosan, állandósult állapotban. Erre jellemző, hogy a szilárd anyag és a fluidum is áramlik. Mivel a szilárd részecskék folyamatos szállítása, amely az állandósult állapotú műveleteknél szükséges, kényelmetlen és viszonylag drága, ezért gyakran gazdaságosabb a szétválasztandó fluidum elegyet nyugvó adszorbens rétegen átáramoltatni. Amint növekszik az ilyen nyugvó rétegen átáramoltatott fluidum mennyisége, az adszorbensen megkötött oldott anyag mennyisége is nő, tehát a viszonyok nem állandósultak. Ez az adszorpciós módszer nagyon elterjedt a környezetvédelemben, és egymástól nagyon különböző területeken alkalmazzák. Így a veszélyes és/vagy értékes oldószergőzőket nyerhetünk ki levegőből, gázokból, aminek igen nagy szerepe van a levegő tisztaságvédelem területén is. Használják ezt az eljárást gázalarcokban a levegő tisztítására, továbbá gázok és folyadékok vízmentesítésére, ásványi és növényi olajok derítésére, oldatokból az értékes oldott anyagok feldúsítására és még sok más helyen.

21.3.2.1. Adszorpciós hullám

Vizsgáljuk meg egy kétkomponensű gázelegyet vagy kétkomponensű folyadék oldatot, amelynek egyik komponense jól adszorbeálódik. A jól adszorbeálódó komponens koncentrációja legyen C_0 . A fluidumot folyamatosan engedjük átfolyni egy viszonylag magas, eredetileg adszorptívumot nem tartalmazó adszorbens rétegen. Az adszorbens réteg legfelső része, amely a belépő tömény oldattal érintkezik, az oldott anyagot kezdetben gyorsan és erősen megköti, és ami kevés oldott anyag még visszamarad az oldatban, az gyakorlatilag teljesen adszorbeálódik a lejjebb elhelyezkedő adszorbens rétegeken. Az adszorbens aljáról távozó fluidum gyakorlatilag nem tartalmaz oldott anyagot, amint azt a **238. ábra** a C_0 helyen láthatjuk. Az adszorptívum eloszlását az adszorbens rétegben az ábra felső részén levő vázlaton mutatjuk be. A vízszintes vonalak viszonylagos sűrűsége jelenti az adszorptívum relatív koncentrációját. Az adszorbens legfelső rétege gyakorlatilag telített, az adszorpció legnagyobb része pedig egy viszonylag rövid adszorpciós zónában zajlik le, amelyben az adszorbens koncentrációja gyorsan változik. Mialatt az oldat tovább áramlik felülről lefelé, az adszorpciós zóna is felülről lefelé halad, mint egy hullám, és haladási sebessége rendszerint sokkal kisebb, mint a fluidum sebessége. Egy későbbi időpontban, amelyet az ábrán a b-vel jelölt vázlat mutat, az adszorbens rétegnek körülbelül a fele már telítődött az oldott anyaggal, de a kilépő fluidum C_b koncentrációja gyakorlatilag még mindig nulla. A (c) ábrával jelzett időpillanatban az adszorpciós zóna elérte az adszorbens oszlop alját, és a kilépő fluidumban az oldott anyag koncentrációja hirtelen mérhető C_c értékre ugrott. Azt mondjuk, hogy a rendszer elérte az úgynevezett *áttörési pontot*. A kilépő fluidum oldott anyag tartalma most már gyorsan nő, amíg az adszorpciós zóna áthalad az adszorbens oszlop alján, és a (d)-nél ábrázolt időpillanatban már gyakorlatilag elérte a kezdeti C_0 koncentrációt. A kilépő fluidum koncentráció görbéjének c és d közötti szakaszát *áttörési szakasznak* nevezzük. Ha az oldatot tovább áramoltatjuk az

adszorbensen keresztül, a bekövetkező adszorpció már csekély, mert az adszorbens gyakorlatilag teljes egészében egyensúlyban van a belépő folyadékkal.

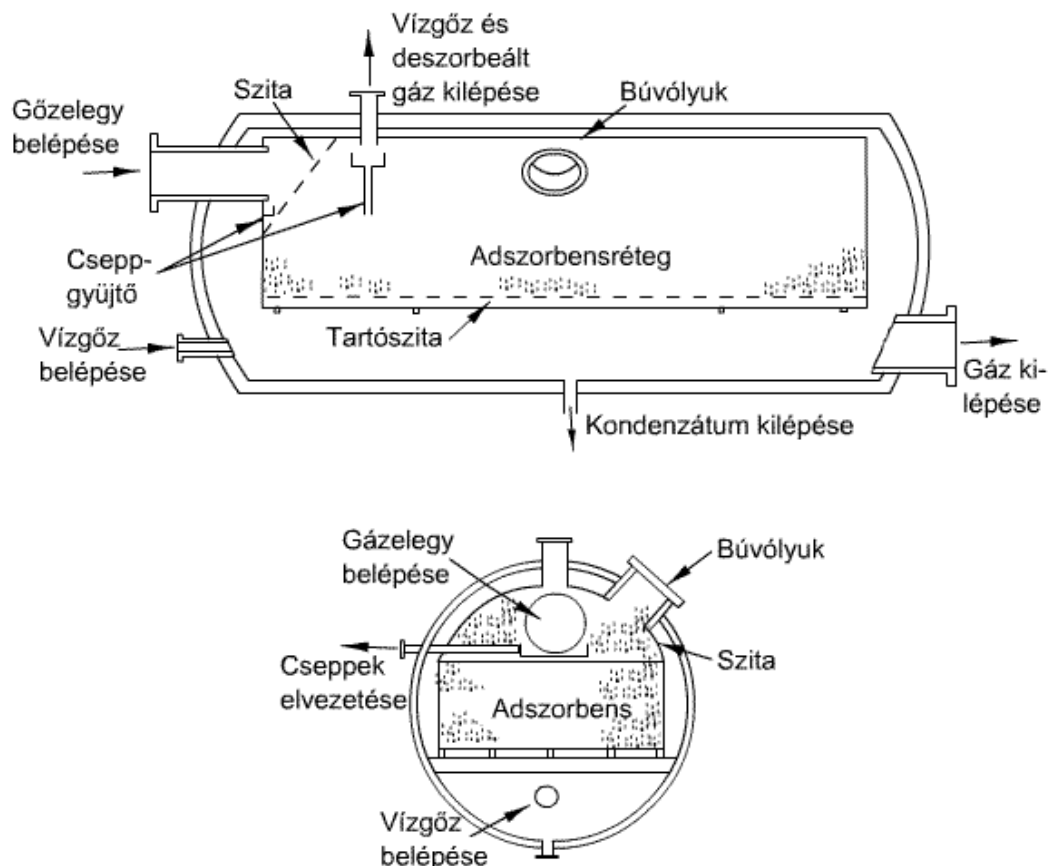


238. ábra: Az adszorpció hullám

Ha ugyanezzel a módszerrel gőzt adszorbeáltatunk egy gázelegetből adiabatikus módon, a felszabaduló adszorpció hő hatására egy hőmérséklet hullám halad végig az adszorbens oszlopon, bizonyos mértékig az adszorpció hullámhoz hasonlóan, és az adszorbens hőmérsékletének emelkedése a fluidum kilépés helyén gyakran használható az áttörési pont jelzésére. Folyadékok adszorpciója esetén a hőmérséklet emelkedése rendszerint kicsi. Az áttörési szakasz alakja és a megjelenéséhez szükséges idő nagymértékben megszabja a nyugvó réteges adszorber üzemeltetésének módját. A görbék többnyire S-alakúak, lehetnek meredekebbek vagy laposabbak, bizonyos esetekben lehetnek torzultak is. Ha az adszorpció folyamat végtelenül gyors volna, a **238. ábra** alján látható áttörési görbe függőleges egyenes lenne. Az adszorpció folyamat sebessége és mechanizmusa, az adszorpció egyensúly jellegzetessége, a fluidum áramlási sebessége, a betáplált oldatban az oldott anyag koncentrációja és különösen, ha a betáplált fluidum tömény, az adszorbens réteg magassága, mind befolyásolják egy adott rendszer áttörési görbéjének alakját. Az áttörési pont egyes esetekben nagyon határozott, máskor meg elmosódott. Az áttörési idő általában csökken, ha csökkenjük az adszorbens réteg magasságát, növeljük az adszorbens szemcseméretét, növeljük a folyadékáramlási sebességét, és növeljük a betáplált anyag töménységét. Van egy kritikus minimális adszorbens rétegmagasság, amelytől kisebb rétegmagasság esetén, a kilépő fluidum megjelenésétől kezdve hirtelen nő az oldott anyag koncentrációja. Új berendezések üzemeltetésekor célszerű az adott rendszer áttörési pontjának és áttörési görbéjének kísérleti meghatározása az üzemihez hasonló körülmények között.

21.3.2.2. Gőzök adszorpciója

A nyugvóréteges adszorberek egyik legfontosabb alkalmazása az oldószer gőzök levegőbe való kijutásának megakadályozása és az értékes oldószer-gőzök visszanyerése. Oldószerekkel, például alkohollal, acetonnal, széndiszulfiddal, benzollal telített szilárd anyagokat az oldószernek levegőáramba való elpárologtatásával szárítanak, az oldószer-gőzt pedig visszanyerik, ha a keletkezett gőz-gáz elegyet aktív-szén adszorbensen áramoltatják át. Az aktív-szeneknek ezekkel a gőzökkel szemben mutatott adszorpciós képessége rendkívül előnyös, úgyhogy a gőz kinyerése gyakorlatilag teljes, 99—99,8%-os a híg, 0,5—0,05 tf.% gőzt tartalmazó gázelegyekből is. Így jóval a robbanási határ összetétele alatt dolgozhatunk és a környezetet sem szennyezzük. A legtöbb ilyen típusú adszorpciós üzemben célszerű az energiaköltségek csökkentésére kis nyomásesésű adszorbens réteggel dolgozni. Ezért inkább szemcsés, mint por alakú adszorbentst használnak. Az adszorbens réteg viszonylag alacsony (30—90 cm) és nagy keresztmetszetű. A gázáramlási sebessége 0,25—0,55 m/s körül van. Jellegzetes adszorpciós készüléket mutatunk be a **239. ábra**.



239. ábra: Adszorber az oldószer-gőzök visszanyerésére

A gőz-gáz elegyet szükség esetén 30-35 C°-ra hűtik, és eltávolítják belőle azokat a porszemcséket, amelyek az adszorbens réteget eltömíthetnék. Ha az áttörési görbe meredek, a kilépő levegőt, amely gyakorlatilag gőzmentes, ki lehet engedni a szabadba, egészen addig, amíg az áttörési pontot el nem érjük. Ekkor a belépő gőzáramot második adszorberbe vezetik, az elsőt pedig regenerálják. Ha az áttörési görbe olyan lapos, hogy az áttörési pontban az adszorbens tekintélyes része még nincs telítve adszorptívummal, akkor az első adszorbert sorbakapcsolják egy második adszorberrel, és a gázt mindkettőn átáramoltatják, egészen addig, amíg az első adszorberben levő adszorbens gyakorlatilag teljesen nem telítődik. Ekkor a belépő

gázelegyet a sorbakapcsolt második és harmadik adszorberen áramoltatják át, az első adszorbert pedig regenerálják.

A gáz bevezetésének megszüntetése után az aktívszenet rendszerint kisnyomású vízgőz átfúvatásával regenerálják. A gőz átfúvása közben csökken az adszorbens fölött az oldószer gőz parciális nyomása, és a vízgőz kondenzációja szolgáltatja a deszorpcióhoz szükséges hőmennyiséget. A kilépő vízgőz-oldószergőz elegyet kondenzálják, és ha az oldószer vízben oldhatatlan, dekantálással, ha oldható rektifikálással nyerik ki a keletkezett vizes oldatból. A deszorpció befejezésekor az aktívszen adszorbeált vízzel van telítve. Ezt a vizet az oldószergőz-gáz elegy bevezetésekor az oldószergőzök kiszorítják, az adszorpció közben felszabaduló hőmennyiség a víznek a levegőbe való elpárologtatására használdik fel, így az adszorbens hőmérséklete alacsony értéken tartható. Ha a nedvesség jelenléte az oldószergőz adszorpcióját zavarja, akkor az oldószergőz bevezetése előtt az adszorbenst forró levegővel kiszárítják, majd hideg levegővel lehűtik.

Nedves gázok víztartalmát aktivált szilikagélen, timföldön vagy bauxiton átáramoltatva lehet eltávolítani. Erre a célra közepes magasságú adszorbens oszlopot szoktak használni, főleg ha a gáz nyomása elég nagy, mert az előálló nyomásesés ilyenkor csak töredéke az összes nyomásnak. Az adszorbenst tartalmazó oszlopok körülbelül 10 m magasak. Ilyen esetekben több adszorbenst tartó tálcát kell beszerezni egymástól 1-1,5 m távolságban, hogy a nyomásesés hatására az adszorbens réteg kevésbé nyomódjon össze. Miután az adszorbens gyakorlatilag elérte a maximális nedvességtartalmat az adszorbenst hőközléssel regenerálni kell. Ezt úgy oldják meg, hogy az adszorbensbe ágyazott csőkiyókon keresztül vízgőzt, vagy forró levegőt áramoltatnak, vagy, forró gáz fúvatnak a rendszerbe. Gazolin, petróleum és más hasonló folyadékok is vízteleníthetők aktivált timföldön átáramoltatva. Az adszorbens túlhevített (230 °C-os) vízgőzzel, majd gőzszugár injektorral előállított vákuum alkalmazásával regenerálható.

21.3.2.3. Folyadékok adszorpciója, perkolálás

A folyadékok vízmentesítését nyugvó adszorbens rétegen, ásványolaj termékek, mint kenőolajok, transzformátorolajok, valamint növényolajok derítését is rendszerint derítőföldes perkolálással végzik. A cukoroldatokat csontszenes perkolálással hamu mentesítik és színtelenítik. Ezen kívül még sok folyadékkal végzett műveletben használják ezt a félfolyamatos módszert. Ebben a műveletben az adszorbensréteget *szűrőnek* nevezik. Az adszorbenst domború vagy kónikus fenekű álló hengeres tartályban helyezik el, a tartály átmérője eléri a 5 m-t, magassága pedig a 10 m-t. Derítőföld esetén az adszorbens réteg 50 tonna adszorbenst is tartalmazhat. A szemcsés adszorbenst szita vagy lyuggatott lemezzel alátámasztott szövet tartja. A folyadék rendszerint felülről lefelé áramlik a nehézségi erő vagy felülről alkalmazott nyomás hatására. A művelet kezdetén a folyadékot egy ideig állni hagyják az adszorbensen, hogy a folyadék kiszoríthassa az adszorbens részecskéi közül a levegőt a perkolálás megkezdése előtt. Színtelenítő műveleteknél az első kilépő folyadékban a szennyezés koncentrációja az előírtnál rendszerint sokkal kisebb, az áttörési görbe pedig többnyire lapos. Ezért úgy szoktak eljárni, hogy a kilépő folyadékot a szűrő alatt gyűjtő tartályban addig gyűjtik, amíg az összegyűlt folyadék eléri a maximálisan megengedett szennyezés tartalmát. Ez alatt az idő alatt az adszorbens a lehető legnagyobb mértékben telítődik az adszorptívummal. Ha az adszorbens reaktiválásra szorul, a folyadék áramlását megszüntetik, és a szűrőn levő folyadékot leengedik. Ezután az adszorbens megfelelő oldószerrel kimosható, például cukorfinomító szűrők esetén vízzel, ásványolajtermékek esetén benzinnel. Szükség esetén ezután az oldószer vízgőzzel való átfúvatással eltávolítják, majd az adszorbenst a szűrőből kiszedik. Az adszorbens minőségétől függően hevítéssel vagy más alkalmas eljárással reaktiválják.

21.3.2.4. *Ipari kromatográfia.*

Vizsgáljunk most egy olyan oldatot, amely két oldott anyagot tartalmaz, és ezt a két anyagot akarjuk szétválasztani. Ha ennek az oldatnak egy kis részletével egy megfelelő adszorbenssel töltött magas adszorbens oszlopot perkolálunk, mindkét oldott anyag adszorbeálódik az oszlop tetején, az oszlop alsóbb rétegei pedig gyakorlatilag adszorptívummentesek maradnak. Az oszlopból kilépő oldat gyakorlatilag egyik oldott anyagot sem tartalmazza. Ha most friss oldószerrel, (eluenssel) akár az eredeti oldat oldószerével, akár más alkalmas folyadékkal perkoláljuk az adszorbenst, a gyengébben adszorbeálódott oldott anyag deszorbeálódik az oszlop legfelső rétegéből. Az alsó rétegekben elhelyezkedő, még telítetlen adszorbensen azonban ismét megkötődik. A két eredeti anyag tehát szétvált két adszorpciós sávra, és külön-külön visszanyerhető, ha az anyagokat az eredeti friss oldószerrel vagy alkalmas eluenssel egymás után kimossuk az oszlopból. Ezt a módszert igen jelentős analitikai eljárásokon kívül fontos ipari műveletekben is alkalmazzák.

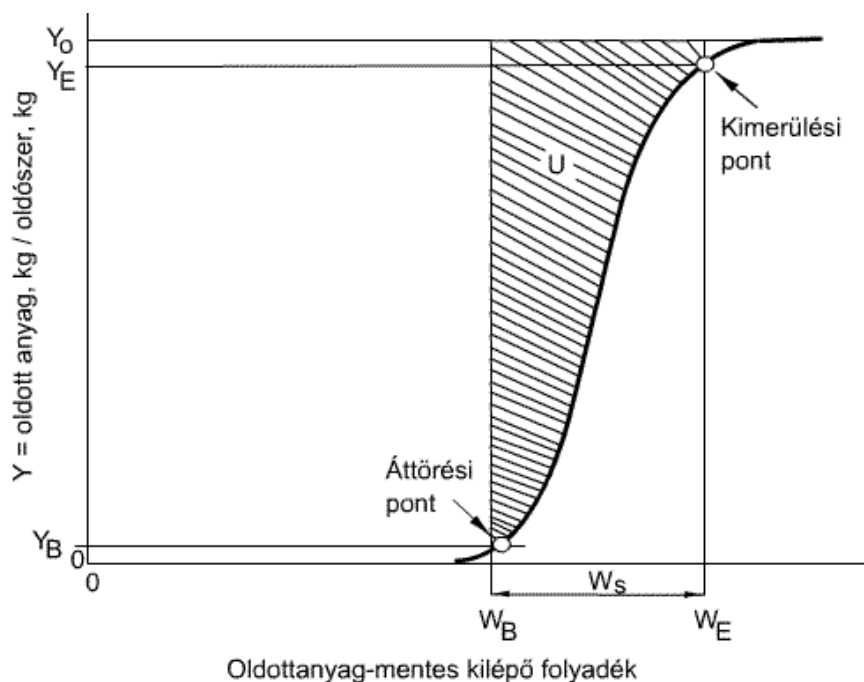
A nyugvó adszorbens üzemeltetésénél a gyakorlatban rendszerint nem vezetik egyensúlyig a telítődést. Többnyire a leválasztandó komponensnek az adszorbens réteg felett mérhető minimális koncentrációját, az úgynevezett áttörési pontot írják elő az adott technológiánál, a hozzá tartozó úgynevezett dinamikus telítettséggel, ami értelemszerűen kisebb, mint az izotermával kifejezhető egyensúlyi telítettség. A dinamikus telítettség értékéhez ismerni kell az adszorpció sebességét. Az adszorbens rétegben a telítődés mindig egy úgynevezett zónában következik be. A zóna elején az elnyelendő komponens koncentrációja megegyezik a kezdeti koncentrációval, a zóna végén a koncentrációja zérus. Az adszorpció során ez az anyagátbocsátási zóna, más néven működő réteg vagy adszorpciós front elmozdul. Ez a zóna végül is időben az egész rétegen végighalad. Az adszorpciós idő befejeződik, azaz a réteg védőhatása megszűnik, amikor a réteg végén mérhető koncentrációban megjelenik az elnyelendő komponens koncentrációja. Ezt nevezzük a réteg áttörésének. Azoknál az adszorbens-adszorptívum rendszereknél, amelyekre felülről nézve konvex izoterma a jellemző, az adszorpciós zóna önmagával párhuzamosan mozdul el, a kialakult frontnak az úgynevezett zónavándorlási sebessége (v) tehát állandó. Az állandó előrehaladási sebesség a tömegmérlegből számítható

$$(7.22) \quad v = v_v \frac{\varepsilon c_0}{\varepsilon c_0 + c^*}.$$

ahol v_v az anyagáram valódi sebessége, ε a réteg szabadtérfogat tényezője és c^* a c_0 kezdeti koncentrációhoz tartozó egyensúlyi koncentráció. A folyamat megkezdése előtt rendszerint tapasztalati adatokra kell támaszkodni. Ha ezek hiányoznak, akkor kísérletekkel kell meghatározni a telítődési viszonyokat, így az egyensúlyt kifejező izotermát, a réteg porozitását és az áramlási sebességet, amely különböző megfontolások miatt ritkán nagyobb 0,3 m/s-nál. Különösen igaz a kísérletezésre vonatkozó megállapítás, ha egyidejűleg több komponens adszorbeálódik, és csere adszorpció következik be. A csere adszorpció egyúttal a deszorpcióra is technológiai lehetőséget ad, amikor a jobban kötődő anyaggal kiűzik a gyengébben kötött komponenst. Ezen az elven alapszik a gyakorlatban elterjedt vízgőzös deszorpció, amikor az adszorbensen megkötött szerves oldószereket 105-110°C-ú vízgőzzel nyerik vissza.

Nyugvóréteges adszorberek üzemeltetéséhez, valamint az adszorpciós ciklusok hosszának meghatározásához ismerni kell az áttörési pontban az egyensúlytól való eltérést. Ehhez viszont tudni kell az áttörési pont eléréséhez szükséges időt és az áttörési görbe alakját. Vezessük be az alábbi egyszerűsítéseket, az adszorpció híg oldatokból történik, az egyensúlyi adszorpciós izoterma az oldatkoncentrációt ábrázoló tengely felé homorú, az adszorpciós zóna magassága az oszlopon való végighaladása közben állandó, és az adszorbens oszlop magassága az

adszorpciós zóna magasságának többszöröse. Sok ipari alkalmazás eleget tesz ezeknek a feltételeknek. Itt a tárgyalás során folyadék elegyekről lesz szó, de az elmélet gáz elegyekre szintén érvényes. Vizsgáljuk meg a **240. ábra** látható idealizált áttörési görbét.



240. ábra: Idealizált áttörési görbe

Ezt úgy nyerjük, hogy G (kg/s) tömegárammal, Y_0 (kg kivonandó anyag/ kg vivő folyadék) kezdeti koncentrációjú folyadék áramlik egy adszorbens rétegen át. Az oldott anyagot nem tartalmazó kiáramló folyadék W (kg) mennyisége egy adott időintervallum elteltéig, a berendezés egységnyi keresztmetszetére számítva. Miután megjelent az oldott anyag a kiáramló folyadékban, a koncentrációja gyorsan növekszik nulláról a kezdeti koncentrációt megközelítő értékre. Önkényesen kiválasztunk egy Y_B értéket, ez lesz az áttörési ponthoz tartozó koncentráció, valamint egy Y_0 -hoz közeli Y_E értéket, és az adszorbenst gyakorlatilag telítettnek tekintjük, ha a kilépő folyadék koncentrációja eléri ezt az értéket. Vizsgáljuk meg az áttörés pillanatáig átáramlott folyadék mennyiségét jelölő W_B értékét valamint a görbe alakját W_B és W_E között. A szilárd rétegen áthaladó folyadék mennyisége az áttörés pillanatától a kimerülési pontig $W_0=W_E-W_B$. Az adszorpciós zóna Z_a állandó magassága az adszorbens oszlopnak az a részét jelöli, amelyben a koncentráció időről időre Y_B -ről Y_E -re változik. Jelölje t_a azt az időt, amely alatt az adszorpciós zóna kialakulása után Z_a távolsággal lefelé vándorol.

$$(7.23) \quad t_a = \frac{W_a}{G}$$

Jelölje t_E azt az időtartamot, amely a folyamat kezdetétől addig az időpontig tart, amíg az adszorbtívum eléri az adszorbens réteg alját, akkor

$$(7.24) \quad t_E = \frac{W_E}{G}$$

Ez az időtartam az adszorbens működési ideje. Ha az adszorbens réteg magassága Z (m) és t_F az adszorpciós zóna kialakulásához szükséges idő, akkor

$$(7.25) \quad Z_a = Z \frac{t_a}{t_E - t_F}$$

Az adszorpciós zónában az áttörési ponttól a telítési (kimerülési) pontig a folyadékból eltávolított oldott anyag mennyisége U (kg), az adszorbens egységnyi keresztmetszetére vonatkoztatva. Ez az anyagmennyiség a 7.18. ábrán a vonalkázott terület, és ennek értéke

$$(7.26) \quad U = \int_{W_B}^{W_E} (Y_0 - Y) dW$$

Ha az adszorpciós zónában levő összes adszorbens teljesen telítve lenne, akkor az adszorpciós zónában a megkötött oldott anyag mennyisége $Y_0 W_a$ (kg) oldott anyag a berendezés 1 m^2 -re. Tehát az áttörési pontnál, amikor az adszorpciós zóna még az oszlopban van, a zóna adszorbensének telítettségi foka, illetve a zóna adszorpciós képessége

$$(7.27) \quad f = \frac{U}{Y_0 W_a} = \frac{\int_{W_B}^{W_E} (Y_0 - Y) dW}{Y_0 W_a}$$

Ha $f = 0$, tehát a zónában levő adszorbens gyakorlatilag telített, akkor az adszorbens réteg tetején a zóna kialakulásához szükséges t_F idő egyenlő azzal a t_a idővel, amely alatt az adszorpciós zóna a saját Z_a magasságával azonos utat lefelé megtesz. Másrészt viszont, ha $f = 1,0$, vagyis az adszorpciós zónában levő adszorbens gyakorlatilag nem tartalmaz oldott anyagot, akkor a zóna kialakulásához szükséges idő nagyon rövid, gyakorlatilag nulla. Ezeket a határfeltételeket a következő egyenlet írja le:

$$(7.28) \quad t_F = (1 - f)t_a$$

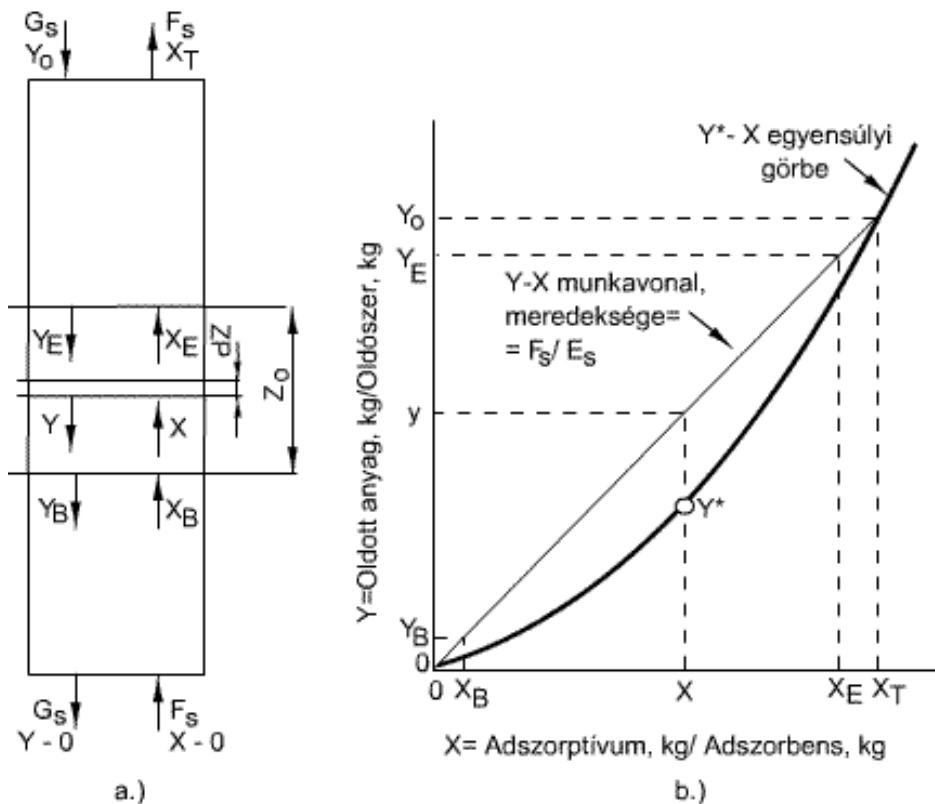
A (7.26) és (7.28) egyenletekből következik

$$(7.29) \quad Z_a = Z \frac{t_a}{t_E - (1 - f)t_a} = Z \frac{W_a}{W_E - (1 - f)W_a}$$

A Z (m) magas és egységnyi keresztmetszetű adszorpciós oszlop $Z\rho_s$ (kg) adszorbent tartalmaz, ahol ρ_s az adszorbens töltet látszólagos sűrűsége. Ha az egész adszorbens mennyiség egyensúlyban van, tehát az adszorbens teljesen telített, és az adszorptívum koncentráció eléri az X_T (kg adszorptívum/kg adszorbens) értéket, akkor az adszorptívum tömege $Z\rho_s X_T$ (kg). Az áttörési pontban a Z_a magasságú adszorpciós zóna még az oszlop belsejében, az oszlop alján van. Az oszlop többi része, $Z - Z_a$ (m) magasságban teljesen telítve van. Az áttörési pontban tehát az adszorbeált oldott anyag mennyisége $(Z - Z_0)\rho_s X_T + Z_a \rho_s f X_T$ (kg). Az áttörési pontban az oszlop telítettségének mértéke tehát

$$(7.30) \quad \eta = \frac{(Z - Z_0)\rho_s X_T + Z_a \rho_s f X_T}{Z\rho_s X_T} = \frac{Z - (1 - f)Z_a}{Z}$$

A nyugvó adszorbens rétegben az adszorpciós zóna halad lefelé a szilárd anyagban. Képzeljük el e helyett, hogy a szilárd anyag mozog fölfelé az oszlopban a fluidummal ellenáram olyan sebességgel, hogy az adszorpciós zóna helyben marad az oszlopban, amint a **241. ábra** mutatja.



241. ábra: Egykomponensű, folyamatos ellenáramú adszorpció

Itt azt láthatjuk, hogy az oszlop tetején kilépő adszorbens egyensúlyban van a belépő gázzal, a kilépő gázból pedig az összes oldott anyagot sikerült kinyerni. Ehhez végtelen magas oszlopra lenne szükség, de mi elsősorban az adszorpciós zóna határain uralkodó koncentrációkat kívánjuk vizsgálni. A munkavonal egyenlete az egész oszlopra

$$(7.31) \quad G_s(Y_0 - 0) = S_s(X_T - 0).$$

vagy

$$(7.32) \quad \frac{S_s}{G_s} = \frac{Y_0}{X_T}.$$

Mivel a munkavonal a **241. ábra** origóján megy keresztül, az oszlop bármely keresztmetszetében az oldott anyag Y koncentrációja az oldatban és X koncentrációja az adszorbensen a következőképpen függ össze

$$(7.33) \quad G_s Y = S_s X.$$

A differenciális dZ magasságú oszloprészben az adszorpció sebessége

$$(7.34) \quad GdY = K_Y a_p (Y - Y^*) dZ.$$

Az adszorpció zóna átviteli egység száma, $\dot{A}ESz$ száma

$$(7.35) \quad \dot{A}ESz = \int_{Y_B}^{Y_E} \frac{dY}{Y - Y^*} = \frac{Z_a}{\dot{A}EM} = Z_a \frac{K_Y a_p}{G}.$$

ahol $\dot{A}ESz$, az átbecsátási egységek száma az adszorpció zónában, és az $\dot{A}EM$ az átadási egység magasság, K_Y a teljes anyagátadási tényező, és a_p az adszorbens fajlagos felülete. Bármely Z_a -nál kisebb Z értékre, feltéve ha $\dot{A}EM$ értéke nem függ a koncentrációtól.

$$(7.36) \quad \frac{Z}{Z_a} = \frac{W - W_B}{W_a} = \frac{\int_{Y_B}^Y \frac{dY}{Y - Y^*}}{\int_{Y_B}^{Y_E} \frac{dY}{Y - Y^*}}.$$

A (7.36) egyenlet segítségével, az integrálok értékének grafikus meghatározása után megrajzolható az áttörési görbe.

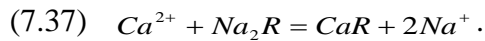
A levezetés elején felsorolt megszorításokon kívül az elmélet érvényességét nagymértékben befolyásolja, hogy $K_Y a_p$ vagy $\dot{A}EM$ mennyire független a koncentrációk értékétől az adszorpció zónában. Ez természetesen attól függ, hogy a fluidumban és a pórusokban viszonylag mennyire állandók az ellenállások az anyagátvitellel szemben.

21.4. Ioncsere

Az ioncsere művelete során egy vagy több komponens szelektív megkötése megy végbe valamilyen oldatból ionitok segítségével. Az ioncserélő műveletek tulajdonképpen cserebomlással járó kémiai reakciók egy oldott elektrolit és egy másik, az oldattal érintkező oldhatatlan elektrolit, (ionit) között. Ezeknek a reakcióknak a mechanizmusa és kivitelezése hasonló az adszorpcióhoz, így a műszaki szempontból az ioncsere egyszerűen az adszorpció egy speciális esetének is tekinthető.

21.4.1. Ioncserélők

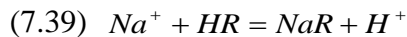
Az ioncserét az úgynevezett ionitokkal végezzük, amelyek vízben és közönséges oldószerekben gyakorlatilag oldhatatlanok. Mozgékony ionjaik az elektrolit oldat mozgékony ionjaival ekvivalens mennyiségben, azonos töltéssel cserélnek helyet. Az ionitok legtöbbször szemcsék, amelyek pozitív vagy negatív töltésű ionos csoportokat tartalmaznak, és az ezekhez csatlakozó, szabadon mozgó ellenionjaikat képesek más, hasonló töltésű ionokkal kicserélni. Az ionitok lehetnek természetes vagy szintetikus, szervetlen, illetve szerves anyagok. A természetes ionitokhoz tartoznak például az ásványi zeolitok, a talajkolloidok, vagy az ásványi szenek. A szintetikus ionitokhoz tartoznak a molekulasziták (szabályos kristályszerkezetű zeolitok), az ioncserélő gyanták, egyéb aktivált ásványok és szerves anyagok. A természetes vagy mesterséges szilikátok, a *zeolilok*, például a $\text{Na}_2\text{O} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 4\text{SiO}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ összetételű ásvány. Egy olyan oldat pozitív töltésű ionjai (kationjai), amelyek bediffundálnak az ásvány pórusaiba, kicserélődnek az ásvány Na^+ -ionjaival, ezért az ilyen ásványokat kation cserélőknek nevezzük. Például



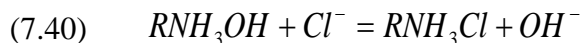
ahol R jelenti a zeolit maradékát. Ilyen módon a keménységet okozó Ca^{2+} -ionokat tartalmazó víz zeoliton átáramoltatva lágyabb lesz, mivel a Na^+ -ionokkal kicserélik az oldatban levő Ca^{2+} -ionokat. A Ca^{2+} -ionok megkötődnek a szilárd anyagban. A reakció megfordítható, és a Ca^{2+} -ionokkal telítődött zeolit sóoldattal regenerálható:



A szénzeolitok például lignitnek különböző reagensekkel, így füstölgő kénsavval való kezelése útján készültek. Az ilyen ioncserélők sóoldat helyett savval regenerálhatók hidrogéntartalmú, HR alakká. Így egy $Ca(HCO_3)_2$ aldat a Ca^{2+} -ionok lecserélése után H_2CO_3 -at tartalmaz és mivel a szénsav könnyen eltávolítható, ilyen módon csökkenthető a víz keménysége. Az ioncserélőket kezdetben vízlágyítási problémák megoldására használták. A szintetikus ioncserélő műgyanták, például szulfon-, karboxil- vagy fenol csoportot tartalmazó szintetikus oldhatatlan polimer gyanták úgy foghatók fel, mint rendkívül nagy anionból és kicserélhető kationból álló vegyületek. Ezekkel lehetségesek a



típusú ioncserélő műveletek. Különböző kationok különböző erősséggel kötődnek meg a gyantán. Például gyantán megkötött, Na^+ -ionok kicserélhetők más kationokkal vagy H^+ -ionokkal, egészen úgy, mint ahogy egy közönséges adszorbensen adszorbeált oldott anyag kicserélhető valamilyen más oldott anyaggal. Hasonlóképpen amino-csoportokból és anionokból álló szintetikus, oldhatatlan polimer gyanták felhasználhatók az oldatok anionjainak kicserélésére. Ennek mechanizmusa bonyolultabb, de a jelen tárgyalásmód szempontjából egyszerű ioncserének tekinthetjük. így például



ahol az $-RNH_3$ a gyanta nem cserélhető kationcsoportját jelenti. Ezek a gyanták nátrium-karbonát vagy nátrium-hidroxiddal regenerálhatók.

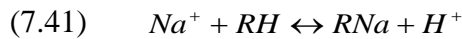
A reakció megfordítható, az egyenlőség jel helyett a kettős nyíl írása lenne a precíz jelölés. A legkülönbözőbb ioncserélő tulajdonságú műgyanták szerezhetők be granulált vagy gyöngy alakban. Az egyes gyöngyök gyakran megközelítik a tökéletes gömb alakot.

21.4.2. Ioncserélők alkalmazása

Az adszorpció módszereket mind alkalmazzák az ioncserénél is. Így oldatok feldolgozására alkalmaznak szakaszos vagy fokozatos eljárásokat, félfolyamatos vagy nyugvóréteges műveleteket, és folytonos ellenáramú műveletet is. Leggyakoribb a nyugvóréteges perkoláció. A már előbb említett vízlágyításon kívül a víz teljes ionmentesítése is elvégezhető úgy, hogy előbb egy kationcserélőn, majd anioncserélőn perkolálunk. Ha azonos mennyiségű erős kationcserélő és erős anioncserélő keverékéből készült ágyat használunk, az ionmentesítés semleges pH mellett is elvégezhető. Az ilyen kevertágyas ioncserélőket regenerálás előtt részecskeméret és sűrűség szerint szétválasztják a két eredeti gyantára, és ezeket külön-külön regenerálják. Az ioncserélőket híg hulladékoldatok kezelésére és töményítésére is használják.

21.4.3. Egyensúlyok

Valamely ion egyensúlyi megoszlása az ioncserélő és az oldat között ugyanúgy írható le grafikusán izotermákkal, mint az adszorpció. Különböző empirikus egyenletek, így például a Freundlich egyenlet, esetenként alkalmazhatók ezekre az izotermákra. A tömeghatás törvényét alkalmazva a kicserélődési reakcióra. Így például a



tömeghatás törvénye.

$$(7.42) \quad K = \frac{[NaR][H^+]}{[Na^+][RH]}$$

ahol a szögletes zárójel az egyensúlyi koncentrációt jelenti. A K a relatív adszorptivitás kifejezése, jelen esetben a Na^+ -ionok és a H^+ -ionok relatív adszorptivitása. Mivel a szilárd fázis az ioncsere alatt semleges, írhatjuk, hogy

$$(7.43) \quad K = \frac{X}{X_0 - X} \frac{c_0 - c^*}{c^*} = \frac{X / X_0}{1 - X / X_0} \frac{1 - c^* / c_0}{c^* / c_0}$$

Az egyenletben c_0 a Na^+ -ionok és a H^+ -ionok ionkoncentrációk összege az oldatban, a művelet megkezdésekor, ami az összes ionkoncentrációt jelenti a rendszerben minden időpillanatban. A c^* az ioncsere után az egyensúlyi, Na^+ -ion koncentráció, X a Na^+ -on koncentráció a szilárd fázisban, X_0 a Na^+ -on koncentrációja a szilárd fázisban, amennyiben az összes H^+ -ion kicserélődne Na^+ ionokra. Valamennyi koncentrációt egységnyi térfogatra vagy tömeggel vonatkoztatott egyenérték tömeggel fejezzük ki.

21.4.4. Ioncsere sebessége

Az ioncsere sebessége hasonlóan az adszorpció sebességéhez, az alábbi folyamatok sebességétől függ. (1) Az ionok diffúziója az oldat belsejéből valamelyik ioncserélő részecske külső felületéhez. (2) Az ionok diffúziója a szilárd anyagban az ioncsere helyére. (3) Az ionok kicserélődése. (4) A kicserélt ionok diffúziója a szilárd anyag felületére. (5) A kicserélt ionok diffúziója a szilárd részecskék felületéről az oldat belsejébe. Természetesen az ioncsere sebességét a leglassúbb részfolyamat sebessége határozza meg. Bizonyos esetekben a (3) pontban említett kicserélődési reakció a folyamat sebességét meghatározó tényező, más esetekben a reakció sebessége nagy, a diffúzió sebességéhez viszonyítva. A diffúzió sebességét a szilárd illetve a folyadékfázison keresztül történő ekvimolekuláris szembe diffúzió anyagátadási együtthatóval lehet leírni. Bizonyos esetekben a folyamat sebességét meghatározó tényező a folyadékfázisú diffúzióval szemben kifejtett ellenállás. Abban az esetben, ha a kicserélődési reakció az anyagátadási sebességhez gyors, akkor az adszorbereknel megismert módszereket közvetlenül alkalmazhatjuk az ioncsere műveletekre.

Irodalomjegyzék:

- [1]. Bruce E. Logan: Environmental Transport Processes. John Wiley and Sons, Inc.1999.
- [2]. Robert E. Treybal: Mass- Transfer Operations, Third Edition, McGraw-Hill Book Company, 1980.
- [3]. C. J. Geonkoplis: Transport Processes and Separation Process Principles, Fourth Edition. Prentice Hall. 2003.
- [4]. W. L. McCabe, J. C. Smith, P. Harriott: Unit Operations of Chemical Engineering. McGraw-Hill. 2005.
- [5]. Benedek Pál, László Antal: A vegyészmérnöki tudomány alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest. 1964.
- [6]. J. M. Coulson, J. F. Richardson: Chemical Engineering, Volume Two, Third Edition, Pergamon Press, 1978.
- [7]. L. M. Batuner: A szerves és biokémiai ipar alaplúveletei, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969.
- [8]. Dr. Janusz Ciborowski: A vegyipari műveletek alapjai, Műszaki Könyvkiadó. Budapest, 1969.

Jelölésjegyzék:

Latin betűk:

a	Fajlagos felület, m^2/m^3
A	Felület, keresztmetszet, m^2 Abszorpciós faktor
B	Betáplálás, mol/s
ÁESz	Átviteli egység szám
ÁEM	Átviteli egység magasság
c	Koncentráció, mol/m^3
D	Diffúziós állandó, m^2/s Kolonna átmérője, m Desztillátim, mol/s
E	Fázis árama, mol/s
EEM	Egyensúlyi egység magasság, m
EESz	Egyensúlyi egység szám
f	Folyadékviszony Adsorbens zóna telítési foka
f*	Extrakció kinyerési foka
F	Fázisok száma Folyadékáram, mol/s
g	Nehézségi gyorsulás, m/s^2
G	Gibbs féle szabad entalpia, J Gázáram, mol/s Tömegáram, kg/s
H	Henry-állandó Magsság, m Moláris entalpia, J/mol Kilúgozásnál a fokozatok közötti állandó
j	Komponens áramsűrűség, mol/m^2s
K	Független komponensek száma Anyagátbocsátási együttható Szemcsés halmaz áteresztő képessége Egyensúlyi állandó
k	Anyagátadási együttható
L	Hosszúság, mint alapmennyiség, m
m	Tömeg, g Megoszlási hányados
\dot{m}	Tömegáram, kg/s
M	Fenektermék, mol/s Momentum
n	Fokozatok száma, kaszkádszám
N	Mólszám, mol Kaszkád elemszáma Kapilláris szám Mólarány
\dot{N}	Komponensáram, mol/s
p	Nyomás, Pa
Q	Hőmennyiség, J
R	Egyetemes gázállandó, J/mol K

	R fázis árama, mol/s
	Refluxarány
S	Entrópia
	Oldószeres fázis árama, mol/s
	Maradék töltőlé
Re	Reynolds-szám
Sz	Szabadsági fokok száma
t	Idő, s
T	Hőmérséklet, K
v	Sebesség, m/s
V	Térfogat, m ³
\dot{V}	Térfogatáram, m ³ /s
W	Fluidum mennyisége az adszorbensen, kg
x	Móltört
	Helykoordináta, m
X	Mólarányban kifejezett koncentráció
y	Móltört
	Helykoordináta, m
Y	Mólarányban kifejezett koncentráció
z	Helykoordináta, m
	Filmvastagság, m
Z	Magasság, m

Görög betűk:

α	Relatív illékonyság
ε	Turbulens diffúzivitási állandó, m ² /s
η	Fokozathatásfok
μ	Kémiai potenciál, J/mol
ρ	Sűrűség, kg/m ³
σ	Folyadék felületi feszültsége, N/m,
τ	Idő, s

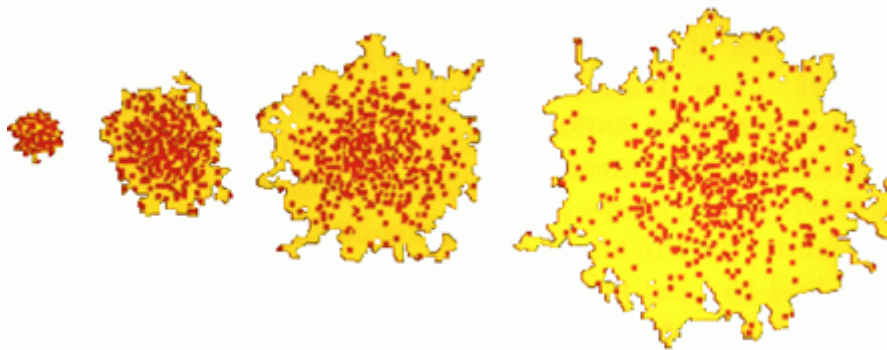
Alsó indexek:

D	Desztillátum
f	Folyadékoldali koncentrációval kifejezett
F	Folyadékfázis
g	Gázoldali koncentrációval kifejezett
G	Gázfázis
i	Komponens
M	Fenéktermék
max	Maximum
min	Minimum
ö	Összes
s	Nem diffundáló
S	Egyensúlyi
x	Helykoordináta
	Folyadékoldali koncentrációval kifejezett
y	Helykoordináta
	Gázoldali koncentrációval kifejezett
z	Helykoordináta

Felső indexek:

*	Határfelület
	Egyensúlyi érték
0	Tiszta komponensre vonatkoztatott
α	Fázis
β	Fázis

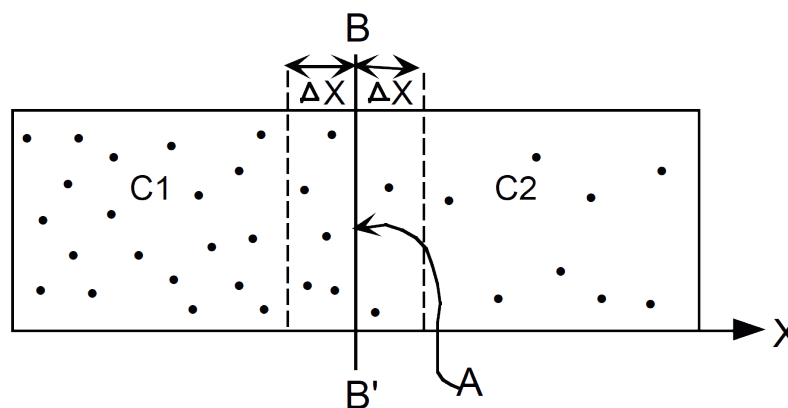
22. A diffúzió elméleti modellje



A következő fejezet a molekuláris diffúzió koncepcióját mutatja be, melynek alapja a molekulák random jellegű mozgása. Az elméleti összefoglalóból és a bemutató animációból kiderül, hogyan érvényesül a Gauss-féle disztribúció elmélete a molekulák Brown-mozgása esetében. A diffúziós együttható, D , megegyezik a Fick-törvény együtthatójával – ennek lényege, hogy a tömegfluxus egyenesen arányos és ellentétes irányú a koncentráció gradienssel. Mint azt Fischer és társai is megállapították (1979), számos környezeti diszperziós probléma leírható azokkal a folyamatokkal, melyek nagyon hasonlóak a molekuláris diffúzióhoz, ezért a koncepció kiemelkedő fontosságú. A fejezethez kapcsolódó feladatokkal ellenőrizheti tudását Fick törvényével kapcsolatban, a diffúziós együttható fizikai jellemzőiről és hogy hogyan alkalmazható a Gauss-féle eloszlás a koncentráció profilok leírásához.

22.1. A diffúzió elméleti modellje

A diffúzió nem más, mint a véletlenszerű mozgásból adódó nettó transzport. A diffúzió fluxus modellje egy egyszerű példával szemléltethető. Tételezzünk fel egy egydimenziós modellt, amely csakis X irányba végez mozgást. A felületet két részre választó vonal, mely B és B' pontokat köti össze, két különböző koncentrációjú, C_1 és C_2 részecske/térfogat részre fogja osztani a felület jobb és bal oldalát. Minden egyes részecske mozgása véletlenszerű lesz. A részecskék egységnyi idő, Δt alatt $\pm \Delta X$ távolságot tesznek meg, jobb ($+\Delta X$) vagy bal ($-\Delta X$) irányba, ugyanakkora valószínűséggel.



242. ábra: Diffúzió általános ábrája

Minden időegység alatt minden, a $B-B'$ vonaltól ΔX távolságon belül lévő részecske számára 50% az esélye annak, hogy átlépje a választóvonalat. Azon részecskék száma, melyek potenciálisan balról jobbra átléphetik a $B-B'$ vonalat (pozitív tömegáramlás): $(C_1 \Delta X A)$, ahol

A a B-B' területe. Hasonlóképpen, a jobbról balra mozgó részecskék száma (negatív tömegáramlás): $(0,5 C_2 \Delta X A)$. Az összes tömegáramlás q_X , a következőképpen alakul:

$$(1) \quad q_x = \frac{0,5\Delta X \cdot A \cdot (C_1 - C_2)}{\Delta t}$$

Ha $C(x)$ folyamatos, akkor $C_2 \approx C_1 + \Delta X \partial C / \partial x$, és a fenti egyenlet átalakul:

$$(2) \quad q_x \approx - \left[\frac{\Delta X^2}{2\Delta t} \right] A \frac{\partial C}{\partial x} = -DA \frac{\partial C}{\partial x} = \left[\frac{\text{tömeg}}{\text{idő}} \right]$$

A diffúziós koeficiens $D \sim (1/2)\Delta X^2 / \Delta t$ [hossz²idő⁻¹]

Adott fluidumban a kémiai molekula diffúziója attól függ, hogy a molekula mennyire könnyen tud mozogni az adott közegben, azaz hogy egy adott időtartamon belül mekkora távolságot, ΔX , képes megtenni. A molekuláris mozgás intenzitása, és ezáltal az adott anyag diffúziója függ a molekula méretétől és polaritásától, a fluidum típusától és a hőmérséklettől.

A második egyenlet **Fick törvényének** matematikai kifejezése. Fick törvénye kimondja, hogy egy egységnyi területen, A , egységnyi idő, Δt , alatt adott irányba, pl. x , áthaladó oldott anyag fluxusa arányos az adott irányba eső koncentráció gradienssel, $\partial C / \partial x$, és a gradienssel ellentétes, azaz a nettó fluxus is csökkenő mértékű lesz. Mivel bármely irányú fluxus csak az adott irányra vonatkozó koncentráció gradienssel arányos, Fick törvénye kiterjeszhető a három dimenziós modellekre is.

$$(3) \quad (q_x, q_y, q_z) = \left(-DA_{yz} \frac{\partial C}{\partial x}, -DA_{xz} \frac{\partial C}{\partial y}, -DA_{xy} \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

A molekuláris diffúzió esetében a diffúziós együttható izotrópikus lesz, azaz ugyanakkora értékű minden irányba. Ez azonban a turbulens diffúzió esetében nem jellemző.

Pontforrásból kiinduló diffúzió

Feltételezzünk egy N részecskéből álló felhőt (össztömege M) $x=0$ és $t=0$ kibocsátási értékkel. A molekuláris diffúzió miatt a felhő lassan fog terjedni. A véletlenszerű mozgás modelljének alkalmazásával megjósolható a részecske (tömeg) koncentrációja, $C(x,t)$. Jegyezzük meg, hogy ha a részecskékhez egységnyi tömeget társítunk, $N=M$ értékek felcserélhetőek lesznek. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a modell egydimenziós, melyre érvényesek a fentiekben leírt véletlenszerű mozgás szabályai, azaz minden időegység alatt, Δt , minden részecske ugyanakkora valószínűséggel fog elmozdulni $+\Delta X$ vagy $-\Delta X$. Idővel minden részecske el fog mozdulni kis mértékben előre és hátra is. Az egyes részecskék valószínű elhelyezkedése sok lépés után is megjósolható a központi határeloszlás tétel segítségével (a tétel megtalálható bármely alapszintű statisztikai leírásban).

Konkréten tehát, annak a valószínűsége, hogy egy adott részecske több lépés után a $m\Delta X$ és $(m+1)\Delta X$ közötti tartományban legyen megtalálható, a normál eloszláshoz közelít, nulla középértékkel és normális szórással,

$$(4) \quad \sigma = \sqrt{2Dt}$$

ahol, a fentiekhez hasonlóan,

$$(5) \quad D = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\Delta X^2}{\Delta t}$$

Annak valószínűsége, hogy a részecske x és $x+\Delta X$ között lesz megtalálható:

$$(6) \quad p(x, t)\Delta X = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \Delta X = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \Delta X$$

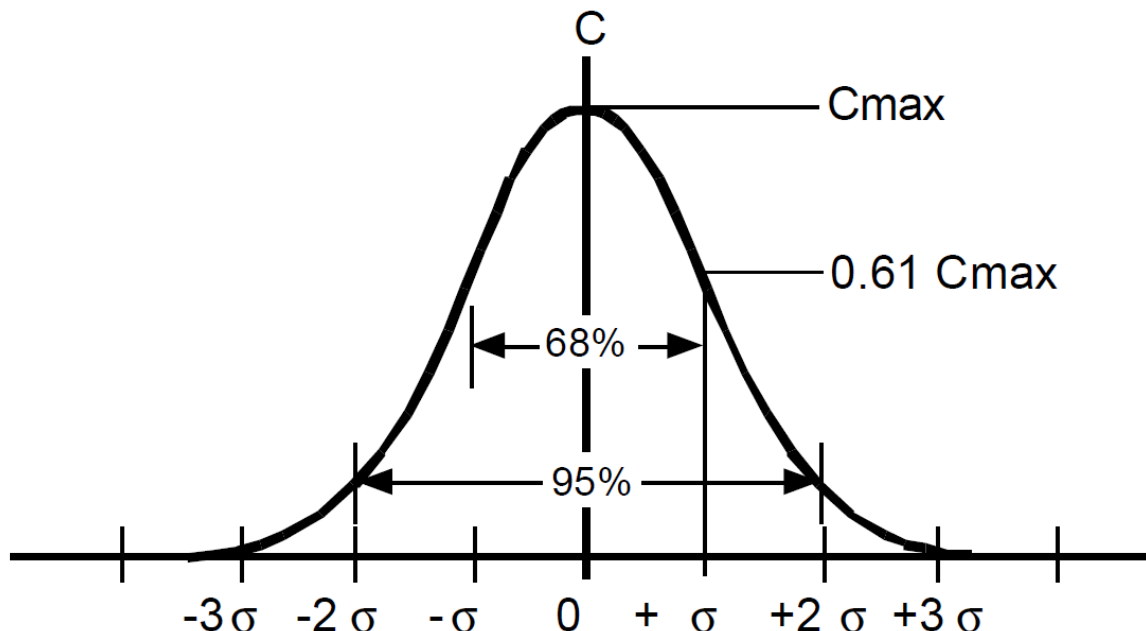
Most vegyük az egész, N számú részecskéből álló felhőt. Bármely időpontban, t , az x és $x+\Delta X$ közé eső részecskék száma várhatóan $n(x, t) = N p(x, t) \Delta X$. A koncentráció, C a X pozícióban X is $C(x, t) \approx n(x, t)/(A \Delta X)$ lesz, ahol A az egydimenziós rendszer állandó keresztmetszete. M és N felcserélésével a koncentráció-eloszlás, $C(x, t)$:

$$(7) \quad C(x, t) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) = \left[\frac{\text{tömeg}}{\text{hossz}^3}\right]$$

Mint az előzőekben is láttuk, az eloszlás normál eloszlás lesz, nulla középpértékkel és normális szórással, $\sigma = \sqrt{2Dt}$, amely mindenki számára ismert a statisztikai alapképzésről.

Röviden, az eloszlás harang alakú görbét fog eredményezni, mint az az ábrán is látható. Az össztömeg (részecskék számának összessége) 69 százaléka a középpérték ($x=0$) $\pm\sigma$ tartományába fog esni. Az össztömeg 95 százaléka a középpérték $\pm 2\sigma$ tartományába esik. 99,7% pedig a középpérték $\pm 3\sigma$ tartományában lesz.

Ezeket alapul véve, a koncentrációs felt kiterjedését az össztömeg 95%-át tartalmazó kontúr mentén szokás definiálni, pl.: 2σ kontúr a középponttól. Ez alapján a diffúziós felhő hossza (L), $L=4\sigma$ szokott lenni.



Hasznos megjegyeznünk azt is, hogy a felhő középpontjától számított normális szórási koncentrációszintje a maximum koncentráció 61%-val egyenlő, azaz: $C(x = \pm\sigma) = 0.61 C_{\max}$,

ahol C_{\max} a felhő középpontjának koncentrációját jelenti. Ezzel az értékkel könnyen meghatározható lesz a részecskefelhő normális szórása.

Egy példa a véletlenszerű mozgásfolyamatra

Az animáción 500 részecske egydimenziós véletlenszerű mozgása látható, ahol egy lépés mértéke $\Delta X=1$, $\Delta t=1$ idő alatt. $t=0$ időnél a részecskék 0 pozícióban helyezkednek el. Ez a véletlenszerű mozgás animáció a Fick-féle diffúzió hatását szemlélteti. Az animáció megtekintése közben figyelje meg az alábbiakat.

A részecskék pontos helyzete a grafikonon

A gráf a X-tengely összes pozícióján elhelyezkedő részecskék számát mutatja. Az adott ponton lévő részecskék száma egyenesen arányos a koncentrációval.

- 1) Hogyan változik a legmagasabb részecskeszám, N, (koncentráció, C), a véletlenszerű részecske mozgás (diffúzió) hatására?
- 2) Adott idő alatt hogyan változik a részecskeszám gradiens (koncentráció), azaz dN/dx (dC/dx) a véletlenszerű részecske mozgás (diffúzió) hatására?
- 3) Mi jelzi a részecskeszám (koncentráció) gradienst (dN/dx), ha $x>0$? Figyelje meg az egyes részecskék mozgásának animációját (legfelső ablak). Ha $x>0$, a nettó részecske fluxus pozitív (jobbra irányuló) vagy negatív (balra irányuló) lesz? A fluxus iránya felfelé vagy lefelé mutat lesz? A fluxus iránya és a koncentráció gradiens közötti viszony összhangban lesz-e Fick törvényével?
- 4) Becsülje meg a diffúziós együtthatót, D úgy, hogy σ értékét a gráf bal felső sarka jelzi. Állítsa meg az animációt. Mennyiben tér el a D valós értéke az utolsó egyenlet által megadott elméleti értéktől? Figyeljen arra, hogy itt nincsenek specifikus egységek megadva, D egysége L^2T^{-1} , ahol L tetszőleges hosszt jelöl, T pedig tetszőleges időegységet.

Részecske helyzet a grafikonon a σ függvényében.

A gráf a részecskék helyzetét mutatja, a normális szórás, σ során elfoglalt helyükön. A kapott görbe a Gauss-féle normális eloszlást mutatja.

- 5) Figyeljen arra, hogy a korai szakaszban (az első néhány lépés során) a részecskék eloszlására nem feltétlenül jellemző a Gauss-féle eloszlás. Ennek oka, hogy a Gauss-féle eloszlás csak több lépés után érvényesül (központi határeloszlás tétel). Az animáció alapján becsülje meg, hogy hány lépés szükséges a Gauss-féle eloszlás érvényesüléséhez.

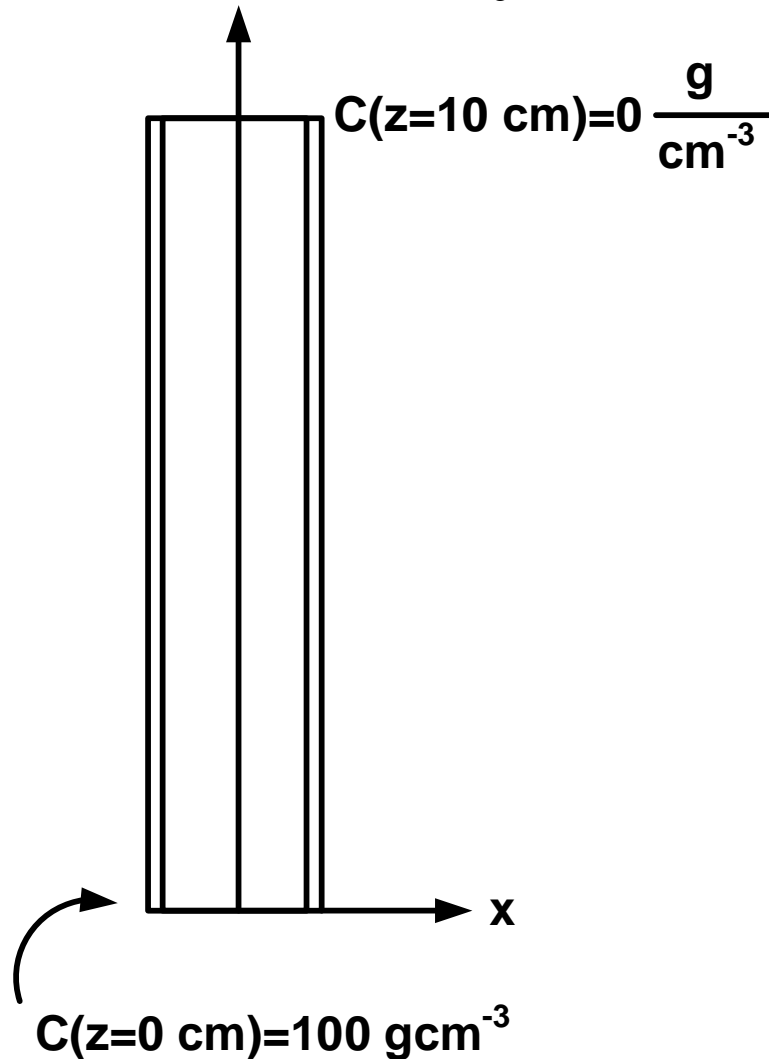
A Diffúzió fő jellemzői

- 1) A diffúzió a véletlenszerű mozgásból eredő nettó fluxus.
- 2) A diffúziós fluxus ellentétes előjellel egyenesen aránylik a koncentráció gradienshez.
- 3) A diffúziós folyamat a koncentráció oldódásának és a koncentráció gradiens csökkenésének irányába zajlik.

22.2. Feladatsor

22.2.1. Feladat

Egy kör alakú csövet tiszta vízzel töltünk meg. A koncentráció értékét a cső mindkét végén állandó értéken tartjuk. Becsülje meg a tömegáramlás nagyságát és irányát a csőben. A cső metszete $A = 1 \text{ cm}^2$, a diffúzió molekuláris, $D = 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$.

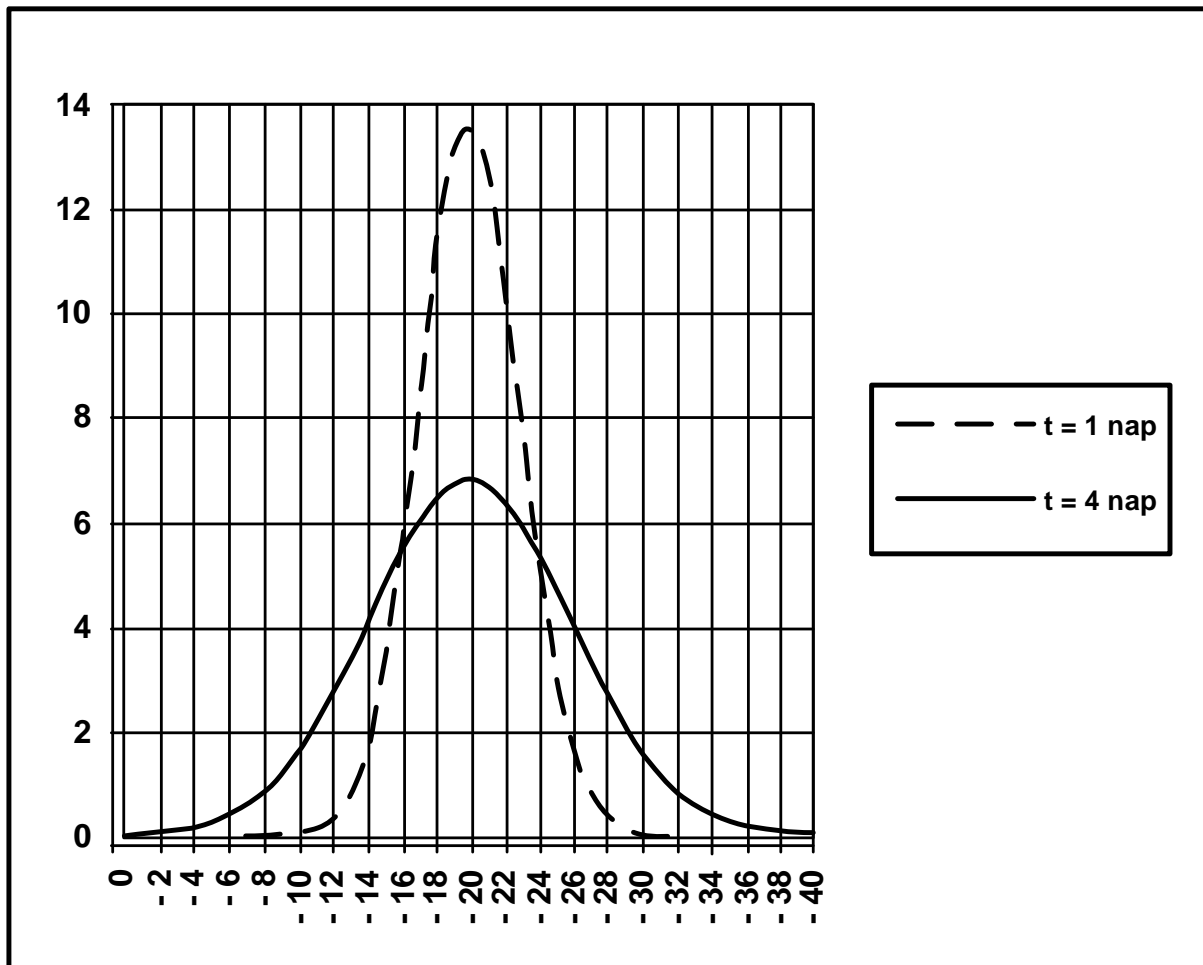


22.2.2. Feladat

A diffúzió elméleti modellje alapján hogyan változik a molekuláris diffuzivitás, D , a hőmérséklet és a molekula méretének függvényében?

22.2.3. Feladat

Egy vízminőség-vizsgáló tanulmány során azt a feladatot kapja, hogy állapítsa meg egy új fluoreszkáló festékanyag diffuzitását. Ennek meghatározásához egy laboratóriumi tartályban ($h=40 \text{ cm}$) tanulmányozza a festéket. 100 g festékanyagot 20 cm mélységben oszlat el a tartályban (a tartály falára viszi fel egyenletes rétegben), és megfigyeli, milyen változásokat mutat a festék az idő múlásával. A festék koncentrációváltozásának függőleges szelvényét az alábbi ábra mutatja, ahol X tengely a mélységet jelzi, y -tengely pedig a fluorométeren mért adatokat.



a. **kérdés:**

Becsülje meg a festék diffúziós együtthatóját (D), a festékfolt változása alapján.

b. **kérdés:**

Becsülje meg, mikorra fogja a festék eloszlását a tartály fala befolyásolni.

22.2.4. Feladat

Egy végtelen hosszúságú hengert mozdulatlan folyadékkal töltünk meg. Adott időpontban, $t=0$, egységnyi tömegű ($M = 0.1 \text{ g CO}_2$) –t adunk hozzá a henger középső pontján ($x=0$). Határozza meg, mely időpontban éri el a CO_2 koncentrációja az 1 ppm értéket $x = 50 \text{ cm}$ -nél, az alábbi esetekben

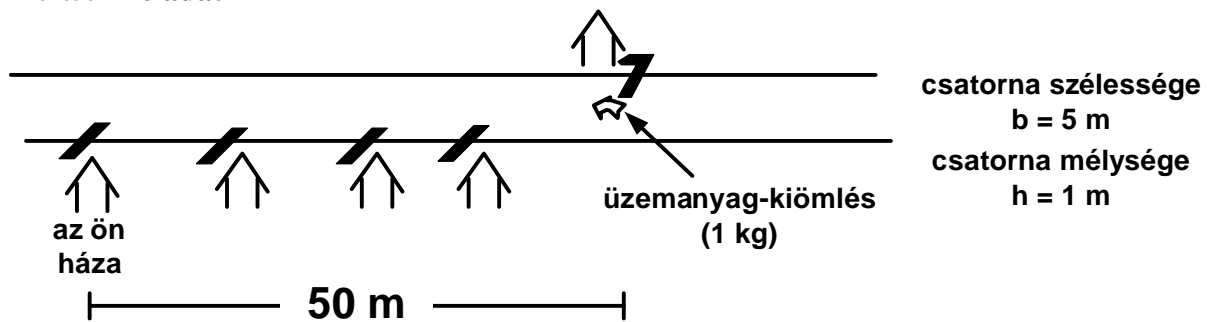
- levegőben történő molekuláris diffúzió
- vízben történő molekuláris diffúzió.

Megjegyzés:

(a) a levegő és a víz sűrűsége kb. 1.23 és 1000 kg/m^3

(b) a gáz halmazállapotú szén-dioxid diffúziós együtthatója $0.14 \text{ cm}^2/\text{s}$ a levegőben és $1.71 \times 10^{-5} \text{ g/cm}^3$ vízben.

22.2.5. Feladat



Az ön háza egy csatorna szélén áll. A szomszédja egy nap benzint önt a vízbe. Az állandó csónakforgalom miatt a csatornában jelentős a diffúzió mértéke, $D = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$. A víz áramlása elhanyagolható, így csak azt vesszük számításba, hogy a kiömlött benzint a diffúzió szállítja majd el a házukig. Tegyük fel, hogy a benzint szélétében és lefelé is gyorsan terjed.

- Mennyi idő alatt éri el a kiömlött benzint az ön házáig?
- Az A9-ban megállapított időpontban milyen lesz a koncentráció értéke az ön házáig?
- Mennyi a maximum koncentráció mértéke az Ön házáig?

22.3. Megoldások

22.3.1. Megoldás

Fick törvénye alapján (22.1 3. egyenlet)

$$q_z = -DA \frac{\partial C}{\partial z} \approx -DA \frac{C(z = 10 \text{ cm}) - C(z = 0 \text{ cm})}{(10 - 0) \text{ cm}}$$

$$= -(10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1})(1 \text{ cm}^2) \left(\frac{0 - 100 \text{ g cm}^{-3}}{10 \text{ cm}} \right) = +10^{-4} \text{ g/s}$$

"+" z-irány felé mutató

22.3.2. Megoldás

Hőmérséklet:

A folyadék hőmérsékletének emelkedése hatására a vízmolekulák mozgása megélnkül. A vízmolekulák és a diffuzív jellegű molekulák összeütközése révén ez utóbbiak mozgása is élénkebb lesz. Ahogy a hőmérséklet további emelkedésével az összeütközések száma és intenzitása növekszik, emelkedni fog az egységnyi idő alatt (Δt) megtett távolság (Δx) is. Ezért, a véletlenszerű mozgás modellje alapján azt várhatjuk, hogy a hőmérséklet emelkedésével D értéke is emelkedni fog. $D \sim \Delta x^2 / \Delta t$.

Molekula mérete:

A nagyobb méretű molekulák nehezebben mozdulnak el a környező vízmolekulákkal történő összeütközés hatására, különösen, ha a fajlagos molekulák mérete nagyobb a vízmolekuláénál, és egyszerre több oldalról, rendszertelenül zajlik az összeütközés. Ezért az átlagos megtett távolság, Δx ,n egységnyi idő alatt *kisebb* lesz a nagyobb molekulák esetében. A várható eredmény: $D \sim \Delta x^2 / \Delta t$.

22.3.3. Megoldás

1. Kérdés.

t(nap)	t(sec)	C_{max}	$0.6 C_{max}$	$\sigma(\text{cm})$
1	86400	13.5	8.1	3.0
4	345600	6.8	4.1	6.0

Feltételezve, hogy a horizontális réteg, amibe a jelölőanyag került, nagyon vékony, olyannyira, hogy kezdetben $\sigma = 0$, akkor:

$$\sigma = \sqrt{2Dt} \Rightarrow D = \frac{\sigma^2}{2t}$$

Ezért két becslésünk D értékére:

$$D_1 = (3.0 \text{ cm})^2 / 2(86400 \text{ s}) = 5.2 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

és

$$D_2 = (6.0 \text{ cm})^2 / 2(345600 \text{ s}) = 5.2 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

Ezért a festék becsült diffúziós együtthatója $5.2 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$.

2. Kérdés.

Vegyük figyelembe a tartály határait, amikor a felhő szélessége (4σ) 40 cm. Ekkor:

$$4(2Dt)^{1/2} = 40 \text{ cm}$$

(azaz amikor $Dt = 50 \text{ cm}^2$)

A fenti D értékkel számolva a tartály határai figyelmen kívül hagyhatóak lesznek, ha:

$$t = 50 \text{ cm}^2 / 5.2 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} = 9.6 \times 10^5 \text{ s} = 11.1 \text{ nap}$$

22.3.4. Megoldás

i. Levegő.

Az általunk vizsgálni kívánt koncentráció meghatározása:

$$\frac{C}{\rho_{\text{levegő}}} = 1 \text{ ppm} \Rightarrow C = \frac{1.23 \text{ kg m}^{-3}}{10^6} = 1.23 \times 10^{-9} \text{ g cm}^{-3}$$

A koncentráció normál eloszlása:

$$C = \frac{M}{A\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

Ezért 1 ppm anyagra,

$$1.23 \times 10^{-9} = \frac{9.599 \times 10^{-4}}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{4.464 \times 10^3}{t}\right) \Rightarrow \exp\left(-\frac{4.464 \times 10^3}{t}\right) = \frac{7.804 \times 10^4}{\sqrt{t}}$$

Az egyenlet próbálgatással való megoldásának eredményeképpen $C = 1 \text{ ppm}$ $x = 50 \text{ cm}$ értéknél ha $t = 423 \text{ s}$.

ii. **Víz.**

Ugyanazon megoldási módszer alapján:

$$\frac{C}{\rho_{\text{víz}}} = 1 \text{ ppm} \Rightarrow C = \frac{1000 \text{ kgm}^{-3}}{10^6} = 1.00 \times 10^{-6} \text{ gcm}^{-3}$$

Ezért, 1 ppm részre:

$$1.00 \times 10^{-6} \text{ gcm}^{-3} = \frac{0.1 \text{ g}}{(\pi(5 \text{ cm})^2)\sqrt{4\pi(1.71 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1})t}} \exp\left(-\frac{(50 \text{ cm})^2}{4(1.71 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1})t}\right)$$

Ha t másodpercekben van megadva, a dimenziók kihagyhatók, és a következő marad:

$$1.00 \times 10^{-6} = \frac{8.686 \times 10^{-2}}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{3.655 \times 10^7}{t}\right) \Rightarrow \exp\left(-\frac{3.655 \times 10^7}{t}\right) = \frac{8.686 \times 10^4}{\sqrt{t}}$$

Az egyenlet próbálgatással történő megoldása alapján: $C = 1 \text{ ppm}$ $x = 50 \text{ cm}$ értéknél ha $t = 1.12 \times 10^7 \text{ s}$ ($= 130 \text{ nap}$), sokkal hosszabb, mint ha a folyadék gáz halmazállapotban van.

22.3.5. Megoldás

A. A kérdés megválaszolásához először meg kell határozni a diffúzív üzemanyag folt széleit. Megegyezés alapján ez többnyire a folt közepétől $\pm 2\sigma$ távolságra található. Ezek alapján a folt szélének házukhoz érkezése:

ha $2\sigma = 50 \text{ m}$

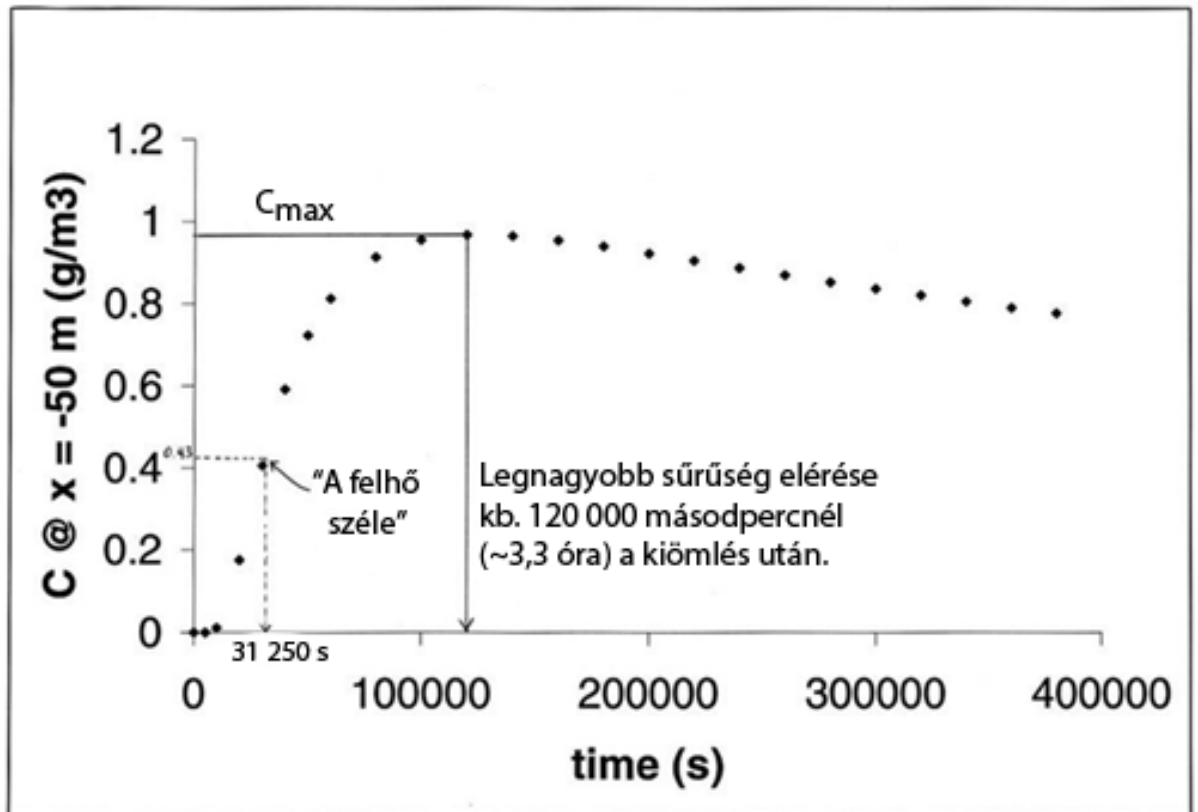
vagy $2\sqrt{2Dt} = 50 \text{ m}$.

Megoldás t időre $= 31.250 \text{ s} = 8.7 \text{ hr}$.

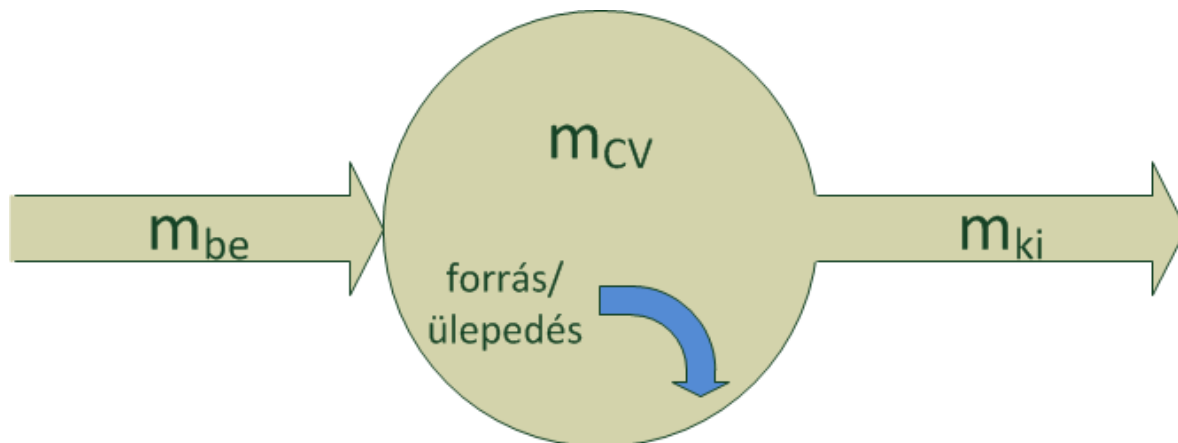
B. A fenti időpontra (31.250 s) az Ön házánál a koncentráció mértéke a [7. egyenlet](#) alapján:

$$\begin{aligned} C(x - 2\sigma, t = 31250 \text{ s}) &= \frac{M}{A\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{(-2\sigma)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= \frac{1 \text{ kg}}{(5 \text{ m} \cdot 1 \text{ m})\sqrt{4\pi(0.01 \text{ m}^2/\text{s})(31250 \text{ s})}} \exp\{-2\} \\ &= 4.3 \times 10^{-4} \text{ kgm}^{-3} = 0.43 \text{ gm}^{-3} \end{aligned}$$

C. A maximum koncentráció $x = -50 \text{ m}$ értéknél a következőképpen határozható meg: $\partial/\partial t [C(x = -50 \text{ m}, t)] = 0$. Mivel ez a meghatározás igencsak bonyolult, a grafikus ábrázolás sokkal egyszerűbb és célravezetőbb.



23. A tömegmegmaradás törvénye



Ez a fejezet egy referencia tartományon belüli tömegmegmaradás törvényét taglalja, integrál és differenciál alakokban. A referencia tartományon belüli olyan advekciós és diffúziós folyamatok matematikai leírásai kerülnek bemutatásra, ahol minden esetben a tömegtranszport a végső eredmény.

A teljes differenciál (derivált) fogalma is bemutatásra kerül az Euler-féle szám (fix pozíció) és a Lagrange-szám (áramlással együtt mozgó) perspektíváinak vonatkozásában. Két későbbi animáció ad magyarázatot majd a teljes differenciál értelmezésére, a térbeli hőmérséklet gradienseken keresztül történő érzékelő mozgások ideiglenes hőmérséklet ingadozásait. A példafeladatok a tömegmegmaradás egyenlet mindkét típusának alkalmazását teszik lehetővé az ipari és környezeti kontextusban felmerülő transzport problémák megoldásában.

23.1. Tömegmegmaradás

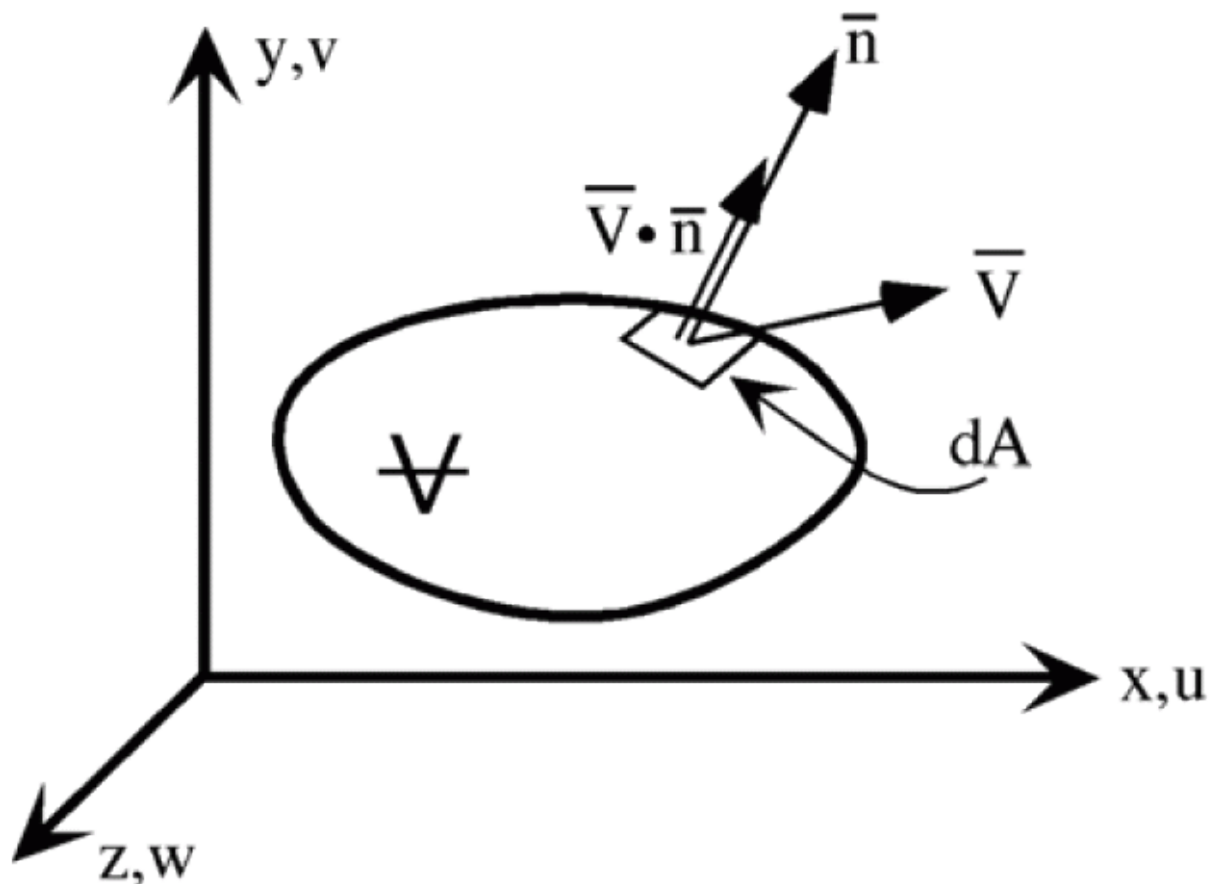
A tömegmegmaradás egy folyadék meghatározott részével kapcsolatos tömegnövekedés és/vagy csökkenést fejez ki. Vegyünk például egy fix, nem deformálódó folyadéktömeget, \mathcal{V} , ez lesz a referencia térfogat (cv), amelynek meghatározott felszíni határai vannak, ezeket felületi határoknak nevezzük (cs). A tömegmegmaradás törvénye azt kívánja meg, hogy a referencia térfogaton belüli tömegváltozás sebessége egyezzen meg a referenciatartományba belépő tömeg sebességének és a tömeggyarapodás vagy tömegvesztés sebességének összegével. A törvény matematikai magyarázata a következőkben olvasható.

A referencia tartományon belül a koncentrációs mező által behatárolt egyedek felosztása zajlik, $C(x,y,z)$. A teljes tömeg a referencia tartományon belül

$$(1) \quad M = \int_{cv} C d\mathcal{V}$$

M idővel változhat, a tömegen belül lévő forráspontok és elnyelési pontoktól függően, vagy a referencia tartományon keresztül haladó tömegáramlások függvényében. Egy folyadék rendszerben kétféle tömegáramlás létezhet, advekció és diffúzió. A referencia tartományból kifelé áramló nettó tömeget az advekció függvényében az integrállal jellemezzük,

$$(2) \quad \int_{cs} C \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$



Itt, $\vec{V} = (u, v, w)$ a sebességvektor és \vec{n} a kifelé mutató felszíni szegmens dA . $\vec{V} \cdot \vec{n}$ az a sebesség komponens, ami merőleges a felszínre dA . \vec{n} a nettó kifelé áramlás V -ből. Tehát a V -ből (az \vec{n} -nel megegyező irányú) pozitívan járul hozzá az integrálhoz és a kiáramlás V -be (az \vec{n} -nel ellentétes irányú) negatívan járul hozzá. A Fick törvény alapján a diffúzió hatására nettó kiáramló referenciatömeg.

$$(3) \quad - \int_{cs} D_n \frac{\partial c}{\partial n} dA$$

Megjegyzendő, hogy az \vec{n} gradiens-koncentráció a tengelymentén, pl. mindenhol merőleges a felszínre, és felfelé irányuló. D_n a diffúziós együttható az \vec{n} tengely mentén anizotrópiát eredményezhet D -ben. Molekuláris diffúzió és/vagy izotrópiás turbulenciára a D nem irányfüggő, és az alsó indexet elhagyhatjuk. A végső matematikai kifejezés a tömegmegmaradás törvénye az (1), (2), és (3) egyenletek összessége.

A tömegmegmaradás integrált alakja (referencia térfogat)

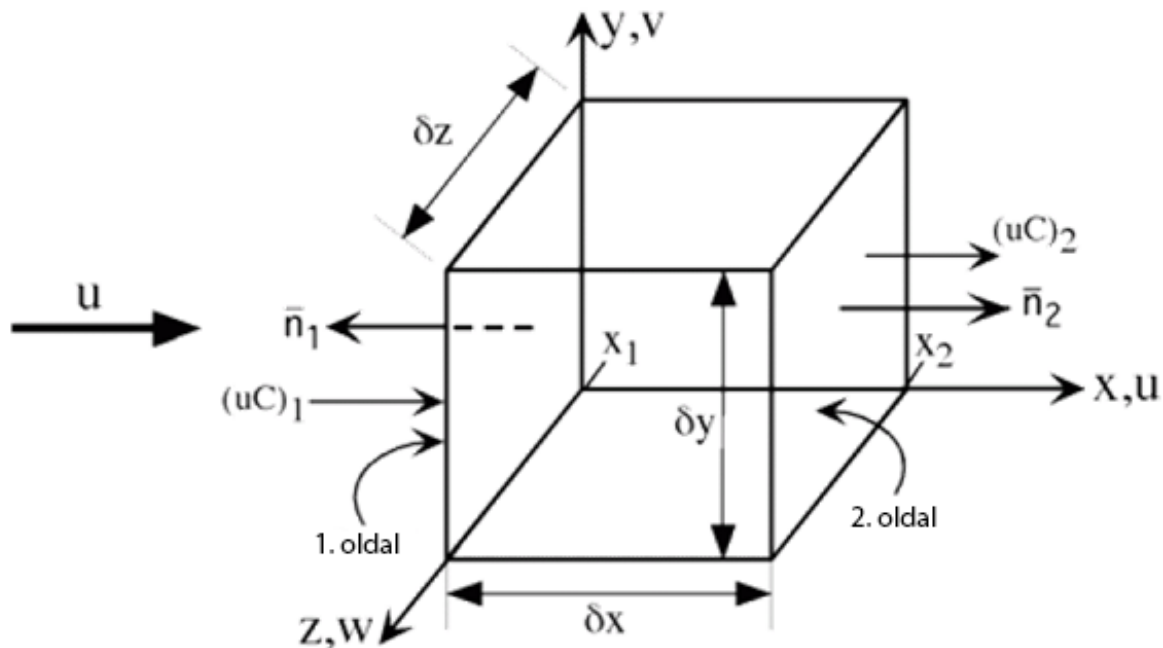
$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} C dV = - \int_{cs} C \vec{V} * \vec{n} dA + \int_{cs} D_n \frac{\partial C}{\partial n} dA \pm S$$

A tömegmegmaradás differenciált alakja

A tömegmegmaradás differenciált alakja egy derivált, a fenti egyenlet értékelésével egy végtelenül kicsi, kocka tömegére. A tömeg elég kicsi ahhoz, hogy feltételezzük, hogy a térfogat belüli koncentráció egyenletesen. A térfogat merev, tehát az ∂x , ∂y , és ∂z dimenziók állandóak. A két felszíni integrál (fenti egyenletekben) áramlatok összegére csökken a kocka minden egyes felszínén keresztül.

$$(5) \quad \frac{\partial C}{\partial t} \partial V = \sum_{i=1}^6 \left[-C \vec{V} * \vec{n} dA + D_n \frac{\partial C}{\partial n} dA \right]_i \pm S$$

Példaként, határozzuk meg az áramlatokat az x irányában a számozott felszíneken, és rögzítve az $x = x_1$ és x_2 pontokban.



Az 1. felszínen \vec{n} -k negatív x irányban vannak, tehát, a $\vec{V} * \vec{n} = -u$ és a $\frac{\partial C}{\partial n} = -\frac{\partial C}{\partial x}$ felszíni integrálok értékelése az 1. felszínre:

$$(6) \quad \text{Az 1. felszínen átmenő áramlás} = (uC)_1 \partial y \partial z - \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right)_1 \partial y \partial z$$

Hasonlóan a 2. felszínre, de \vec{n} pontok most a pozitív x irányban vannak:

$$(7) \quad \text{Az 2. felszínen átmenő áramlás} = (uC)_2 \partial y \partial z + \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right)_2 \partial y \partial z$$

A referencia térfogatba történő nettó áramlása a fenti két egyenlet összege:

$$(8) \quad \text{Nettó x irányú áramlás} = \left((uC)_1 - (uC)_2 - \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right)_1 + \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right)_2 \right) \partial y \partial z$$

Ha azt feltételezzük, hogy C , u , $\partial C/\partial x$, és D_x folytonos függvények, a Taylor expanziót használhatjuk, hogy minden egyes paramétert kifejezzünk x_2 -ben mint ugyanannak a paraméternek a függvényét x_1 -ben.

$$(9) \quad (uC)_2 = (uC)_1 + \frac{\partial}{\partial x}(uC)\partial x + \text{magasabbrendű terminusok}$$

$$(10) \quad \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right)_2 = \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right)_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) \partial x + \text{magasabbrendű terminusok}$$

Ha a magasabb rendű terminusokat elhagyjuk, és felcseréljük $(uC)_2$ és $(D_x \partial C/\partial x)_2$ kifejezéseket a nettó x irányú áramlás egyenletében, akkor a következőt kapjuk:

$$(11) \quad \text{Nettó x irányú áramlás} = \left[-\frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right] \partial x \partial y \partial z$$

Hasonló kifejezéseket találhatunk a fennmaradó négy felületre vonatkozóan is. Ezeket összesítjük tömegmegmaradás differenciális alakjába és tudomásul vesszük, hogy $\partial V = \partial x \partial y \partial z$.

A tömegmegmaradás derivált alakja

$$(12) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial uC}{\partial x} - \frac{\partial vC}{\partial y} - \frac{\partial wC}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial C}{\partial z} \pm S$$

Ezt az egyenletet egyszerűsíthetjük a következő feltételekkel. Először, határozzuk meg az advekción áramlások kiterjedését a fenti egyenletben,

$$(13) \quad \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial vC}{\partial y} + \frac{\partial wC}{\partial z} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] C + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z}$$

Amennyiben a mező összenyomhatatlan, akkor a folytonosságból eredően

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Ezért a fenti egyenletben a zárójeles részt elhagyhatjuk. Tehát a tömegmegmaradás összenyomhatatlan áramlatra a következőképpen írható fel. Az advekción terminusok a bal oldalon vannak.

Tömegmegmaradás összenyomhatatlan áramlatra

$$(14) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial c}{\partial z} \pm S$$

Tovább, amikor a diffúziós együttható homogén, $D_i \neq f(x, y, \text{ or } z)$,

$$(14a) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \pm S$$

Ha a diffúziós együttható izotrópikus, akkor $D_x = D_y = D_z$, és ezt követően

$$(14b) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = D \left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right] \pm S$$

Lamináris áramlások esetében molekuláris diffúzió irányítja a diffúziós áramlást. Általánosságban, a molekuláris diffúzió homogén és izotrópikus, tehát (14b) megfelelő a lamináris áramláshoz. Turbulens áramlások esetében turbulens transzport határozza meg a diffúziós áramlást. Általánosságban a turbulens mező heterogén és nem izotrópikus, és a diffúziós együttható is hasonlóképpen.

23.1.1. Anyagi derivált

Folyadékmozgás és bármilyen alkotóelem (hőmérséklet, koncentráció) szállítását folyadék által, kétféle megközelítéssel lehet leírni, az egyik rögzített, a másik az áramlással együtt áramlik. Az Euler-féle perspektívából az áramlás és annak skalárja rögzített pozíciók figyelembevételével történik. $\vec{X} = (x, y, z)$ és az időre tekintettel (t) így jelölhető $\vec{V}(\vec{X}, t)$ and $C(\vec{X}, t)$ A Lagrange-féle megoldás perspektívájából a mérés az áramlással együtt mozog, és az egyes folyadékrészecske történetét rögzíti. Nem úgy, mint az Euler-féle leírás, amelyben a térbeli pozíció egy rögzített referencia.

A Lagrange-féle perspektívában a térbeli pozíció a részecske egy másik változója. Az áramlat változóit az idő függvényében (t) egyetlen elsődleges referencia pozícióra írjuk fel, pl, \vec{X}_0 a részecskepozíciója t = 0 időben, tehát a változók a következők lesznek $\vec{X}(\vec{X}_0, t)$ és $C(\vec{X}_0, t)$.

Az Euler-féle perspektíva általánosságban könnyebben bemutatható, és éppen ezért szélesebb körben használatos elemzésre és áramlat leírásokra. Bár az áramlatok fizikája és transzportja alapjaiban sokkal inkább a Lagrange-féle perspektívához áll közelebb. Például a Navier-Stokes egyenlet Newton második törvényét ($\vec{F} = m\vec{a}$) szemlélteti, amit folyadékrészecskékre alkalmaznak. Transzport problémákra, pl. egy filoplankton folt mozgását bemérni, ahogyan az növekszik (forrás), áldozatul esik (elnyelési pont) és diffúzál. Ekkor lehet látni a Lagrange-féle perspektíva előnyét, ahogyan a koncentrációt megbecsüli a foltot követve. Mivel mindkét perspektíva nagyon jelentős, így az is fontos, hogy megértsük a kettő közti különbséget is.

Vegyük $F(x,y,z,t)$ mint az áramlat egyik változóját, ahogyan azt a rögzített Euler-féle koordináták is leírják (x, y, z). Ezt a leírást a Lagrange-féle perspektívához szeretnénk kötni, azért, hogy a az F-ben mért sebességváltozásokat feljegyezzük, amint az egy individuális részecske mozgását követi. Először, leírjuk a változást F-ben, (dF), a kis mértékű spatiális helyzetváltozás ($d\vec{X}$) és/vagy idő változás (dt) miatt:

$$(15) \quad dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

Következő lépésben korlátozzuk a hozamot dt and dX , tehát azok egy individuális részecske pályáját követik, ezek $dx = u dt$, $dy = v dt$, and $dz = w dt$. Majd fenti egyenletet átalakítjuk,

$$(16) \quad dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + u \frac{\partial F}{\partial x} dt + v \frac{\partial F}{\partial y} dt + w \frac{\partial F}{\partial z} dt$$

A dt -vel osztva az egyenletet, olyan deriváltat kapunk, ami az F -ben mért sebességváltozást jelöli, amikor az egy folyadék-részecske pályáját követi. Ahhoz, hogy ezt a speciális definíciót kihangsúlyozzuk, a derivált adott DF/Dt esetén pl.

$$(17) \quad \frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z}$$

A DF/Dt hányadost anyagi deriválnak hívjuk, (részecske derivált, teljes derivált) és akkor alkalmazzuk, ha egy részecske mozgását követjük. Az anyagi deriválnak két része van. Az egyik, $\partial F/\partial t$, a lokális derivált, ami a változás sebességét jelöli bármely rögzített pontban. Egyenletes áramlásnál, $\partial/\partial t = 0$. A másik tag, $u\partial F/\partial x + v\partial F/\partial y + w\partial F/\partial z$, az advekciónak a derivált, mivel minden F -ben lévő változást jelöl, ami emelkedik akkor, amikor a folyadékkelem advektál F -ben, térbeli gradienseken keresztül. A következő animációk segítenek az anyagi derivált ábrázolásában.

Állandó hőmérsékletű mező: Ez az animáció egy egydimenziós rendszert mutat, ahol a térbeli hőmérséklet gradiense $T(x)$. A hőmérsékleti mérések (fehér pontok) az áramlattal változnak, Lagrange-féle megfigyeléssel. A mérés az anyagi (teljes) deriváltat rögzíti, ami egy dimenzióban,

$$(18) \quad \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x}$$

A meghatározott pontokban (A, B, és C) lévő mérések Euler-féle megfigyeléseket feltételeznek. Állandó hőmérsékletű mező van jelen, *i.e.* $\partial T/\partial t = 0$, tehát az anyagi derivált egyenlő az advekciónak a deriválttal, $DT/Dt = u \partial T/\partial x$. Ezt az értéket az animáció jobb alsó sarkában történt mérés mutatja. Az itt bemutatott hőmérsékletű mező egy fűtőelemen keresztül történő állandó, egyenletes áramlásból származhat. A folyadék hőmérséklete egyenletesen emelkedik, ahogyan a hó az áramlási mederbe ér.

Nem állandó hőmérsékletű mező: Ez az animáció egy egydimenziós rendszert mutat, nem állandó hőmérsékletű mezővel, $T(x, t)$. Az egyik mérés az áramlással együtt mozog, (fehér pont) u sebességgel, és a fenti egyenletben jelölt anyagi deriváltat rögzíti. További három mérést helyezünk fix pontokon A, B, és C. Ezek a mérések a helyi deriváltat rögzítik, $\partial T/\partial t$, ami nem zéróértékű (nem állandó), de minden egyes pozícióban ugyanaz. Minden egyes derivált értéke adott a jobb alsó sarkban.

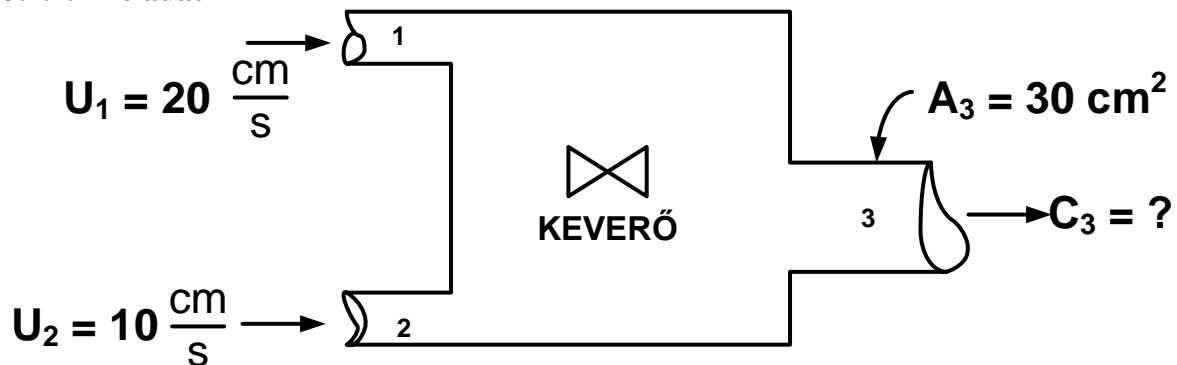
Állandó, térben felgyorsult csőben történő áramlás: Ez az animáció egy csővön keresztül felgyorsítja az áramlást, amint a keresztmetszet csökken, pl. $\partial u/\partial x > 0$. Három hőmérsékletmérés történik, rögzített pontokban, A, B, és C, azt mutatja, hogy az áramlás állandó, $\partial u/\partial t = 0$ minden pozícióban. Egy másik sebességmérés az áramlással együtt mozog (kék pont) és az anyagi deriváltat rögzíti, Du/Dt . A cső minden egyes részében, $Du/Dt = 0$, ahogyan az kék jelölésen is

látható a sebesség vs. idő grafikonon. A keresztmetszeti területen belül történő változásokra a folyadék lokálisan felgyorsul, $\partial u/\partial x > 0$, ezekben a pozíciókban $Du/Dt = u\partial u/\partial x$.

Mekkora a középsebesség a rendszerben? A transzport perspektívából a legjobb definíció az átlagsebességre a Lagrange-féle definíció, pl. az a sebesség, amit az áramlással együtt mozgó mérő mutat. A mérés 109 másodpercig tart, hogy a csövet keresztezze, ami 90-m hosszú. Ez egy $90/109 = 0.83 \text{ ms}^{-1}$ sebességet jelöl. Az átlagsebességet az Euler-féle megközelítésből is meg lehet oldani (a sebesség térbeli átlaga a három szekción belül). Mivel a szegmens hosszúságok ebben az egydimenziós rendszerben, az átlag egyenesen meghatározható: $(0.50 + 0.89 + 2.0)/3 = 1.13 \text{ m/s}$. Ez az érték jelentéstartalom nélküli, a transzport perspektívájából, mivel nem jelöli az utazási időt a rendszeren keresztül, pl. $90\text{-m}/1.13\text{-ms}^{-1} = 80\text{s} \neq 109\text{s}$.

23.2. Feladatsor

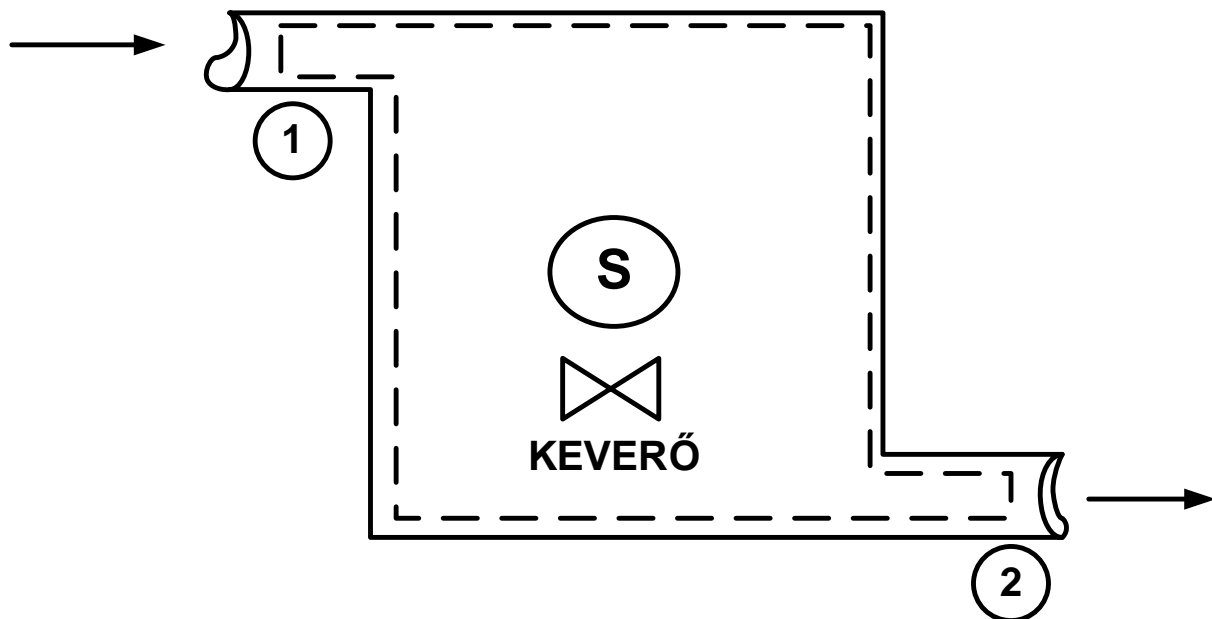
23.2.1. Feladat



Adott két csatorna, mindkettő 10 cm^2 keresztmetszettel, vizet szállítanak egy keverőkamrába. A felső cső oxigénnel dúsított vizet szállít, ($C_1 = 9 \text{ mg/l}$), az alsó csatorna pedig oxigénmentes vizet ($C_2 = 0 \text{ mg/l}$). Egy keverő a kamra belsejében gyors sebességgel keveri össze a két áramlást, tehát a tartályban lévő koncentráció térben egyenletesen oszlik el. Ha azt feltételezzük, hogy a rendszer állandósult állapotban van, akkor mekkora C_3 értéke?

23.2.2. Feladat

Egy jól vegyülő tartályba két csőből áramlik folyadék, aminek keresztmetszeti területe, $A_1 = 10 \text{ cm}^2$. A beáramló sebesség $U_1 = 10 \text{ cm/s}$. A tartály belsejében egy gipszlabda lassan oldódik, így kalcium karbonátot egyenletesen juttatva a vízbe, $S = +5 \text{ g/s}$. A kivezető és a bevezető csövek területe ugyanakkora. A beáramlásban nincs kalcium karbonát. Állandósult állapotban mekkora a kiáramló koncentráció?



23.2.3. Feladat

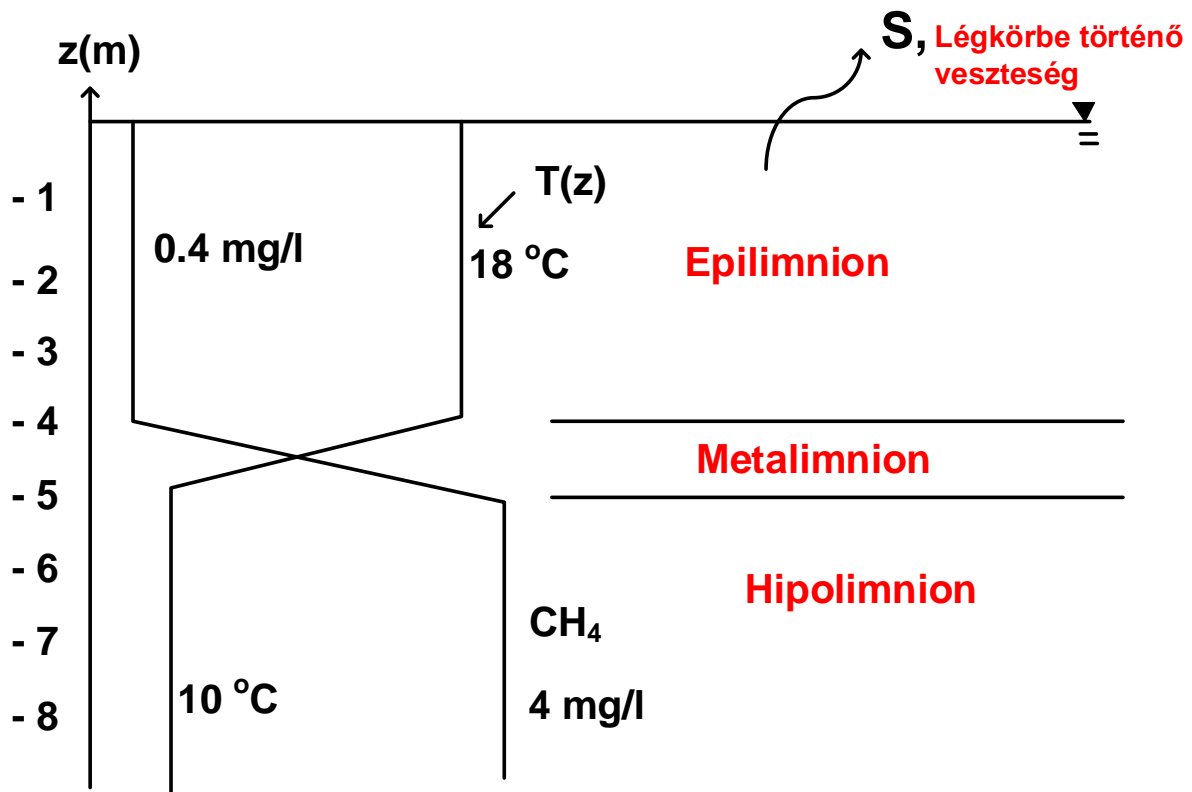
Két egyenként $A = 20 \text{ cm}^2$ -es átmérőjű vízvezetékcsövet egyesítünk egy $A_3 = 40 \text{ cm}^2$ -es átmérőjű csőben. A két csőben különböző hőmérsékletű víz érkezik ($T_1 = 10^\circ \text{C}$ és $T_2 = 20^\circ \text{C}$). Ha a térfogatárama a két bejövő csőnek azonos mi a kifolyó cső hőmérséklete. (A csövek tökéletesen szigeteltnek tekintendők.)

23.2.4. Feladat

Egy sekély folyó egy árnyékos, fás területről áramlik egy nyílt mező irányába $x = 0$ pontban. Amikor eléri a nyílt területet, ($x > 0$) a folyót napsugárzás éri, $H_3 = 800 \text{ watts m}^{-2}$. Ha a folyó egy állandó hőmérsékletű (T_0) erdőből érkezik, találjuk meg a hőmérséklet gradienseket a folyó mentén, $\partial T / \partial x$, esetében $x > 0$. A folyó $h = 1 \text{ m}$ mély és $b = 10 \text{ m}$ széles, valamint $U = 1 \text{ ms}^{-1}$ sebességgel áramlik. A diffúziós együttható homogén és izotrópikus, $D = 0.1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

23.2.5. Feladat

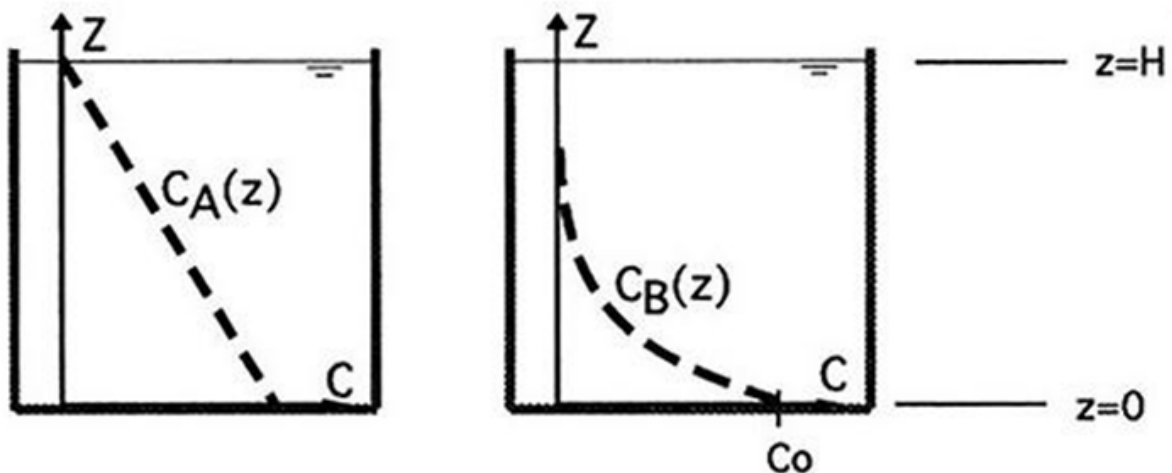
Egy rétegzett tó alsó rétegében magas metán koncentráció mérhető (CH_4). A hőmérsékletemelkedéssel járó turbulencián keresztül a sűrűség gradiensek (pl. a vertikális turbulencia diffúzió) ebben a térségben lelassul. ($D_2 = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$). E réteg felett a víz jól vegyült. A tóba egy beáramlás és egy kiáramlása van, $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$. A beáramlás nem tartalmaz metánt. Feltételezzük, hogy az alábbi feltételek állandósult állapotra utalnak, becsüljük meg a légkörbe áramló (elnyelési pont) metánt. A tó felületének területe 10^6 m^2 .



23.2.6. Feladat

Kémiai koncentrációt mérünk két vízzel töltött mérőpohárban. A koncentrációs profilok az alábbiakban láthatóak. A vízszlopon belül nincs sem forrás, sem elnyelési pont egyik kémiai anyag esetében sem. A jelzésű kémiai anyag volatilis, B nem. A profilalak alapján.

1. Jelöljük meg az áramlás irányát $z = 0$ pontban, úgy hogy $z = H$.
2. A rendszer állandósult állapotban van? Ha nem, vázoljuk fel a kémiai profil alakulásának profilját.
- 3.



23.2.7. Feladat

Több víztömeg szenved oxigénhiányban, alacsony oldott oxigén szinttel a vízoszlopban, a filoplanktonok légzésének köszönhetően. Monger tó is egy ilyen víztömeg, Dél-Ausztráliában. Egy kollégád arra kér, becsüld meg az oldott oxigén profilt a tóban, és határozd meg hogy fennáll-e az oxigénhiányos állapot eshetősége. Előzetes vizsgálatok szerint a tavon keresztül elhanyagolható mértékű horizontális oldott oxigén gradiensek vannak jelen. De mégis, a filoplanktonok oxigén-felhasználásának hatása és a felszínen való vándorlása jelentős mértékű oldott oxigén gradienseket produkál.

- Állandósult állapot feltételezve, deriváljuk a vezéregyenletet az oldott oxigén vertikális profiljára (z), a 14b egyenletből. Azt is feltételezzük hogy a filoplankton elsőrendű oxigén elnyelőként funkcionál, (pl. a felhasznált oldott oxigén sebessége arányos a víz koncentrációjával, A vertikális beáramlások a tóba nem bírnak nagy jelentőséggel.
- Oldd meg az egyenletet a következő kikötésekkel:
 - A felszíni reakció ($z = 0$) a felszínnél található vízréteget oxigénnel dúsítva tartja, a koncentráció mértéke 8 mg/L .
 - az üledékek ($z = -10 \text{ m}$) elég áthatolhatatlanok és abiotikusak ahhoz, hogy az oldott oxigénnek áramlásmentes határt szabjanak.

Használj tipikus értékeket $D = 0.1 \text{ cm}^2/\text{s}$ és $k = 0.05 \text{ nap}^{-1}$ (ami magas filoplankton szintet jelöl)

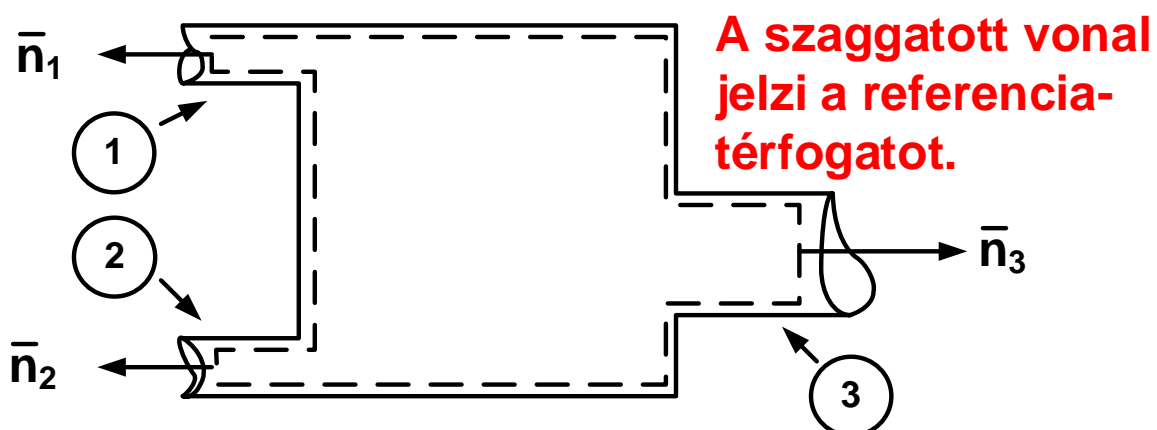
- A vízoszlopban hol várható a legalacsonyabb oldott oxigén koncentráció?
- Az egyik kollégád jelzi, hogy az 1 mg/L alatti oldott oxigén koncentráció veszélyes. Határozd meg, hogy a Monger tóban veszélyes mértékben van-e jelen oldott oxigén. Mi történik akkor, ha filoplanktonok populációja megnövekedik, $k = 0.1 \text{ nap}^{-1}$?

23.3. Megoldások

23.3.1. Megoldás

Egy megfelelő referencia-térfogatot rajzolunk a tartály belső térfogata köré, és kiterjesztjük azt az 1-es és 2-es csövekre, az egyenletes koncentráció érdekében.

$\partial C / \partial n = 0$ a cső mentén.



Értékeljük a (4) egyenletet erre a referencia-térfogatra.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} C dV = - \int_{CS} C \vec{V} \cdot \vec{n} dA + \int_{CS} D_n \frac{\partial C}{\partial n} dA \pm S$$

A.

Mivel állandósult állapotot feltételezünk, $\partial / \partial t = 0$, az első tag 0. Sem forrás, sem elnyelési pont nincs említve. $S = 0$. Értékeljük a két felszíni integrált, \int_{CS} , az áramlás 3 megjelölt területén. 1, 2 és 3 felszínnek a csövektől elég nagy távolságban helyezkednek el. $\partial C / \partial n = 0$ minden egyes felszínen. Nincs diffúziós áramlás,

$$\int_{CS} D_n \frac{\partial C}{\partial n} dA = 0$$

B. Értékeljük $\int_{CS} \vec{V} \cdot \vec{n} dA$ C minden egyes áramlási területen,

$$0 = u_1 A_1 C_1 + u_2 A_2 C_2 - u_3 A_3 C_3$$

A tömegmegmaradás törvényéből kiindulva, $u_1 A_1 + u_2 A_2 = u_3 A_3$ nyomásmentes áramlásnál.

C. Ezt felhasználjuk ahhoz, hogy $u_3 A_3$ formát behelyettesítjük (B)-be és megoldjuk C_3 -ra

$$C_3 = \frac{u_1 A_1 C_1 + u_2 A_2 C_2}{(u_1 A_1 + u_2 A_2)}$$

vagy

$$C_3 = \frac{(20 \text{ cm/s})(10 \text{ cm}^2)(9 \text{ mg/l}) + (10 \text{ cm/s})(10 \text{ cm}^2)(0 \text{ mg/l})}{(20 \text{ cm/s})(10 \text{ cm}^2) + (10 \text{ cm/s})(10 \text{ cm}^2)}$$

$$1.00 \times 10^{-6} = \frac{0.1 \text{ g}}{(\pi(5 \text{ cm})^2)\sqrt{4\pi(1.71 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1})t}} \exp\left(-\frac{(50 \text{ cm})^2}{4(1.71 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1})t}\right)$$

23.3.2. Megoldás

A tömegmegmaradás egyenletének integrált formáját alkalmazzuk a referencia térfogatra:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} C dV = - \int_{CS} C \vec{V} \cdot \vec{n} dA + \int_{CS} D_n \frac{\partial C}{\partial n} dA + S$$

Ø, mert feltételezzük az állandósult állapotot

kiértékelés az 1,2 keresztmetszeti felületnél

Ø, mert oda helyezzük az 1 és 2 felületeket, ahol $\frac{\partial C}{\partial n} = 0$

adott

A.

$$0 = u_1 A_1 C_1 - u_2 A_2 C_2 + S$$

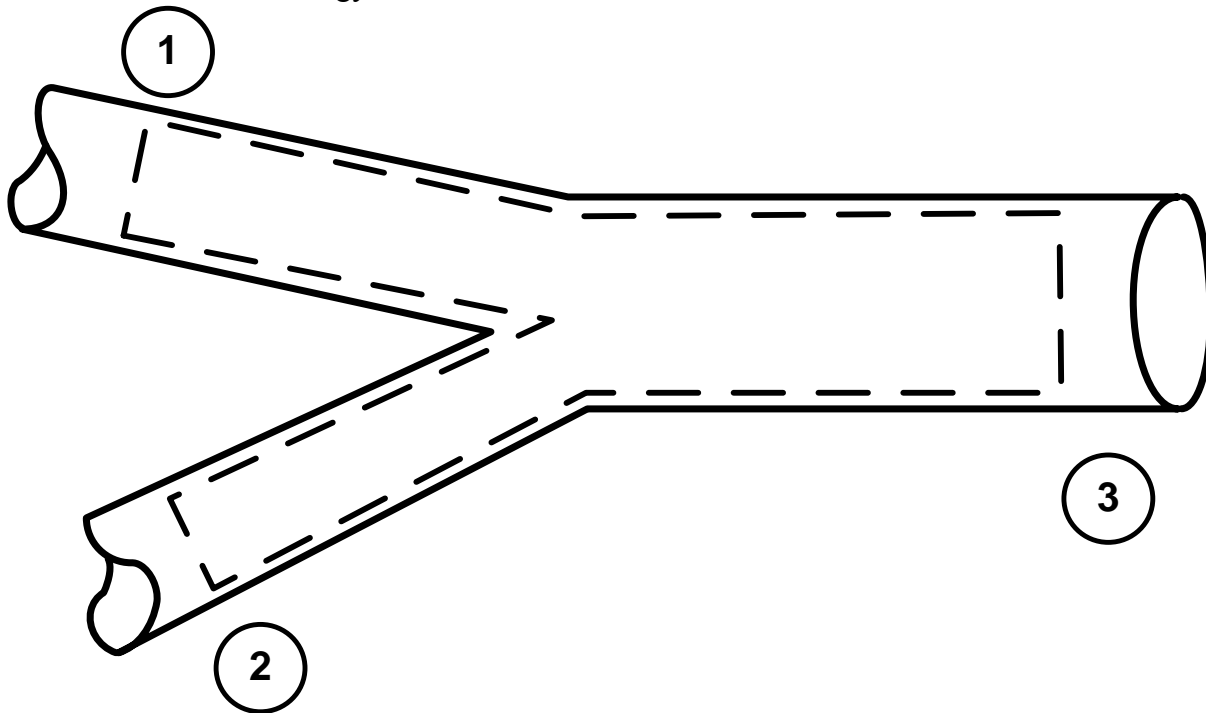
B.

Vegyük észre: a folytonosságból eredően $u_2 = u_1$, mivel $A_2 = A_1$

$$C_2 = \frac{S}{u_2 A_2} = \frac{S}{u_1 A_1} = \frac{5 \text{ g/s}}{(10 \text{ cm/s})(10 \text{ cm}^2)} = 50 \text{ mg/cm}^3$$

23.3.3. Megoldás

Olyan referencia tömeget válasszunk, amely elég messze helyezkedik el az egybeesési ponttól ahol $\partial T / \partial n = 0$ minden egyes áramlási területen.



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} C dV = \int_{CS} C \vec{V} \cdot \vec{n} dA + \int_{CS} Dn \frac{\partial C}{\partial n} dA \pm S$$

A.

A hőenergia koncentrációja,

$$C [Jm^{-3}] = \rho c_p T$$

folyadék sűrűsége [kgm ⁻³]	fajhő [Jkg ⁻¹ K ⁻¹]	hőmérséklet [K]
---	---	--------------------

$C_p = 4200 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ (víz esetén)

Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy ρ , $c_p \neq f(T)$. Ha állandósult állapot van jelen, akkor az egyenlet első tagjának értéke 0 (A). Mivel 1, 2 és 3 felszínek adottak, ahol $\partial T / \partial n = 0$, a diffúziós áramlás értéke is 0. A csatornák szigeteltek, így $S = 0$. Tehát végül (A) a következőképpen alakul,

$$0 = \rho c_p T_1 u_1 A_1 + \rho c_p T_2 u_2 A_2 - \rho c_p T_3 u_3 A_3$$

B.

Ha elhagyjuk ρc_p , és megoldjuk T_3 -ra, akkor

$$T_3 = \frac{u_1 A_1 T_1 + u_2 A_2 T_2}{u_3 A_3}$$

C.

Az egyenletből: $u_1 A_1 = u_2 A_2$, és a folyadék tömegmegmaradásából $(u_1 A_1 + u_2 A_2) = u_3 A_3$.

$$T_3 = \frac{u_1 A_1 (T_1 + T_2)}{2u_1 A_1} = \frac{1}{2} (T_1 + T_2)$$

D.

$$\therefore T_3 = 15 \text{ deg C [288K]}$$

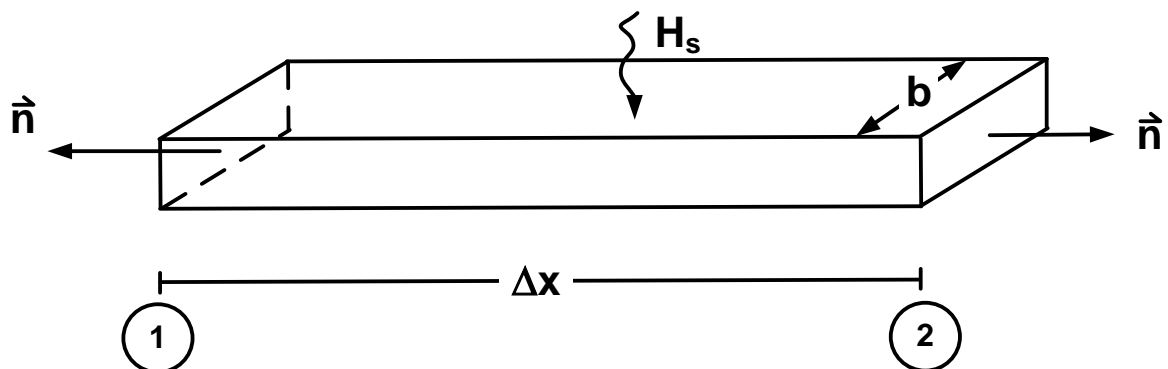
23.3.4. Megoldás

Referencia-térfogat megközelítésből:

Válasszuk ki egy rövid folyót, ΔX , és értékeljük a referencia-térfogatot (integrált) a tömegmegmaradás egyenletéből. A fűtési energia megmaradásához, cseréljük fel $C = \rho c_p T$ a 4. egyenletben.

A.

$$\frac{\partial C}{\partial n} \int_{CV} \rho c_p T dV = - \int_{CS} \rho c_p T \vec{V} \cdot \vec{n} dA + \int_{CV} D_n \frac{\partial C}{\partial n} dA + H_s \Delta x b$$



Mivel a problémamegoldás nem jelöl változékonyságot, így állandó áramlást feltételezünk, pl. $\partial / \partial t = 0$.

B. Értékeljük az áramlási terminusokat (A),

$$0 = -\rho c_p U b h (T_2 - T_1) + \rho c_p D b h \left(\frac{\partial T}{\partial X} \Big|_2 - \frac{\partial T}{\partial X} \Big|_1 \right) + H_s \Delta x b$$

A Taylor- expanziót használva, tételezzük fel, hogy T folyamatos X-ben,

$$T_2 = T_1 + \frac{\partial T}{\partial X} \Delta X$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_2 = \left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_1 + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial T}{\partial X} \right) \Delta X$$

A hosszabb alakot helyettesítsük be (B)-be, és hozzuk egyszerűbb alakra a törtet, Δx .

$$0 = \rho c_p h \left(-U \frac{\partial T}{\partial X} + D \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \right) + H_s$$

C.

Ebből ki tudjuk fejezni $\partial T / \partial X$.

Hasznos lehet meghatározni az advekción és diffúziós áramlások relatív fontosságát. Jelen esetben, ebből a rendszerből tudjuk meghatározni $U(\partial T / \partial X)$ és $D(\partial^2 T / \partial X^2)$. Határozzuk meg a referencia térfogat hosszát, Δx , viszonyítási hossz mértékként

$$U \frac{\partial T}{\partial X} \sim U \frac{\Delta T}{\Delta X}$$

$$U \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \sim U \frac{\Delta T}{\Delta X^2}$$

Ahol ΔT a hőmérséklet változás ΔX értékénél. A terminusok relatív terjedelme,

$$\frac{\text{advektív fluxus}}{\text{diffúziós fluxus}} = \frac{U \frac{\Delta T}{\Delta X}}{U \frac{\Delta T}{\Delta X^2}} = \frac{U \Delta X}{D}$$

Ezt a dimenzió nélküli paraméter Peclet-számnak hívják, és a **26.1** lesz róla szó bővebben.

- Ha $U \Delta X / D \gg 1$, akkor az advekción áramlás dominál a diffúziós áramlás fölött, és elhagyhatjuk a $\partial^2 T / \partial X^2 \ll U(\partial T / \partial X)$.

- Ha $U \Delta X / D \ll 1$, diffúziós áramlás $D(\partial^2 T / \partial X^2)$ sokkal nagyobb, mint az advekción áramlás $U(\partial T / \partial X)$, és elhagyhatjuk $U(\partial T / \partial X)$.

Mivel ΔX nem pontosan meghatározott, az a kérdés merül fel, hogy milyen hosszirányú mérték befolyásolja a transzportot?

$$\frac{U \Delta X}{D} \gg 1 \text{ if } \Delta X \gg \frac{D}{U} = \frac{0.1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}}{2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}} = 0.1 \text{ m}$$

\therefore Bármilyen hossz mérték esetében, $\Delta X \gg 0.1 \text{ m}$, a diffúziós hatás t figyelmen kívül hagyhatjuk (A)-ban, ebben az adott rendszerben. A feladat a $\partial T / \partial X$ meghatározását írja elő a folyó mentén. Egy ilyen rendszerben hossz mérték sokkal hosszabb, mint 10 cm, és inkább egy 100 m-től 1 km-ig terjedő skálát jelent. Éppen ezért ebben a rendszerben a diffúziós transzport terminust elhagyhatjuk. Ezt követően (C) leegyszerűsítve

$$0 = -\rho c_p h U \frac{\partial T}{\partial X} + H_s$$

D.
ebből,

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{H_s}{\rho c_p h U} = \frac{J s^{-1} m^{-2}}{(kg m^{-3})(J kg^{-1} K^{-1})(m)(m s^{-1})} = \frac{K}{m}$$

E.
A megadott paramétereket felhasználva,

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{H_s}{\rho c_p h U} = \frac{800 W m^{-2}}{(1000 kg/m^3)(4200 J/kgK)(1 m)(1 m/s)} = 2 \times 10^{-4} K/m = 0.2 C/km$$

F.

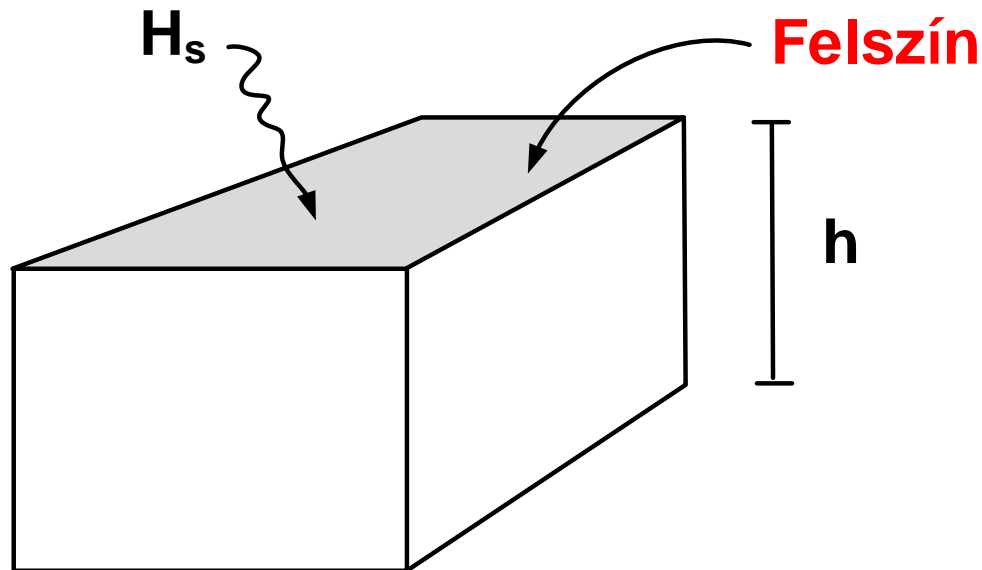
Differenciál megközelítés:

A tömegmegmaradás egyenletét alkalmazhatjuk a hőenergia transzportjára is, de jegyezzük meg, hogy a hőenergia koncentrációja, $C [J/m^3] = \rho c_p T$. Ezt követően a tömegmegmaradás egyenletéből származtatott differenciál forma az összenyomhatatlan áramlásra vonatkozóan,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) + U \frac{\partial}{\partial x}(\rho c_p T) + V \frac{\partial}{\partial y}(\rho c_p T) + W \frac{\partial}{\partial z}(\rho c_p T) \\ = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial}{\partial x}(\rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial}{\partial y}(\rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial}{\partial z}(\rho c_p T) \pm S \end{aligned}$$

G.

- Ha kihagyjuk $\rho = f(T)$, akkor $\rho \neq f(x, y, z, t)$.
- A megoldás szerint $V = W = 0$, és izotróp, homogén $D = D_x = D_y = D_z \neq f(x, y, z)$.
- Ha egyenletes (jól vegyült) rendszert feltételezünk y és z , akkor $T \neq f(y, z)$.
- A forrásterminus adott, $H_s = [J s^{-1} m^{-2}]$. Mivel az egyenlet tömegkoncentrációval számol, így a mélységgel osztani kell az egyenletet, hogy a forrásterminus szilárd egységekben legyen meghatározható..



$$H_s = \frac{J/m^2}{s} = \frac{\text{energia per felszín}}{s}$$

$$\frac{H_s}{h} = \frac{J/m^3}{s} = \frac{\text{energia per térfogat}}{s}$$

Alkalmazzuk a fenti pontokat, és látjuk, hogy (G) értéke lecsökken

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial X} \right] = D \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{H_s}{h}$$

H.

Tipikus hossz mértékekhez a folyómeder mentén, $\Delta X \sim 100\text{m}$ könnyen kimutatható, hogy a diffúziós terminus, $D(\partial^2 T / \partial X^2)$, értéke kisebb a $U(\partial T / \partial X)$ értékhez képest.. Tehát elhagyhatjuk $D(\partial^2 T / \partial X^2) \ll U(\partial T / \partial X)$

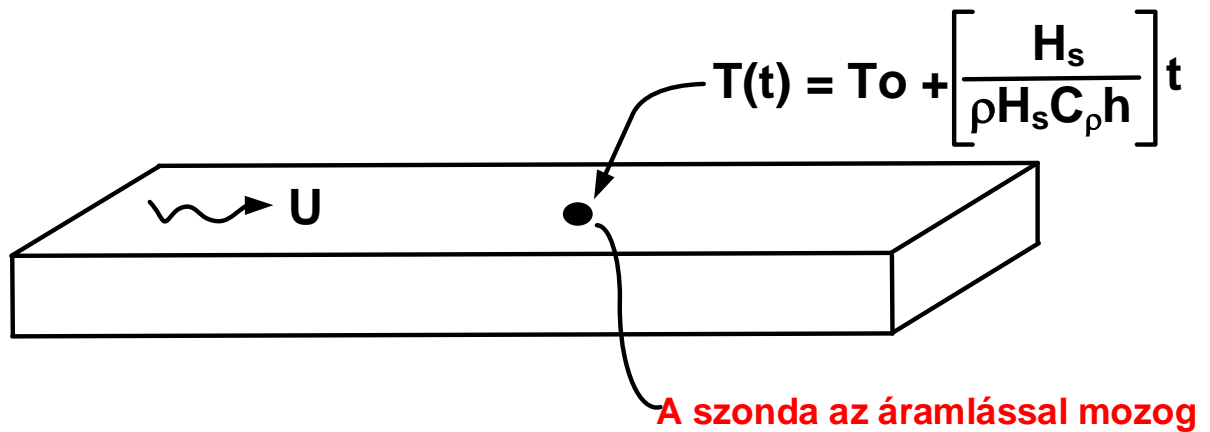
Végül a (H) kifejezésben zárójelben jelzett rész a teljes derivatív.

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial X} = \frac{H_s}{\rho c_p h} = \left[\frac{^\circ\text{C}}{T} \right]$$

I.

Ezt az egyenletet a Lagrange-féle megközelítésben is interpretálhatjuk, a következő folyadékrezecske követően, A hőmérsékletet meg kell mérni, növekvő sebesség

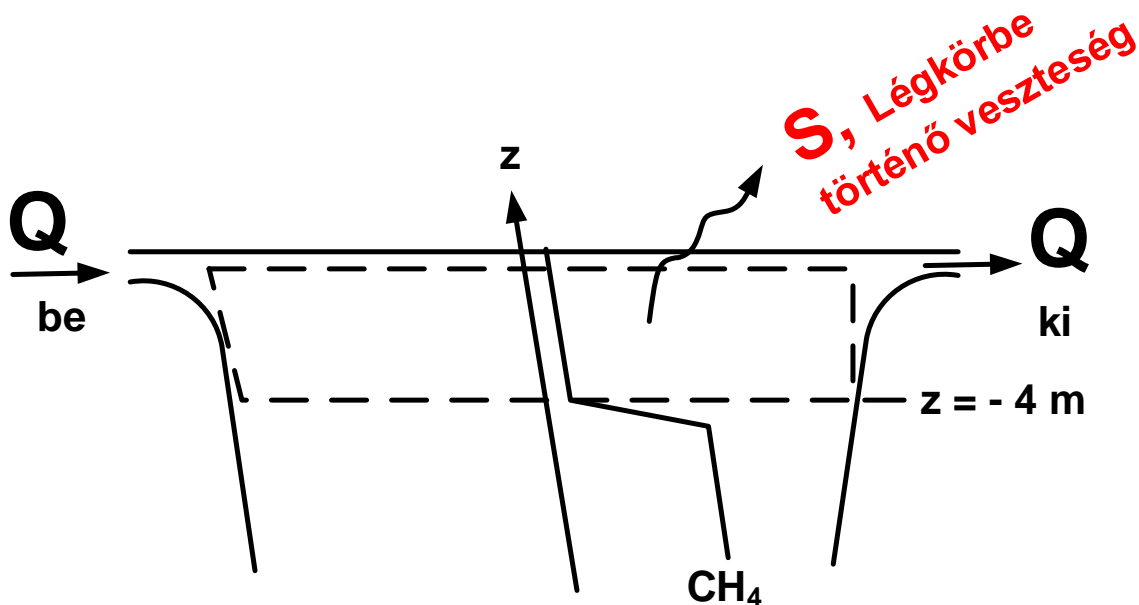
mellett. $\left[\frac{H_s}{\rho c_p h} \right]^\circ \text{C/s}$



Amennyiben az áramlási feltételek állandóak, $\partial T / \partial t = 0$, akkor (I) a térbeli gradiensre is megoldást kínál.

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{H_s}{U \rho c_p h} = \left[\frac{^\circ\text{C}}{\text{L}} \right]$$

23.3.5. Megoldás



A tó felső rétegét adjuk meg referencia térfogatként. A tömegmegmaradás erre a rendszerre, úgy hogy állandósult állapotot feltételezünk,

$$0 = (QC)_{BE} - (QC)_{KI} - D_Z \frac{\partial C}{\partial Z} A - S$$

A.

adott $C_{IN} = 0$. Feltételezzük, hogy a felső réteg jól vegyült. $\therefore C_{OUT} = C_{EPI} = C(z = -4 \text{ m})$. Határozzuk meg a koncentrációs gradienseket a hőmérsékletemelkedés viszonylatában,

$$\left. \frac{\partial C}{\partial Z} \right|_{z=-4} \approx \frac{[C(z = -4) - C(z = -5)]}{[-4 - -5]}$$

Ezt követően oldjuk meg (A)-t S-re,

B.

$$\begin{aligned}
 S &= -QC_{EPI} - D_z A \frac{C_{EPI} - C_{HYPO}}{1 \text{ m}} \\
 &= -(1 \text{ m}^3/\text{s})(0.4 \text{ mg/l}) \\
 &\quad - (2 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1})(10^6 \text{ m}^2) \left[\frac{0.4 - 4 \text{ mg/l}}{1 \text{ m}} \right] = 6.8 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \frac{\text{mg}}{\text{l}} \frac{1000 \text{ l}}{\text{m}^3} \\
 &= 6.8 \text{ g/s}
 \end{aligned}$$

23.3.6. Megoldás

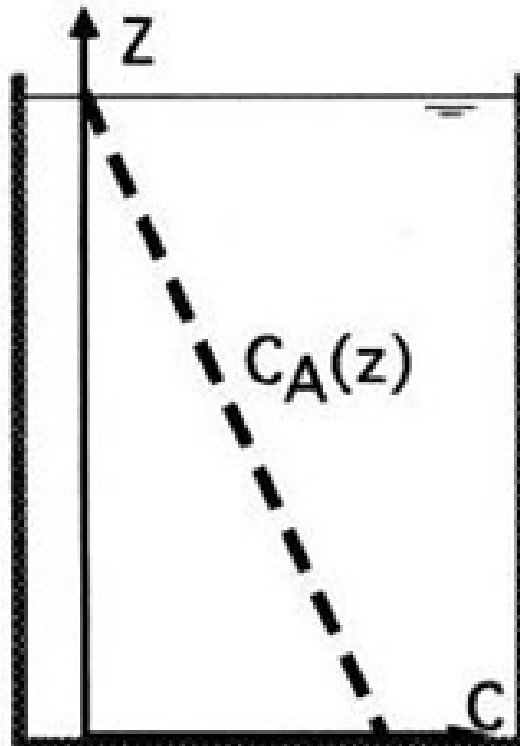
Fick törvényéből,

$$q_z = -DA \frac{\partial C}{\partial Z}$$

1. At $z = 0$ and $z = H$, $\partial C/\partial Z < 0 \therefore q_z > 0$ ami azt jelzi, hogy az áramlások mindkét határvonal mentén felfelé irányulóak.
2. Állandósult állapotban, $\partial C/\partial t = 0$. Egydimenziós tömegmegmaradás egyenletből,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -D_z \frac{\partial^2 C}{\partial Z^2}$$

\therefore állandósult állapotban $\partial^2 C/\partial Z^2 = 0 \therefore \partial C/\partial Z = \text{állandó}$. \therefore a lineáris profil azt jelzi, hogy

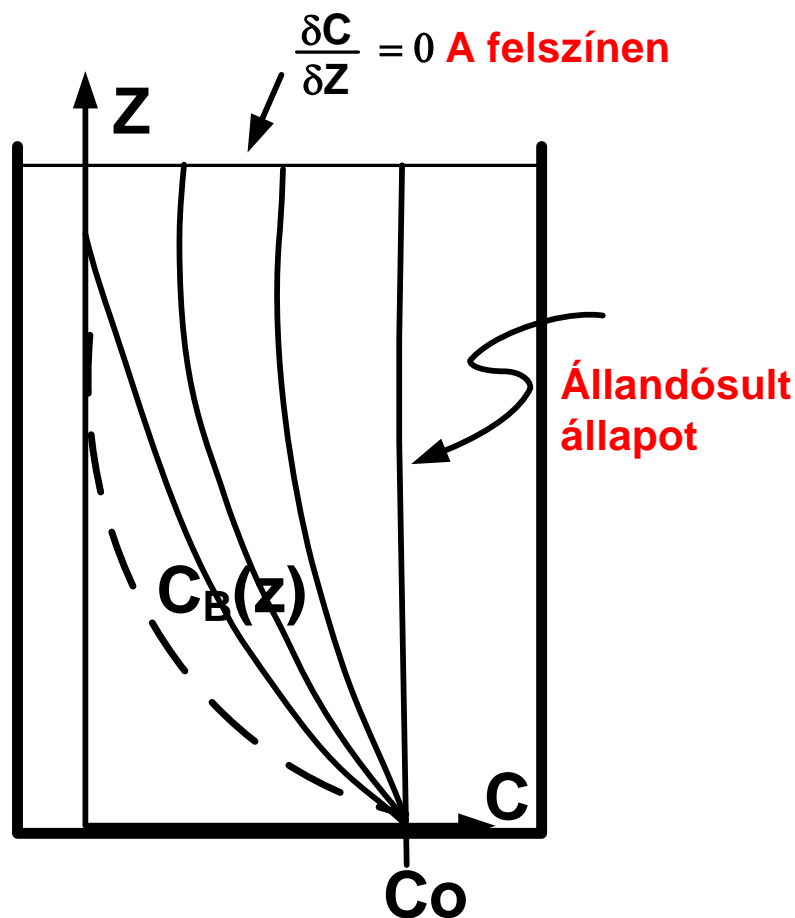


1. $\partial C/\partial Z < 0$ a $z = 0$ pontban. $\therefore q_z > 0$, pozitív és felfelé irányuló. Nincs áramlás a $z = H$ pontban.
2. A rendszer nincs állandósult állapotban.

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial C}{\partial Z} \right) \neq 0, \therefore \text{amegmaradási egyenletből, } \frac{\partial C}{\partial Z} \neq 0$$

A kialakult profil fejlődése az alábbiakban látható. Mivel a kémiai anyag nem volatilitis, a felszín ($z = H$) egy áramlásmentes határ.

$$\therefore \frac{\partial C}{\partial Z} \Big|_{z=H} = 0 \text{ hogy legyen } q_z(z = H) = 0!$$



23.3.7. Megoldás

- a. Az általános egyenlet (14b)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D \left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right] \pm S$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8)

Ebből az egyenletből több terminust elhagyhatunk:

- (1) Mivel állandósult állapotra jellemző feltételekkel számolunk,
- (2), (3), (5) és (6) egyenletek elhanyagolható mértékű horizontális gradienseinek köszönhetően.
- (4) a jelentéktelen vertikális áramlásoknak köszönhetően.

Tehát az egyenlet leegyszerűsíthető a következő alakra

$$0 = D \left[\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right] - S$$

jegyezzük meg, hogy fitoplanktonok oldott oxigént tartalmaznak. Elsőrendű reakciónál, $S = kC$, tehát a vezéregyenletünk a következő lesz

$$D \left[\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right] - kC = 0$$

b. Az általános megoldás erre a vezéregyenletre:

$$C(z) = A \exp\left(z \sqrt{\frac{k}{D}}\right) + B \exp\left(-z \sqrt{\frac{k}{D}}\right)$$

ahol A és B állandók. A határfeltételeket arra alkalmazzuk, hogy meghatározzuk A és B értékét.

$$- C|_{z=0} = 8 \Rightarrow A + B = 8$$

$$- \text{Nincs áramlás } z = -10 \text{ m pontban} \Rightarrow \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=-10} = 0.$$

Éppen ezért,

$$\begin{aligned} A \sqrt{\frac{k}{D}} \exp\left((-10 \text{ m}) \sqrt{\frac{k}{D}}\right) - B \sqrt{\frac{k}{D}} \exp\left(-(-10 \text{ m}) \sqrt{\frac{k}{D}}\right) &= 0 \\ \Rightarrow A \exp\left((-10 \text{ m}) \sqrt{\frac{k}{D}}\right) &= B \exp\left((10 \text{ m}) \sqrt{\frac{k}{D}}\right) = \end{aligned}$$

A kapott eredményeket felhasználva k és D értékeire,

$$\sqrt{\frac{k}{D}} = \sqrt{\frac{0.05 \text{ day}^{-1}}{0.1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}}} = \sqrt{\frac{5.787 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}}{10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}}} = 0.24./\text{m}$$

Ezért a második határfeltételből az következik hogy ,

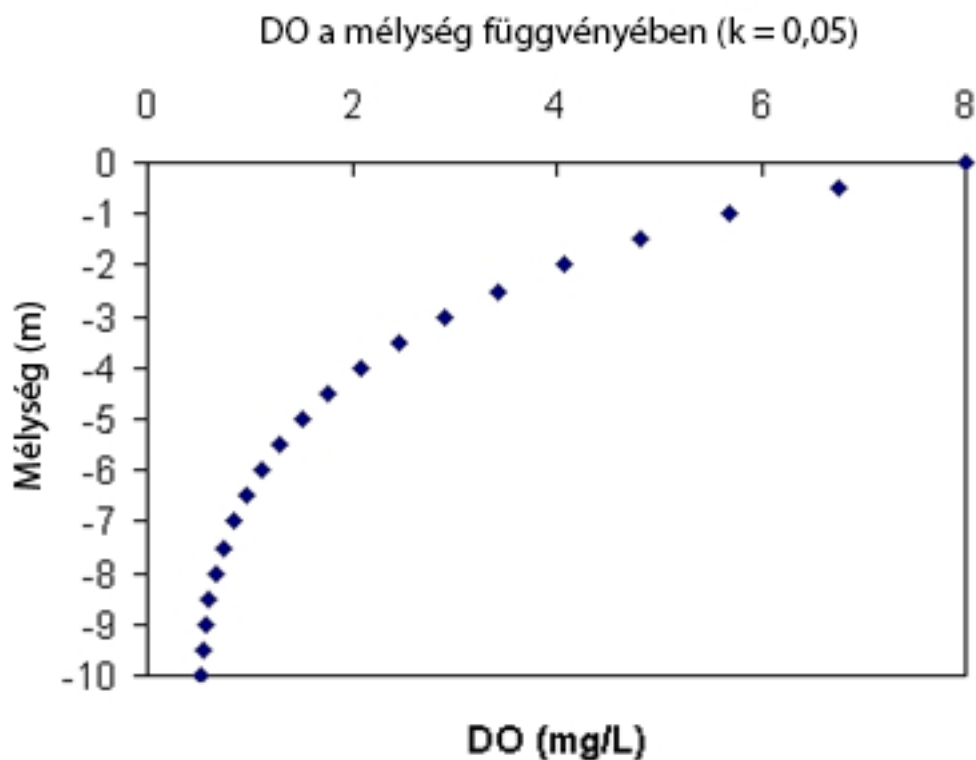
$$A \exp(-2.4) = B \exp(2.4) \Rightarrow 0.091 A = 11.0 B \Rightarrow A = 121.5 B$$

A határfeltétel egyenleteket megoldva, egyidejűleg megkapjuk a következő eredményeket is $A = 7.935$, $B = 0.065$.

Tehát,

$$C(z) = 7.935 \exp(0.240 z) + 0.065 \exp(-0.240 z)$$

- c. Mivel csak a vízoszlopban található oldott oxigén, így a legalacsonyabb oldott oxigén koncentráció a felszíntől legtávolabbi pontban található. Tehát arra számítunk, hogy a legalacsonyabb oldott oxigén koncentráció a $z = -10$ m pontban lesz. Ezt az alábbi vertikális profil is bizonyítja, (a határfeltételeket rögzítettük)



- d. Ahogyan az a fenti tervből is látható, $C_{\min} = 1.4$ mg/L. De amennyiben $k = 0.1 \text{ nap}^{-1}$, a fenti kalkuláció ismétlése egy hozzávetőleges minimum koncentrációs értéket eredményez (0.5 mg/L), ez azt jelenti, hogy a Monger tó veszélynek van kitéve.

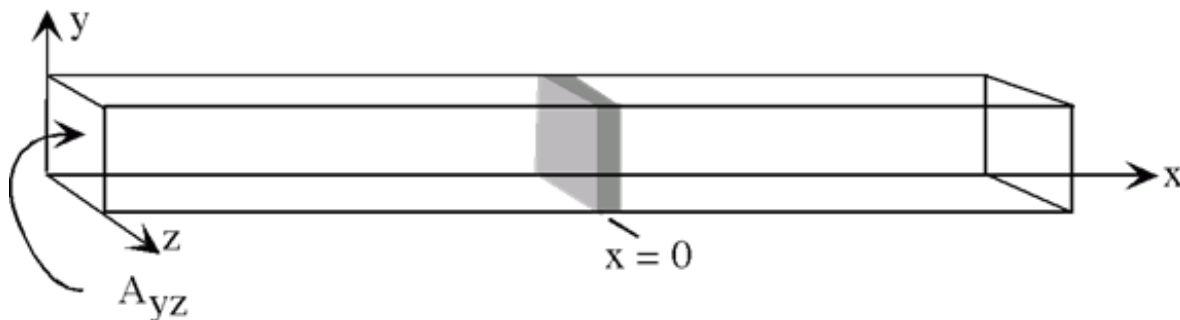
24. Pillanatnyi pontforrás diffúziója

24.1. Pillanatnyi pontforrás diffúziója

A tömegmegmaradás egyenlete más néven transzportegyenletként is ismert, mivel leírható vele a különféle skalárok fluidumokban történő transzportja. Ebben és a következő fejezetekben áttekintjük a transzportegyenlet analitikai megoldásait, melyek segítségével megállapítható, hogyan alakul a tömeg változása különböző határértékek és kiindulási pontok esetében. Izotrópikus és homogén diffúziós együtthatók összenyomhatatlan áramlása mellett a következő transzportegyenlet írható fel. Ennél a pontnál eltekintünk a forrás/süllyedés kifejezés alkalmazásától.

$$(1) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D \left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right]$$

Az első megoldás egységnyi tömeg, M , alakulását mutatja, amennyiben az egy adott időpillanatban, $t=0$ egy állandó fluidumba ($u,v,w = 0$) kerül. A rendszert x -irányba egydimenziósnak vesszük, ugyanis a rendszer ugyanolyan lesz y és z kiterjedésben is, azaz $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ és $\frac{\partial}{\partial z} = 0$. A lenti ábrán egy ilyen modell látható. Egységnyi tömeget engedünk egy hosszú, keskeny csőbe. A tömeg eloszlása egyenletes lesz y - z irányba, x dimenzió irányába pedig elhanyagolható mértékű. A kezdeti koncentráció mértéke $C(x) = M\delta(x)$, ahol $\delta()$ a Dirac delta függvény. Az erre a rendszerre vonatkozó transzportegyenlet az alábbi ábra alatt található.



$$(2) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

ahol, M a $t=0$, $x=0$ helyen értendő

A megoldás, $C(x,t)$, a következőképpen alakul. A fenti egyenlet alapján az lenne várható, hogy a koncentráció értéke M , D [L^2T^{-1}], x [L], és t [T], függvényéből adódik, a dimenziókat zárójelben megadva: tömeg [M], hossz [L] és idő [T]. Egydimenziós rendszer esetén a koncentráció mértékegysége a tömeg/hossz, C [$M L^{-1}$]. A dimenzionális analízis alapján (pl.: Buckingham-féle Pi elmélet), a fenti paraméterek a következő dimenzió nélküli csoportokat adja ki.

$$(3) \quad \frac{C}{M/\sqrt{4\pi Dt}} = f\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

Az egyszerűség kedvéért hozzá vesszük 4π és 4 tényezőket, mivel ezek a végső megoldásban is szerepelnek. $\eta = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$ meghatározása, majd fenti két egyenlet kiértékelése után,

$$(4) \quad \frac{d}{d\eta} \left(\frac{df}{d\eta} + 2f\eta \right) = 0$$

Ha a zárójelben szereplő kifejezésekhez 0 értéket rendelünk, a (4) egyenlethez egy megoldás társítható,

$$(5) \quad \frac{df}{d\eta} + 2f\eta = 0$$

amelynek pedig a megoldása

$$(6) \quad f = A_0 \exp(-\eta^2)$$

ahol A_0 arbitáris állandó. (6) a (3) konkrét formája, ami (2) megoldását adja.

$$(7) \quad C(x, t) = \frac{A_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

Mivel a tömegmegmaradásnak a teljes idő alatt fenn kell állnia, ezért mindenkor érvényes, hogy

$$(8) \quad \int_{x=-\infty}^{\infty} C dx$$

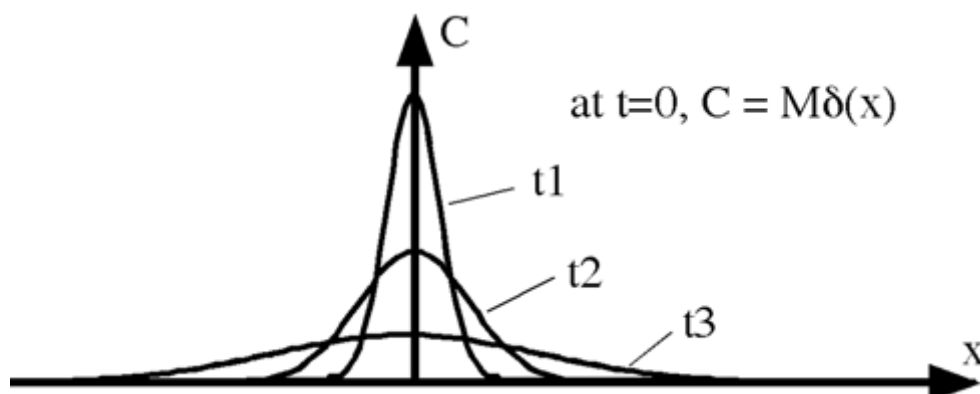
ezért $A_0 = M$. Összességében tehát a következő megoldásra jutunk.

Egydimenziós, pillanatnyi pontforrás

M feloldva úgy, hogy $t = 0$ és $x = 0$.

Kezdeti feltétel, $C(x) = M \delta(x)$.

$$(9) \quad C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) = [M/L]$$



Fontos, hogy a fenti megoldás csak egydimenziós matematikai rendszerekre érvényes, ahol $C[M/L]$. Valós, háromdimenziós rendszerekben a koncentráció egysége szükségképpen M/L^3

lesz. Hogy a (9)-ben szereplő matematikai megoldást valós térben is alkalmazni tudjuk, számításba kell venni az eddig figyelmen kívül hagyott dimenziókat, jelent esetben a keresztmetszet y-z irányát: A_{yz} .

$$(10) \quad C(x, t) = \frac{M}{A_{yz}\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) = \left[\frac{M}{L^3}\right]$$

vegyük észre, hogy ugyanez a megoldás lett a vége a statisztikai diffúziós modellnek is, a Diffúzió Elméleti Modelljével foglalkozó fejezetben.

A koncentráció eloszlás pillanatai.

Célszerű, ha a végbemenő tömegeloszlás geometriáját a adott időpillanatokban vizsgálni. A nulladik pillanatban adott az össztömeg, M , a felhőben,

$$\text{nulladik pillanat} = M_0 = M = \int_{-\infty}^{\infty} C(x, t) dx$$

Az ennél magasabb értékű időpillanatok megadják a tömegeloszlás súlypontját és szórásnégyzetét.

$$\text{első pillanat} = M_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xC(x, t) dx .$$

$$\text{második pillanat} = M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 C(x, t) dx .$$

A számtani középérték meghatározza a felhő tömegének súlypontját.

$$\text{középérték} = \mu = \left[\frac{M_1}{M_0}\right].$$

A szórásnégyzet az eloszlás széleségét.

$$\sigma^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 C(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} C(x, t) dx} = \frac{M_2}{M_0} - \mu^2$$

A (10) egyenlet számtani középértékét és szórásnégyzetét kiértékelve azt láthatjuk, hogy a számtani középérték, $\mu = 0$, azaz a patch súlypontja egész idő alatt változatlan, $\mu = 0$, marad. A szórásnégyzet

$$(11) \quad \sigma^2 = 2Dt$$

ha a diffúziós együttható, D , állandó, a tömegeloszlás szórásnégyzete az idő függvényében lineárisan növekedni fog. Ha a (11) derivatíváját nézzük,

$$(12) \quad D = \frac{1}{2} \frac{d\sigma^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{t_2 - t_1}$$

Ennek segítségével könnyen megbecsülhető a diffúziós együttható, amennyiben a szórásnégyzet bizonyos idő alatt bekövetkező változásait akarjuk megfigyelni. Hasznos megjegyezni, hogy a Gauss-féle eloszlás esetében a tömegközépponttól való normál elhajlás esetében a koncentráció a következőképpen alakul:

$$(13) \quad C(x = \sigma = \sqrt{2Dt}) = \left[\frac{M}{A_{yz}\sqrt{4\pi Dt}} \right] \exp\left(-\frac{2Dt}{4Dt}\right) = C_{max}(t) \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.61C_{max}$$

Ahol C_{max} a patch koncentrációját jelöli adott időben, t , melyet a (13) egyenletben zárójelben szereplő exponenciális együttható fejez ki, $C_{max} = M / (A_{yz} (4\pi Dt)^{1/2})$.

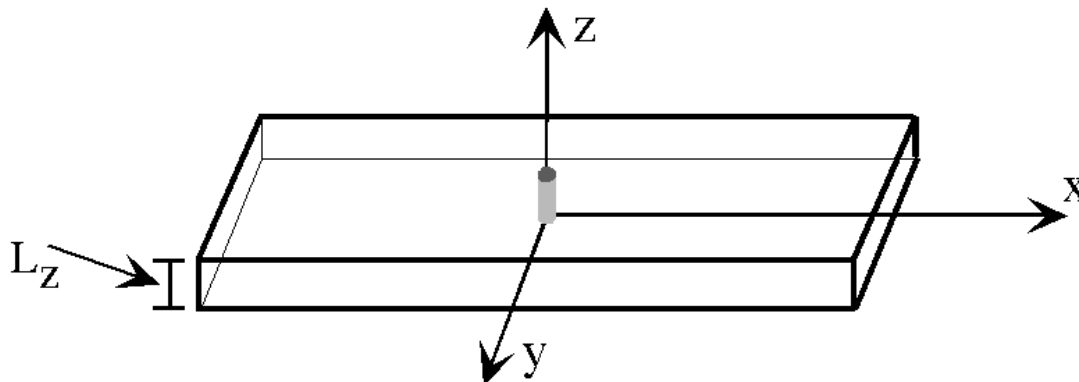
Végezetül, ahogyan a 22.1 is leírtuk, a normál szórás, σ , segítségével egyszerűen megadható a diffúzió patch hosszúsága. Figyelembe véve, hogy az össztömeg 95%-a a súlypont $\pm 2\sigma$ -ban található, a patch leggyakrabban használt hosszúságát:

$$(14) \quad L=4\sigma$$

ha így módon meghatározzuk a patch méretét, a patch széleit a koncentráció adja meg: $C(x=\pm 2\sigma)=0.14 C_{max}$.

Kétdimenziós, pillanatnyi pontforrás.

Egységnyi tömeg, M , állandó fluidumba ($u,v,w = 0$) kerül $x = y = z = 0$ értékek mellett. A áramlási körülmények egyformán z ($\partial/\partial z = 0$). A tömeg eloszlása egyenletes lesz y - z irányba, x dimenzió irányába pedig elhanyagolható mértékű. A kezdeti koncentráció mértéke $C(x,y,t=0) = M \delta(x)\delta(y)$, ahol $\delta()$ a Dirac delta függvény.



Nagy általánosságban anizotropikus diffúziót várhatunk, $D_x \neq D_y$. A rendszer transzportegyenlete:

$$(15) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

Fick törvényéből és a (15) egyenletből az következik, hogy az x tartományban (1. tartomány jobb oldalon) a diffúzió csak az x tartomány eloszlásától függ, y tartományban (2. szakasz jobb oldalon) pedig a diffúzió csak y tartomány eloszlásától függ. Ennek következtében a (15) egyenlet megoldása két, egymással nem összepárosítható megoldás lesz, melyek az x és y tartomány eloszlását írják le.

$$(16) \quad C(x,y,t) = MC_1(x,t)C_2(y,t)$$

ahol C_1 nem y függvénye és C_2 nem X függvénye. Ha a várható megoldást (15) egyenletként írjuk fel:

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial t}(C_1 C_2) = C_1 \frac{\partial C_2}{\partial t} + C_2 \frac{\partial C_1}{\partial t} = D_x C_2 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + D_y C_1 \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2}$$

A fenti egyenletet úgy is újraírhatjuk, hogy C_1 és C_2 függvényeket elválasztjuk egymástól.

$$(18) \quad C_2 \left[\frac{\partial C_1}{\partial t} - D_x \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} \right] + C_1 \left[\frac{\partial C_2}{\partial t} - D_y \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} \right] = 0$$

Az egyszerű, de nem használható megoldás a következő: is $C_1 = C_2 = 0$. Másképpen, minden zárójelben szereplő értékek nullával egyenlők. ha például, az első zárójelben szereplő érték 0,

$$(19) \quad \frac{\partial C_1}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}$$

az 1-D, a (2) egyenlet diffúziós egyenlete. A (7) egyenletből levezethető a (19) egyenlet megoldása,

$$(20) \quad C_1(x, t) = \frac{A_1}{\sqrt{4\pi D_x t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_x t}\right)$$

Hasonló formációt kapunk C_2 -re akkor is, ha a (18) egyenlet második zárójelben szereplő értékéhez rendelünk nullát.

A teljes megoldás a következőképpen alakul:

$$(21) \quad C_1(x, y, t) = C_1(x, t)C_2(y, t) = \frac{A_1 A_2}{4\pi t \sqrt{D_x D_y}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4D_y t}\right)$$

ahol A_1 és A_2 állandó. Az eredmény $A_1 A_2 = M$ akkor lép érvénybe, ha

$$(22) \quad M = \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} C dx dy$$

Végezetül, a (21) egyenlet kétdimenziós megoldásában csak $[M L^{-2}]$ szerepelnek, mivel a harmadik dimenziót nem vettük figyelembe. Hogy megállapíthassuk a valós, háromdimenziós térben mérhető koncentrációt, a kétdimenziós megoldást a hiányzó dimenzió felével kell osztani (pl. L_z) a fenti ábra alapján. Összességében a következő megoldás adódik:

Pillanatnyi kétdimenziós pontforrás

M kibocsátás $t = 0$ értéknél és $x = y = 0$.

Kezdőérték:, $C = M \delta(x) \delta(y)$

$$(23) \quad C_1(x, y, t) = \frac{M}{L_z 4\pi t \sqrt{D_x D_y}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4D_y t}\right) = [ML^{-3}]$$

A (23) egyenlet alapján a koncentráció profil $(C(x,y))$ bármely egyes a patch-en való keresztmetszése esetén a Gauss féle eloszlás fog érvényesülni. A legnyilvánvalóbb példák a

$C(x, y = 0)$ és $C(x = 0, y)$ profilok. Ez egyenesen következik Fick törvényéből, amely szerint a fluxus bármely irányban csakis az azonos iránybú grádienssel lesz egyenesen arányos. Aha a diffúziós együtthatók anizotropikusak, a felhő növekedése is anizotropikus lesz, úgy, hogy hosszirányban gyorsabb növekedést mutat a maximum diffúziós tengely mentén. A felhő hossza bármely tengely mentén egyenesen arányos lesz az adott tengely mentén érvényes diffúziós együtthatóval.

$$(24) \quad L_x = 4\sigma_x = 4\sqrt{2D_x t}$$

$$L_y = 4\sigma_y = 4\sqrt{2D_y t}$$

A hossz megadásával a patch széle a súlyponttól 2σ értékre helyezkedik majd el, a $C = 0.14 C_{\max}$, koncentrációs kontúr mentén, hasonlóan, mint a korábban tárgyalt egydimenziós modell esetében. A kétdimenziós anyagkibocsátás alapvető tulajdonságait a következő animáció szemlélteti.

Animáció – Kétdimenziós anizotropikus diffúzió (ld weboldal)

Az animáción egy diszkrét tömeg diffúziója látható, kibocsátási értékek: $(x=0, y=0, t=0)$. A diffúzió anizotropikus, $D_x = 4 D_y$. Mint azt a (24) egyenlet is mutatja, a hosszanti értékek a diffúzió négyzetgyökével egyenes arányban nőnek. A felhő dimenziói anizotropikusak, $L_x/L_y = \sqrt{D_x/D_y}$. A rendszerben $L_x = 2L_y$. Figyelje meg, hogy az x és y tengelyeknél a koncentráció profilok alakja Gauss-i formát mutat. Végül, figyelembe véve, hogy a 2σ körvonal $t = 600s$ értéknél lesz $x = \pm L$, ez alapján megbecsülhető a diffúziós együttható, D_x . A (24) egyenletben a $t = 600s$ értéknél megadott $L_x = 2L$ kikötést alkalmazva megbecsülhető lesz D_x értéke.

A fenti analízis könnyen kiterjeszthető háromdimenziós modellekre is.

Háromdimenziós pillanatnyi pontforrások

M kibocsátás $t = 0$ és $x = y = z = 0$ értékeknél.

Kiindulás:, $C = M \delta(x)\delta(y)\delta(z)$.

$$(25) \quad C_1 C(x, y, z, t) = \frac{M}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{D_x D_y D_z}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4D_y t} - \frac{z^2}{4D_z t}\right) = [ML^{-3}]$$

Hígítási arány:

A patch hígítási arányát meghatározhatjuk a maximum koncentrációváltozás értékével az adott patch-en belül. A slug kibocsátás esetében a maximum koncentráció $C_{\max}(t)$, a súlypontnál lesz, és közelíteni fog a (10), (23) és (25) egyenletek exponenciális együtthatóihoz.

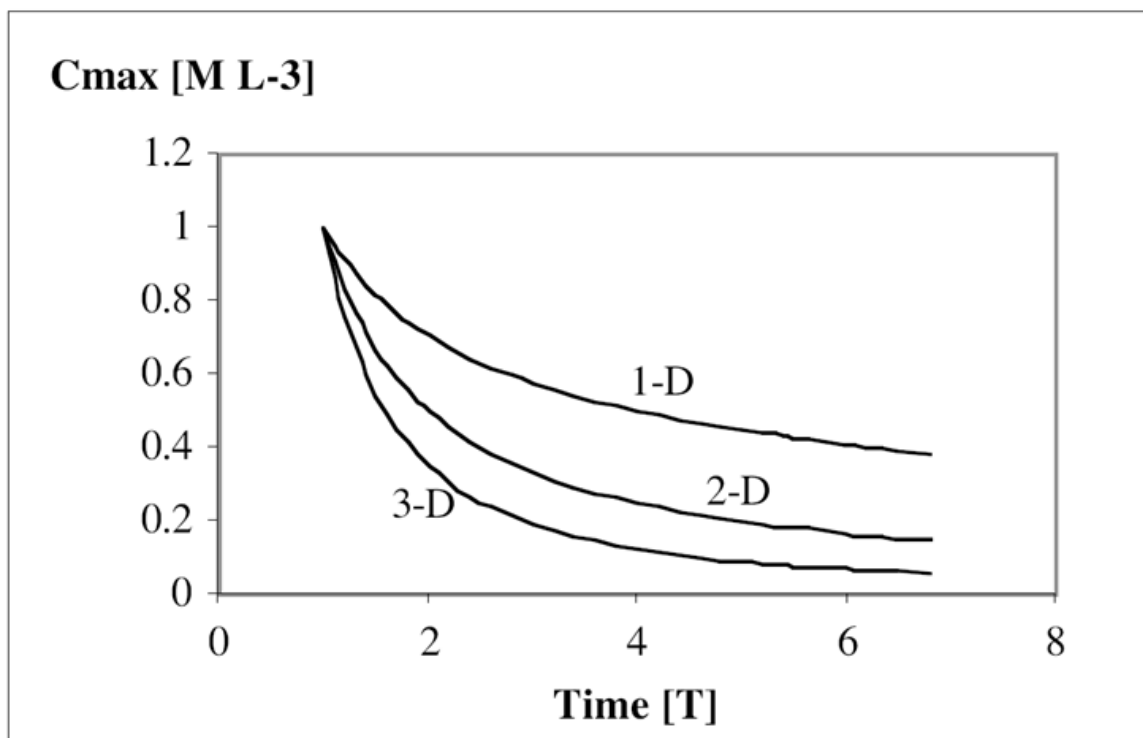
$$(26) \quad \text{1-D: } C_{\max} = \frac{M}{A_{yz}(4\pi Dt)^{1/2}}$$

$$\text{2-D: } C_{\max} = \frac{M}{L_z 4\pi t \sqrt{D_x D_y}}$$

$$3\text{-D: } C_{max} = \frac{M}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{D_x D_y D_z}}$$

A hígítási arány a háromdimenziós rendszer esetében lesz a legnagyobb, $C_{max} \sim t^{-3/2}$, mivel a diffúzió itt mindhárom irányba érvényesül. Az egy- ill. kétdimenziós rendszereken a diffúziós fluxus csak egy vagy két irányba tud hatni, ezért a hígítás mértéke is ennek megfelelően $t^{-1/2}$ vagy t^{-1} lesz.

A hígítási arány változása az alábbi ábrán látható. Egységnyi tömegű anyag kerül egy 1-D, 2-D, and 3-D rendszerbe. A maximum koncentráció csak rövid ideig lesz azonos értékű mindhárom felhőben. A maximális koncentráció a leghamarabb a leginkább szétágazó, azaz a 3-D rendszerben fog eltűnni.



24.2. Feladatsor

24.2.1. Feladat

Két repülőgép segítségével szeretnénk tesztelni egy állandó atmoszféra diffúziós együtthatóját. Az első repülőgép, amely 1 km magasságban repül a föld felszínétől, egy adott pillanatban 1 kg jelölőgázt bocsát ki. A második repülőgép 60 másodperc múlva halad át a gázfelhőn, és 0.03mg/L koncentrációt észlel a felhőn belül.

Becsülje meg az adott légkör diffúziós együtthatóját.

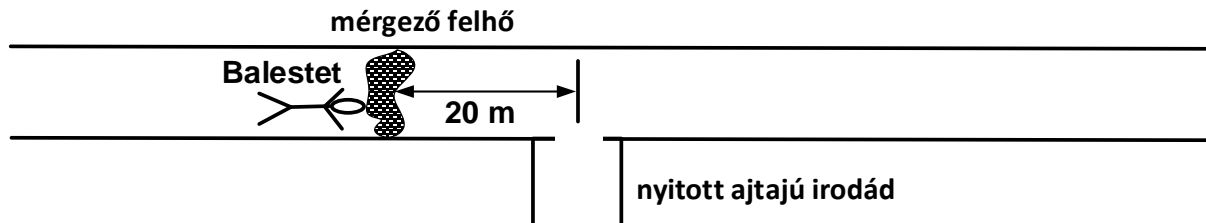
Segítség 1: Minden irányban azonos mértékű koncentráció feltételezhető?

Segítség 2: Mit feltételez a légmozgással kapcsolatban?

Segítség 3: Mit kell feltétlenül figyelembe venni a diffúziós együtthatóval kapcsolatban?

24.2.2. Feladat

Egy barátja meg szeretné látogatni önt az irodájában. Mivel meg szeretné viccelni önt, egy üvegcsőben 10 g szűrős szagú gázt visz magával. Az ön irodája egy hosszú, 100 méteres folyosón található. Amikor a barátja 20 méterre van az ön ajtajától, a fiola eltörik. A gáz gyorsan terjedni kezd a folyosó, függőlege és vízszintes irányba is. A folyosó szélessége 2 méter, magassága 3 méter. Az emberi orr számára a gáz szaga $10 - \mu\text{g/l}$.-nél nagyobb koncentráció esetén érzékelhető. Tételezzünk fel izotropikus diffúziót, $D = 0.05 \text{ m}^2/\text{s}$.



- Mely egyenlet alapján less felírható a gáz terjedése a folyosón?
- Mennyi idővel a kiömlés után fogja ön megérezni a gáz szagát?
- Mennyi idő után oszlik el az emberi orr számára érzékelhető szag a folyosóról?

24.2.3. Feladat

Két tárgylemez közé helyezett állandó fluidumba egymástól 10 cm távolságra 1 mg kék és 1 mg piros festéket csöppentünk. A lemezek felülete 1×1 méter, a köztük lévő távolság 5mm. A festékcseppeket a lemez közepére helyezik, és gyorsan terjedni kezdenek a folyadék felületén, azaz a két lemez között. A festékek molekuláris diffúziója: $D_{\text{piros}} = 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}^{-1}$ és $D_{\text{kék}} = 4 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}^{-1}$.

Az emberi szem a festék színét 10g/L koncentrációtól képes érzékelni. A két festék között semmilyen reakció nem megy végbe, de ahol keverednek, a látható tartományba esik a koncentrációjuk, és az emberi szem lilának fogja látni az oldatot.

- Mialatt mindkét felhő látható, ($C > 10 \text{ g/L}$), melyik felhő fog nagyobbban tűnni, és mennyivel?
Segítség 1: Rajzolja fel a felhők átmérőjét.
- Mikor és mely ponton válik láthatóvá, hogy a felhők találkoznak?
Segítség 2: Egyszerűsítse az egyenleteket feltételezésekkel.
Segítség 3: Írja fel a matematikai feltételeit a felhők érintkezésének.
- Mikor válik a pontforrásokat összekötő vonal teljesen lilává?
Segítség 4: Írja fel a teljesülés matematikai feltételeit.

24.3. Megoldások

24.3.1. Megoldás

Becsülje meg a diffuzitás együtthatóját az atmoszféra ezen régiójában.

- Segítség:** Feltételezhető-e, hogy a koncentráció bármely irányban egyenletes eloszlású lesz? .

A gázt nem lehatárolt tartományba eresztve, nem várható, hogy rövid idő alatt egyenletes eloszlást mutasson bármely irányba, azaz $\partial C/\partial y \neq 0$, $\partial C/\partial z \neq 0$, $\partial C/\partial x \neq 0$.

A vezéregyenlet felírása során tehát mindhárom dimenziót figyelembe kell venni.

2. **Segítség: Mit feltételezhetünk a légáramlatokról?**

Az atmoszféra statikus állapotú, ami arra enged következtetni, hogy nincsenek jelen a háttérben légáramlatok. Feltételezhetjük tehát, hogy $u=v=w=0$. A repülőgépek mindegyike légáramlatot fog kelteni elhaladása közben. Ezek a mozgások lokális és ideiglenes jelleggel intenzívebbé tehetik a felhők oldódását. Ez a hatás pár perc után rohamosan csökkenni kezd, így egy óra múlva teljesen elhanyagolható is lesz.

3. **Segítség: Mit kell feltételezni a diffúziós együtthatóról?**

Mivel csak egyetlen koncentrációérték van megadva, csak egyetlen diffúziós érték kiszámolása lehetséges. Ahhoz, hogy a kérdés megválaszolható legyen, szükséges feltételezni, hogy a diffúzió izotrópikus.

Ezen feltételezéssel a transzportegyenlet a következőre redukálódik:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right]$$

A kezdeti kibocsátási pontot $(x, y, z)=0$ értéken feltételezve, a kezdeti feltétel a következőképpen írható fel:

$$C(x, y, z, t = 0) = M \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

A fenti egyenlet és kezdeti feltétel megoldása a **24.1** 25. egyenlete

$$C(x, y, z, t) = \frac{M}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4Dt}\right)$$

A felhő maximum koncentráció értékét a **24.1** 26. egyenlete adja meg.

$$C_{MAX} = \frac{M}{(4\pi Dt)^{3/2}}$$

A probléma leírásában szereplő információk segítségével megkapjuk D értékét,

$$D = \left(\frac{M}{C_{MAX}}\right)^{\frac{3}{2}} / 4\pi t = \left(10 \frac{kg}{3} \times 10^{-5} kgm^{-3}\right)^{\frac{2}{3}} / (4\pi \cdot 3600 s) = 0.1 m^2s^{-1}$$

24.3.2. Megoldás

Milyen vezéregyenlet írja le a gáz koncentrációjának alakulását a folyosón?

Izotrópikus diffúzió esetén a vezéregyenlet:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D \left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right]$$

x koordinátát a folyosó hosszához társítjuk, az y-z sík pedig a folyosó keresztmetszetének felel meg. Mivel a gáz "gyorsan terjed" vertikális és horizontális irányba is, feltételezhetjük, hogy: $\partial C/\partial y = \partial C/\partial z = 0$. A feladatban nem esik szó arról, hogy a folyosón jelentős lenne a légáramlat, így ezt elhanyagolhatónak vesszük, $u=0$. Ezen feltételezésekkel a vezéregyenlet a következőképpen redukálódik:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

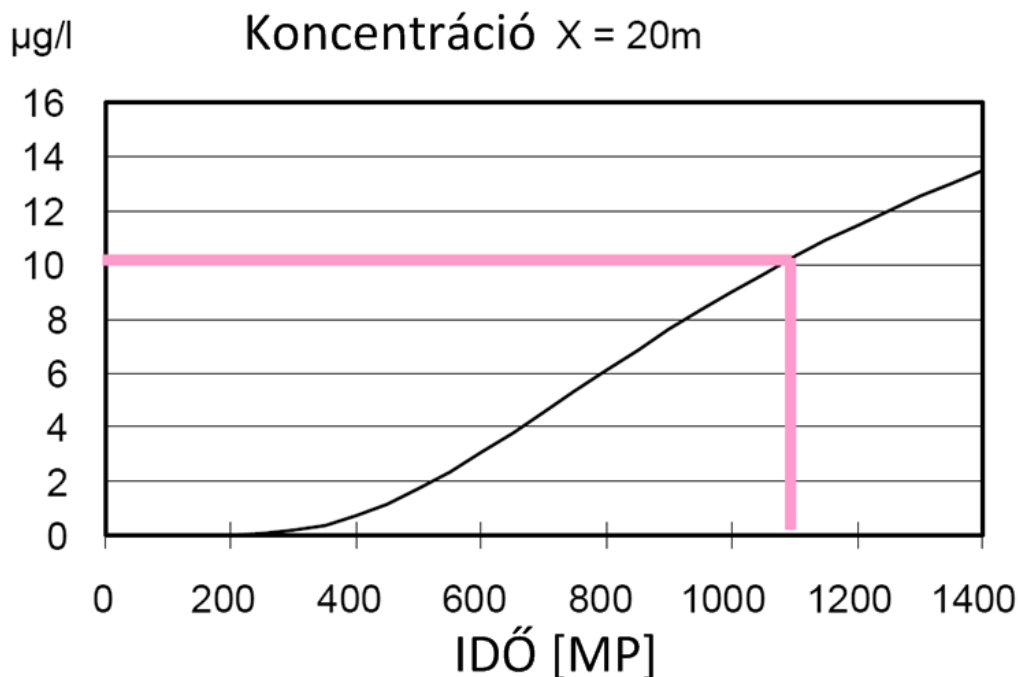
Ha a kiömlés pontja $x=0$, a kiinduló feltétel: $M = \delta(x)$

A kiömlés után mennyi idővel lesz érezhető a gáz szaga?

A vezéregyenlet és kiinduló feltétel a fentiek alapján pillanatnyi, pontforrásból kiinduló diffúziót feltételez, egydimenziós rendszerben. A koncentrációmezőt a **24.1** 10. egyenlete írja le.

$$(3.10) \quad C(x, t) = \frac{M}{A_{yz}\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) = [M/L^3]$$

A 3.10 egyenlet segítségével kiszámolható, hogy mely időpontban lesz az ajtónál a koncentráció értéke $C(x=20\text{m}, t)$ is $10 \mu\text{g/l}^{-1}$.



A gáz szaga kb. 1100 másodperccel a kiömlés után válik érezhető az iroda ajtajánál.

Mikorra válik a szag emberi orr számára érezhetetlenné a folyosón?

A kérdés megválaszolásához ismernünk kell a folyosó végének határfeltételeit. Először tételezzük fel, hogy a folyosó mindkét vége nyitott, azaz a szag a folyosó végén túlra is diffundálhat. Ezután a maximum koncentráció alakulását kell megfigyelnünk a kiömlés helyén, azaz $x=0$ ponton. Azt az időt keressük, ahol:

$$C_{max}(t) = \frac{M}{A_{yz}\sqrt{4\pi Dt}} < 10 \mu\text{g/l}^{-1}$$

vagy egyszerűen:

$$t > \left(\frac{10 \text{ g}}{2\text{m} \times 3\text{m} \times 0.01\text{gm}^{-3}} \right)^2 / (4\pi \times 0.05 \text{ m}^2\text{s}^{-1}) = 44.232 \text{ másodperc} = 12.3 \text{ óra}$$

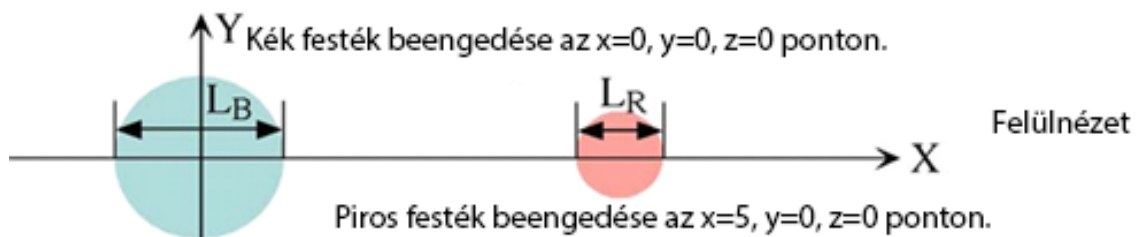
Ekkor a felhő hossza $4\sigma = 4\sqrt{2Dt} = 266\text{m}$, ami arra utal, hogy a felhő a folyosó hosszanti tartományában diffundált. A fenti időskála azonban csak abban az esetben helytálló, ha a folyosó mindkét végén nyitott. ha a folyosó végén azonban tűzzáró ajtók találhatóak, a felhő nem tud azokon keresztül szabadon diffundálni. Ebben az esetben a végső koncentráció értéket a lehetséges hígulás maximális értéke adja meg, azaz, amikor az összes anyag a folyosó teljes térfogatában ($2\text{m} \times 3\text{m} \times 100\text{m}$) szétterjedt.

$$C_{\text{végső}} = 10 \text{ g} / (2 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 100 \text{ m}) = 0.016 \text{ gm}^{-3} = 16 \mu\text{gl}^{-1}$$

Mivel a végső koncentráció az érzékelési határ fölött van, a szag mindaddig érezhető lesz a folyosón, amíg a végeit lezáró ajtókat ki nem nyitják.

24.3.3. Megoldás

1. Segítség: Vázolja fel az egyes felhők átmérőjét.



a. Mialatt mindkét felhő látható, ($C > 10\text{-g l}^{-1}$), melyik fog nagyobbak látszani, és mennyivel?

Mivel a felhő mérete a diffúziós együtthatóval arányosan fog növekedni, a kék felhő mérete gyorsabban nő, és emiatt nagyobb is fog látszani, mint a piros felhő. Az egyes felhők hossza a 24.1 26. egyenletének meghatározása szerint:

$$L_B = 4\sigma_B\sqrt{2D_Bt} \quad \text{és} \quad L_R = 4\sigma_R\sqrt{2D_Rt}$$

A festékfelhők átmérőjének aránya ezért: $L_B/L_R = \sqrt{D_B/D_R} = 2$.

b. Mely időpontban és mely ponton fog először úgy tűnni, hogy a két felhő érintkezik?

2. Segítség: Feltételezések segítségével egyszerűsítse a vezéregyenletet.

Kezdje a teljes transzportegyenlet felírásával, amely mindkét festékcsepp alakulását irányítja:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial C}{\partial z} \pm S$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8)

Egyszerűsítő feltételek:

- A festékek nem lépnek kölcsönhatásba egymással, így a 8. forrás/süllyedés terminus elhagyható.
- A folyadék stagnál, ezért $u=v=w=0$, így a 2,3,4 terminusok elhagyhatók.

- A molekuláris diffúzió homogén és izotróp, $D_x=D_y=D_z=D$, and $D \neq f(x,y,z)$. Ezáltal a diffúziós terminusok az következőre redukálódnak: $D_x=D_y=D_z=D$, and $D \neq f(x,y,z)$.
- A festékek gyorsan keverednek az üveglapok között, $\partial C/\partial z = 0$, így a 7 terminus is elhagyható.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right]$$

Egyszerűsített vezéregyenlet:

Kezdeti feltételek:

Kék festék: $C_B(x,y,t=0) = M \delta(x) \delta(y)$

Piros festék: $C_R(x,y,t=0) = M \delta(x-5)\delta(y)$

Az egyes festékek diffúziója tehát kétdimenziós, pillanatnyi pontforrás kibocsátásként oldható meg. A 24.1 23. egyenlete alapján $D_x=D_y=D$. Fontos megjegyezni, hogy L_z ebben az esetben az üveglapok távolságát jelöli, ami 5 mm.

$$C_B(x, y, t) = \frac{M}{L_z 4\pi D_B t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4D_B t}\right)$$

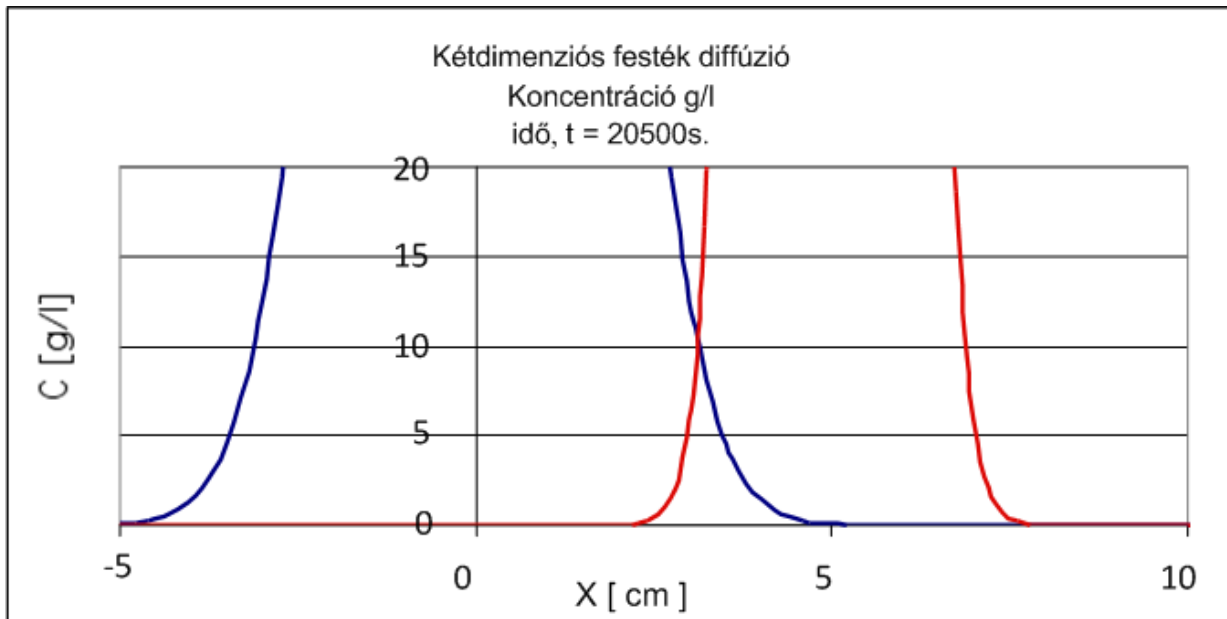
$$C_R(x, y, t) = \frac{M}{L_z 4\pi D_R t} \exp\left(-\frac{(x-5)^2 + y^2}{4D_R t}\right)$$

Fontos megjegyezni, hogy az exponenciális a piros felhő közepén helyezkedik el, azaz $(x=10, y=0)$ értéknél, ahol a pozíciók centiméterben vannak megadva.

3. **Segítség: Írja a le a felhők első érintkezésének matematikai feltételeit.**

A geometria szabályai szerint a felhők először $y=0$ vonalon fognak érintkezni. Célunk, hogy megtaláljuk az időpontot, t , és a helyet, x , ahol $C_B(x, y=0, t) = C_R(x, y=0, t) = 10$ g/l. Ehhez először a következő pozíciót kell megtalálnunk: $x_{BR}(t)$ ahol $C_B=C_R$. Ezután kereshetünk megoldást t értékére, úgy, hogy x értékét korlátozzuk, azaz $C_B(x = x_{BR}, y=0, t)$. Ennél azonban egyszerűbb megoldást kínál, ha C_B és C_R értékét interaktív gráf képző programba tápláljuk (pl. Excel), és addig változtatjuk z idő értékét, amíg a két koncentrációs görbe metszete $C = 10$ g/l lesz.

Megoldás: $t=20500$ s időpontban a kék és piros koncentrációs görbe $C = 10$ g/l értéket jelöl, $x=3.1$ cm helyen. A felhők látszólag tehát $X=3.1$ cm helyen fognak összeérni.



Becsülje meg nagyjából a helyet az a) rész eredményéből.

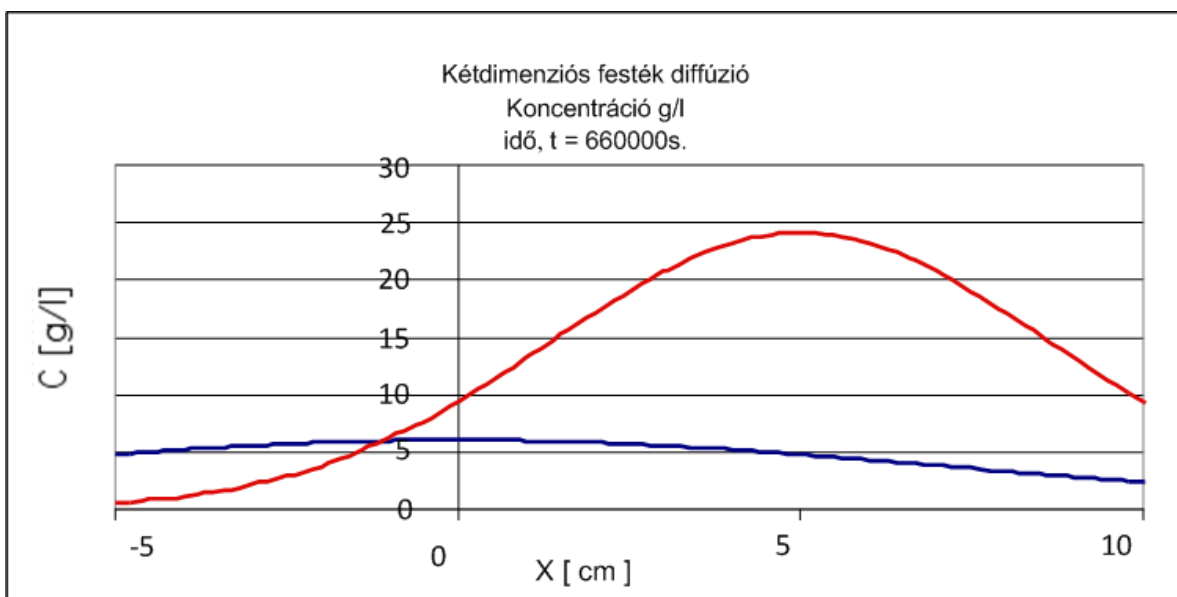
Az a) definícióján és a fenti vázlat alapján a két felhő első látszólagos érintkezésének helye: $(L_B/2) + (L_R/2) = 5$. Ráadásul, $L_R = (L_B/2)$, azaz a kék felhő szélének helye a piros felhővel való első érintkezéskor: $x = (L_B/2) = 5/1.5 = 3.3\text{cm}$,

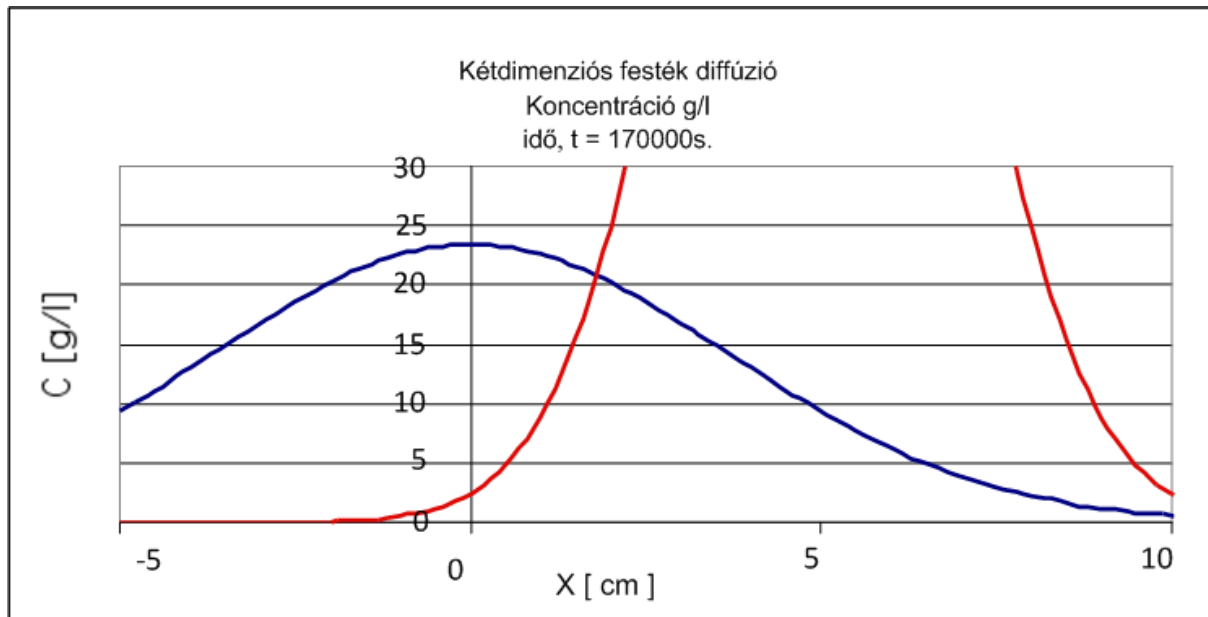
c. Mely időpontban lesz a kibocsátási pontokat összekötő vonal teljesen lila?

4. **Segítség: Írja fel a jelenség matematikai hátterét. .**

A feltételhez az szükséges, hogy C_B és $C_R > 10\text{ g/l}$ legyen az $x = 0$ és 10 cm közötti tartományban. használja a b) részben felvázolt táblázatot a koncentráció időbeli alakulásának felvázolásához.

Megoldás: C_B és C_R értékeit interaktív táblázatkezelő programba (pl. Excel) tápláljuk és az idő értékét a fenti feltételek valósá válásáig ismétljük. $0 < x < 5\text{ cm}$ között, amikor $C_R \geq 10\text{g/l}$ akkor $C_B < 10\text{ g/l}$, és amikor $C_B \geq 10\text{g/l}$, $C_R < 10\text{ g/l}$.





25. Határfeltételek



A következő fejezet a diffúziós felhő alakulását mutatja abban az esetben, amikor az egy határhoz ér. Két esetet vizsgálunk behatóan: amikor a határ tökéletesen abszorbens, illetve amikor nincs fluxus. Az elméleti részben bemutatjuk, hogyan tudjuk képforrások segítségével modellezni a felhő koncentráció profilját egy adott határ jelenlétében. Az animáció bemutatja, milyen különböző hatással vannak a diffúziós felhőre a fluxusmentes (no flux) és a tökéletesen abszorbens határok, kiemelve az egyenletes eloszlás kialakulását párhuzamos no flux határok jelenlétében.

25.1. Határfeltételek

Amikor egy diffúzív felhő valamilyen határhoz érkezik, további alakulását a határfeltételek is befolyásolják. A következőkben felvázoljuk a négy leggyakoribb határfeltétel matematikai kifejezéseit

Adott fluxus: Ebben az esetben az egységnyi területre eső fluxus $(q/A)_n$, a határon keresztül meghatározott mértékű. Az 'n' kitétel a normál kifelé mutató irányra utal, azaz $(q/A)_n$, úgy lesz érvényes, hogy közben a fluxus a folyadék tartományból kifelé mutat. Az adott fluxus határfeltétel a következőképpen írható fel:

$$(1) \quad [CV_n - D_n \partial C / \partial n]_{a \text{ határnál}} = (q/A)_n = \text{a fluxus elhagyja a folyadék tartományát a határnál}$$

Adott állandó koncentráció: Ez esetben a határnál adott a koncentráció értéke.

$$(2) \quad C_{a \text{ határnál}} = \text{állandó}$$

No flux határ: ez az eset a fenti adott fluxus feltétel egy speciális esete, ahol $(q/A)_n = 0$. A leggyakoribb feltétel:

$$(3a) \quad [CV_n - D_n \partial C / \partial n]_{a \text{ határnál}} = 0$$

Az 'n' kitétel itt is a kimenet normális felé tartozását jelöli. A fluxus nélküli állapot megvalósulásához az advekción és diffúziós fluxusok tökéletes egyensúlyára van szükség. Ha a határ szilárd halmazállapotú, a normál sebesség értéke zérus lesz, és a korlátozás a következőre szorítkozik:

$$(3b) \quad \partial C / \partial n = 0 \text{ a határnál}$$

Ha a forrás a határon helyezkedik el (3b) félreértésre adhat okot, mivel a Gauss-féle görbe szimmetriája a középpérték körül engedi (3b) teljesülését abban az esetben is, amikor az anyag elhagyja a valós tartományt. Ezt a kivételt alább részletesen magyarázzuk.

Tökéletesen abszorbens: A határral érintkező minden molekula azonnal abszorbeálódik, azaz kiválik a folyadékból. A folyadék koncentrációja ennél a határnál mindig zérus értékű.

$$(4) \quad C \text{ a határnál} = 0$$

No flux határfeltétel.

A szuperpozíció alapelveinek felhasználásával felírható a no flux határfeltétel analitikai megoldása. A módszerhez arra van szükség, hogy a transzportegyenlet,

$$(5) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \pm S$$

lineáris legyen. Ez a legtöbb esetben teljesül is, kivéve, ha a forrás vagy süllyesztő ($\pm S$) valamilyen oknál fogva nem lineáris. Ha az egyenlet és a határfeltételek is lineárisak, a megoldások tetszőleges számban összeadhatóak, míg olyan megoldás nem születik, amely megfelel a kezdeti határfeltételnek. Az itt bemutatott módszer egydimenziós rendszert mutat be, amelybe M tömegű anyagot bocsátottunk $X=0$ és $t=0$ értékeknél. Az egyszerűség kedvéért a sebesség értékét az egész rendszerben zérusnak tekintjük. Az x irányra merőleges keresztmetszeti terület A_{yz} lesz. A szilárd határ helye: $x=-L$. Ez esetben a következőt szeretnénk megoldani:

$$(6a) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

$$(6b) \quad \begin{array}{ll} \text{Kezdeti feltétel:} & (t = 0): C(x) = M\delta(x) \\ \text{Határfeltétel:} & \partial C / \partial x = 0 \text{ ha } x = -L \end{array}$$

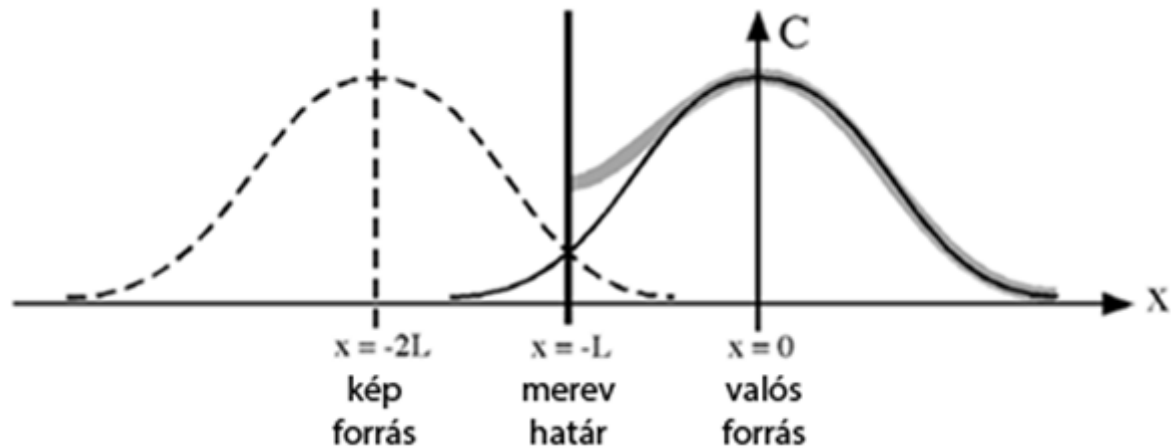
A rendszer transzportegyenlete és kezdeti feltétele egydimenziós megoldás esetén teljesül, pillanatnyi, pontforrásból történő kibocsátás mellett.

$$(7) \quad C_{\text{valós}}(x, t) = \frac{M}{A_{yz}\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

Ez a folyamatos fekete vonallal jelölt megoldás azonban nem teljesíti a no flux határfeltételeket $x=-L$ pontban. Pontosabban szólva, $\delta C / \delta x > 0$ at $x = -L$. Ráadásul, a (7) egyenlet megengedi, hogy az anyag $\int_{-\infty}^{-L} C(x) dx$ áthaladjon $x=-L$ határon. Ez az anyag pontosan felcserélhető a valós tartományon belül ($x > -L$) egy új, azonos forrás hozzáadásával $x=-2L$ ponton. A hozzáadott forrás az eredeti forrás tükrözési pontjában helyezkedik el a no flux határon, $x=-L$ ponton. A hozzáadott forrást ezért tükörkép-forrásnak nevezzük. A tükörkép-forrás tömegeloszlását,

$C_i(x,t)$, szaggatott vonal jelöli. A görbe alakja megegyezik az eredeti forrásával, $C(x,t)$, de a csúcspontja $x=0$ értékről elcsúszdik $x=-2L$ értékre. Az eltolódás miatt az exponenciális tag egy lesz $x=-2L$ értéknél, azaz az argumentum értéke $x=-2L$ -nél zérus lesz.

$$(8) \quad C_{\text{tükörkép}}(x, t) = \frac{M}{A_{yz}\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x+2L)^2}{4Dt}\right)$$



243. ábra: A valós forráshoz (fekete vonal) tükörkép-forrást (szaggatott vonal) rendelünk, a valós tartományban létrejövő megoldáshoz (szürke, $x > -L$), a valós tartományban létrejövő megoldáshoz (szürke, $x > -L$), amely kielégíti a $\delta C/\delta x = 0$ határfeltételt $x = -L$ pontban

Az eredeti és a tükörkép források szuperpozíciója (összege) vastag szürke vonallal lett megjelölve az áramlási tartományban ($x > -L$). Fontos megjegyezni, hogy ez a görbe megfelel a (6) egyenletben leírt feltételnek: $\delta C/\delta x = 0$, $x = 0$ pontban. a megoldás ezért a (7) és (8) összege:

$$(9) \quad C(x, t) = C_{\text{valós}} + C_{\text{tükörkép}} = \frac{M}{A_{yz}\sqrt{4\pi Dt}} \left(\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) + \exp\left(-\frac{(x+2L)^2}{4Dt}\right) \right)$$

Tökéletesen abszorbens határfeltétel:

A szuperpozíciós módszer alkalmas a tökéletesen abszorbens határfeltétel kielégítésre is. Tételezzük fel a fent leírt egydimenziós rendszert, melynek határa $x = -L$ értéknél tökéletes abszorbens határként viselkedik. Ezután keressük a megoldást a következőre:

$$(10a) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

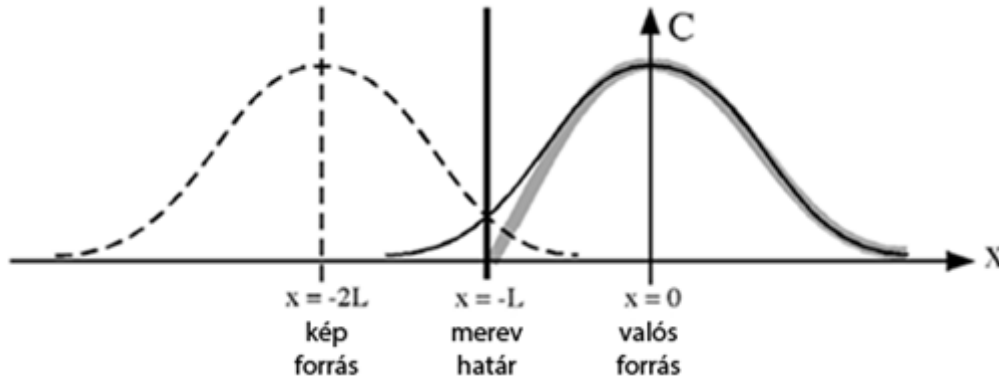
$$(10b) \quad \begin{array}{ll} \text{Kezdeti feltétel:} & (t = 0): C(x) = M\delta(x) \\ \text{Határfeltétel:} & C(x = -L, t) = 0 \end{array}$$

Mint az előző esetben is, az alapmegoldás az áramlás tartományában itt is adott pontban történő pillanatnyi kibocsátás esetében lesz érvényes, nevezetesen a (7) egyenletben leírtak szerint. A határfeltétel teljesüléséhez azonban most hozzáadás helyett kivonjuk a tükörkép-forrást.

$$(11) \quad C(x, t) = C_{\text{valós}} + C_{\text{tükörkép}} = \frac{M}{A_{yz}\sqrt{4\pi Dt}} \left(\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) - \exp\left(-\frac{(x+2L)^2}{4Dt}\right) \right)$$

A tükörkép-forrás (szaggatott vonal) a valós forrásból (vastag fekete vonal) kivonása által a koncentráció értéke a határnál zérus lesz. Fontos megjegyezni, hogy a szuperpozicionált megoldás (vastag szürke vonal) a fluxus a határba történő áramlására utal $x = -L$ értéknél, azaz

$\delta C/\delta x > 0$, ami megfelel az abszorbens határfeltételnek. Figyelembe kell venni azt is, hogy a (11) egyenlet megoldása negatív koncentrációt eredményez az $x > -L$ tartományban, ami a valóságban lehetetlen. Ez a tartomány azonban a valós áramlási tartományon ($x > -L$) kívül helyezkedik el, így a nem megvalósítható értékek elhanyagolhatóak. A megoldásnak csupán a valós tartományban ($x > -L$) kell reálisnak lennie, és ez esetben ez a feltétel teljesül is.



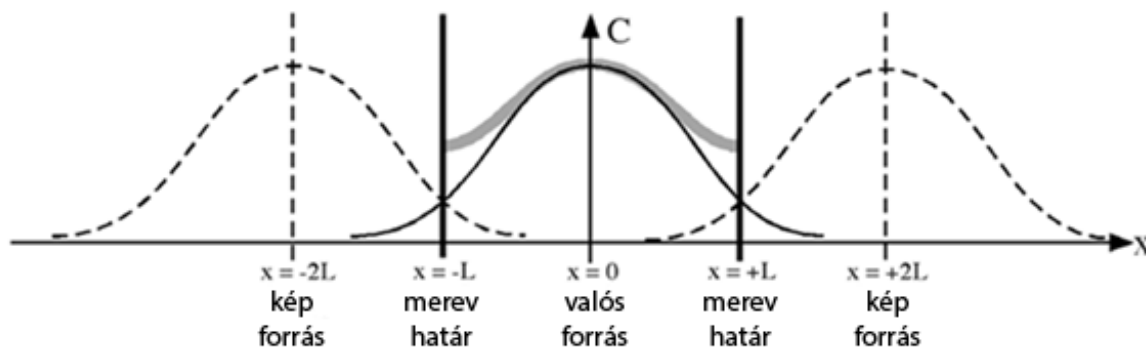
Többszörös határok:

Egynél több határ együttes jelenléte esetén további tükörkép-forrásokra van szükség. Továbbra is meghagyva az előzőekben tárgyalt egydimenziós rendszert, ez esetben $x = -L$ és $x = +L$ értékeknél is határokat feltételezünk.

$$(12a) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

$$(12b) \quad \begin{array}{ll} \text{Kezdeti feltétel:} & (t = 0): C(x) = M\delta(x) \\ \text{Határfeltétel:} & \partial C / \partial x = 0 \text{ ha } x = -L \text{ és } x = +L \end{array}$$

A $x = -L$ értéknél no flux határfeltétel teljesüléséhez $x = -2L$ értéknél a fentiekhez hasonlóan tükörkép-forrást rendelünk a rendszerhez. Az $x = +L$ értéknél no flux határfeltétel teljesüléséhez $x = +2L$ értéknél is tükörkép-forrásra lesz szükségünk. Ezt a két tükörkép-forrást láthatjuk az alábbi ábrán.



A fenti ábra a rövid ideig tartó koncentrációs mezőt ábrázolja. Hosszabb időintervallum esetén azt várhatjuk, hogy pl. az $x = -2L$ értéknél eredő forrás eléri és elkezd áthágni az $x = +L$ értéknél lévő határt, és az anyag ismét kiáramlik a valós tartományból. A veszteség ellentételezésére újabb tükörképre lesz szükség $x = +4L$ értéknél, azaz az $x = -2L$ "tükörképére az $x = +L$ határnál. Ezen az indoklason továbbhaladva, végül végtelen számú tükörképre lesz szükség, ugyanúgy, mint ahogyan a párhuzamos tükrök közé helyezett tárgynak is végtelen számú tükörképe keletkezik. A (12) egyenlet megoldása tehát:

$$(13) \quad C(x, t) = \frac{M}{A_{yz}\sqrt{4\pi Dt}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x+2nL)^2}{4Dt}\right) \right)$$

hasonlóképpen, ha $x = \pm L$ értéknél a határok tökéletesen abszorbensek, a következő egyenletet kell megoldanunk:

$$(14a) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

$$(14b) \quad \begin{array}{ll} \text{Kezdeti feltétel:} & (t = 0): C(x) = M\delta(x) \\ \text{Határfeltétel:} & C = 0 \text{ ha } x = -L \text{ és } x = +L \end{array}$$

Az egyszerű geometriai alapelveket követve megállapíthatjuk, hogy negatív tükörképekre lesz szükség $x = \pm 2L$ értékeknél, $x = \pm 4L$ értékeknél pedig pozitív tükörképekre, és így tovább, váltakozó sorrendbe, Ez alapján:

$$(15) \quad C(x, t) = \frac{M}{A_{yz}\sqrt{4\pi Dt}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{-\exp\left(-\frac{(x+(4n-2)L)^2}{4Dt}\right)}_{\text{negatív kép}} + \underbrace{\exp\left(-\frac{(x+4nL)^2}{4Dt}\right)}_{\text{pozitív kép}} \right)$$

Két- és háromdimenziós rendszerek határai:

Az előzőekben kifejtett egydimenziós rendszerek esetén alkalmazott szuperpozíciós módszer két- és háromdimenziós rendszerek esetére is kiterjeszthető. Példaképpen vegyünk alapul egy háromdimenziós tartományt, melyet stagnáló (zérus áramlás) folyadékkal töltünk fel. A rendszert alulról egy szilárd sík határolja $y=0$ értéknél, így a vizsgált tartomány $y \geq 0$ területén lesz. Az x - z síkban a rendszer nem körülhatárolt. A rendszerbe egységnyi, M tömegű anyagot bocsátunk $(x,y,z)=0$ pontban, $t=0$ időpontban. A diffúzió izotropikus és homogén jellegű lesz. Fontos megjegyezni, hogy mivel a forrás a határon helyezkedik el, a gradiens feltétel(3b) nem alkalmas arra, hogy megakadályozza az anyag kiáramlását a valós tartományból ($y \geq 0$). Ennél általánosan határfeltételt használva:

$$(16a) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right)$$

$$(16b) \quad \begin{array}{ll} \text{Kezdeti feltétel:} & (t = 0): C(x) = M\delta(x) \delta(y) \delta(z) \\ \text{Határfeltétel:} & \text{nincs fluxus a folyadék tartományból } y = 0\text{-nál} \end{array}$$

Az általános megoldást, mely megfelel a leírt transzportegyenletnek és kiindulási feltételnek is, a 24 (25) egyenlete írja le, melyet itt az egyszerűség kedvéért megismétlünk:

$$C(x, y, z, t) = \frac{M}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{D_x D_y D_z}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4D_y t} - \frac{z^2}{4D_z t}\right) = [ML^{-3}]$$

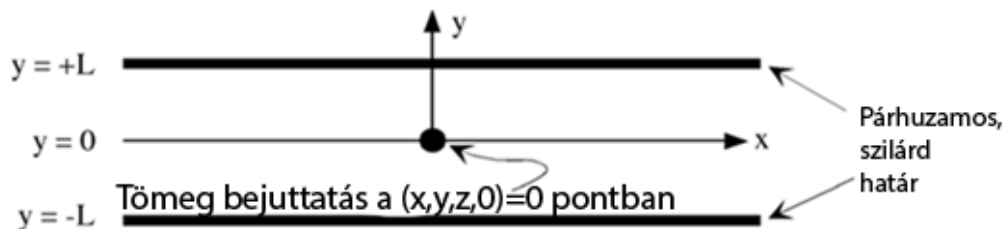
Valójában ez a megoldás kielégítő választ nyújt a no flux határfeltételek gradiensének kifejezésére is, pl. a (3b) egyenletben. A megoldás azonban nem őrzi meg az anyag tömegét a valós tartományon belül, hanem engedi, hogy az anyag fele a $y < 0$ területre diffundáljon, és ezáltal megszegi a no flux határfeltételeket. A no flux feltétel érvényesüléséhez $y=0$ értéknél tükörkép-forrás hozzárendelésére van szükség. Az $y=0$ értéknél elhelyezkedő eredeti forrás

tükörképe szintén $y=0$ értéknél kap helyet. Mivel ezáltal az eredeti és tükörkép-források ugyanazon ponton fognak elhelyezkedni, csupán egyetlen faktor, a 2 hozzáadása szükséges a fenti megoldáshoz. ha emellett azt is figyelembe vesszük, hogy a diffúzió izotróp jellegű ($D_x = D_y = D_z = D$), a (16) egyenlet megoldása:

$$(17) \quad C(x, y, z, t) = 2 \frac{M}{(4\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}\right)$$

Utolsó példaként tegyük fel, hogy a háromdimenziós rendszerben egymással párhuzamos határok találhatók. A folyadéktartomány x - z síkban nem körülhatárolt, de az y -síkban szilárd, síkban elhelyezkedő határok veszik körül $y = \pm L$ értékeknél. Az áramlás zérus mértékű, a diffúzió pedig izotropikus és homogén. Pillanatnyi idő alatt kibocsátott M tömegű anyag kerül a rendszerbe $x = y = z = t = 0$ értékeknél. A megfelelő transzportegyenlet és kezdeti feltételek a következők lesznek:

$$(18) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right), \text{ ha } C(x, y, z, t = 0) = M \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$



244. ábra: Párhuzamos, szilárd határok közé bocsátott anyag, a rendszer x és z síkban nem körülhatárolt

Ahhoz, hogy akár a no flux akár a tökéletesen abszorbens határfeltételek teljesülhessenek, tükörkép- forrásokat rendelünk a valós források tükrözési pontjaihoz a $y = \pm L$ síkok mentén. A valós forrás helye: $(x=0, y=0, z=0)$. Ezért a tükörkép források a $(x=0, y=2nL, z=0)$ pontokon helyezkednek majd el, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ érték mellett, a \pm végtelen felé felfelé haladva. Ha az $y = \pm L$ értéknél lévő határok no flux határok, a tükörkép források mind pozitívak lesznek, és a koncentráció mező a következőképpen alakul:

$$(19) \quad C(x, y, z, t) = \frac{M}{(4\pi Dt)^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2+(y+2nL)^2+z^2}{4Dt}\right)$$

Ha az $y = \pm L$ értéknél lévő határok tökéletesen abszorbensek, pozitív és negatív tükörképekre is szükség lesz. A koncentráció mező ebben az esetben a következőképpen alakul:

$$(20) \quad C(x, y, z, t) = \frac{M}{(4\pi Dt)^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\exp\left(-\frac{x^2+(y+(4n-2)L)^2+z^2}{4Dt}\right) \right) + \exp\left(-\frac{x^2+(y+4nL)^2+z^2}{4Dt}\right)$$

A fejezet honlapján található animáció a koncentráció alakulását vizsgálja egy olyan esetben, amikor egységnyi anyagot szilárd, párhuzamosan elhelyezkedő határok közé bocsátanak, félútnyi távolságra, mint a fenti ábrán ábrázolt esetben. Az animáció két esetet vizsgál meg, az egyik tökéletesen abszorbens határ esetében, a másik no flux határ esetében mutatja a történéseket. A megoldáshoz a fenti, (19) és (20) egyenlet megoldásait használjuk. Mindkét rendszer esetében a $z=0$ síkban mutatjuk a koncentráció mezőt. Az egyes rendszerek

koncentráció profilja, $C(x=0, y, z=0)$ külön ábrán is fel vannak tüntetve, összehasonlítás céljából.

Az animáció megtekintése előtt válaszoljon az alábbi kérdésekre:

1. A párhuzamos határok helye: $y = \pm 70$ cm, a diffúziós együttható pedig $D = 1 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$. Becsülje meg, mikortól fogják a határok befolyásolni a diffúzió felhő alakulását.
2. Mely határfeltétel esetében fognak gyorsabban csökkenni a koncentrációs csúcsértékek? Miért?
3. Mi lesz a végső koncentrációs érték az egyes rendszerekben?

Az animáció megtekintése során figyelje meg a következőket:

4. Az $(x=0, y, z=0)$ profilok alapján mikor kezd érezhetővé válni a határok koncentrációs mezőre gyakorolt hatása? Mennyiben hasonlít ez az 1) kérdésre adott válaszához?
5. Ha a két profil $C(x=0, y, z=0)$ nem lenne külön jelölve, honnan tudná, melyik profil rendelkezik no flux határral, és melyik abszorbens határral?
6. Végezetül, figyelje meg a no flux határral rendelkező rendszert. Figyelje meg, hogy az idő előrehaladtával a határra merőlegesen elhelyezkedő profil, $C(y)$ egyre egyenletesebbé válik. Végül a profil olyannyira hasonlóvá válik a rendszer többi eleméhez, hogy kijelenthetjük, hogy az egész rendszer elvegyült az adott dimenzióban. Ezen a ponton túl a felhő alakulása olyan jellegű lesz, mintha a rendszer kétdimenziós (x és z) lenne. Ennek részleteit később tárgyaljuk majd a következőkben.

Válaszok:

1. A diffúziós folt általános hossza meghatározza a felhő szélének helyét a felhő közepétől 2σ távolságra (**22.1**). Ezen meghatározás alapján a felhő széle a következő esetben érinti a határt: $L = 2\sigma = 2\sqrt{2Dt}$. Ahol $L = 70$ cm és $D = 1 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$, $t = 613$ s. Ugyanakkor, a felhő szélének 2σ alaprajza az összes anyagnak csupán 95%-át tartja a felhőn belül, mivel $t=613$ s időpontban az anyag 5%-a már elérte a határt, és át is haladt rajta. A hagyományosabb becslési módszer a felhő szélének helyét 3σ értékre becsülné, mely esetben a felhő széle $t = L^2/(18D) = 270$ mp értéknél érné el a határt. Ebben az esetben az anyag csupán 0.3%-a érné el a határt (**22.1**)
2. A koncentrációcsúcs sokkal gyorsabban csökken az abszorbens határral rendelkező rendszer esetében mivel a határok ez esetben átengedik az áramlást, és azáltal nagyobb mértékű hígulást tesznek lehetővé, mint a no flux határok.
3. Mivel egyik rendszer sem körülhatárolt x és z síkokban, a végső koncentráció mindkét esetben zérus értékű lesz.
4. Az animáció alapján a két görbe kb 250 mp-nél kezd távolodni egymástól. Ez nagyjából megfelel a $L=3\sigma$ értékhez becsült időpontnak.
5. A határfeltételeket a profilok határnál kialakult alakja is tükrözi. Az abszorbens határfeltétel esetében $\partial C/\partial y > 0$, $y = -L$ értéknél és $d < 0$, $y = +L$ értéknél. Mindkét eset arra enged következtetni, hogy a határnál áramlás tapasztalható. No flux határ esetében mindkét határnál $\partial C/\partial y = 0$ tapasztalható.

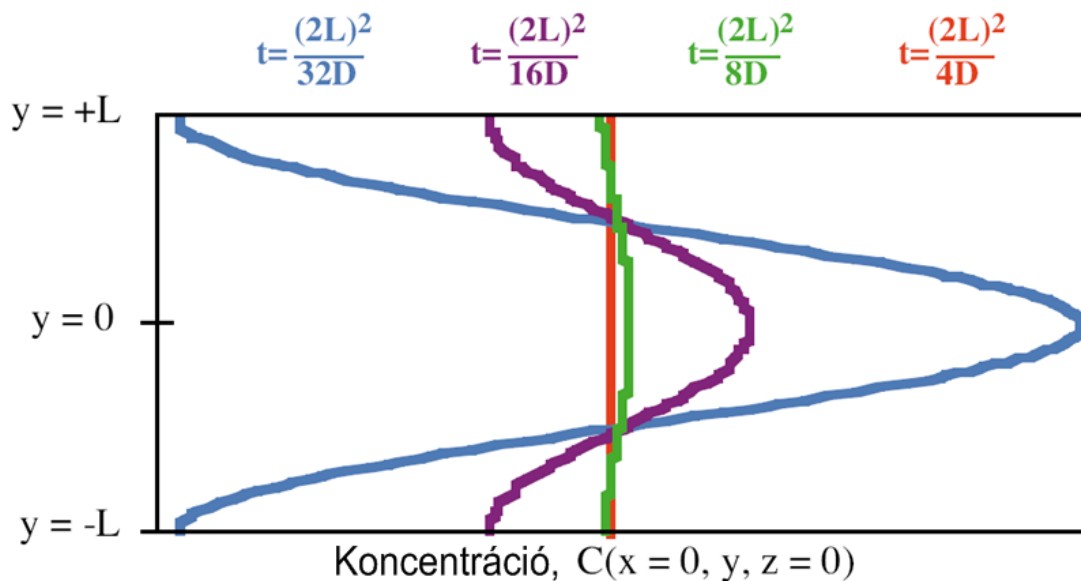
A határok közötti egységes feltételek kialakulásához szükséges idő.

A **24.1** láthattuk, hogy a redukált dimenziós rendszerként is felírható rendszerek esetében (pl. kétdimenziós rendszer felírása háromdimenziós helyett) a transzportegyenlet is egyszerűsödni fog. Amikor tehát valaki először szeretne áttekinteni egy rendszert, mindig érdemes megvizsgálni, hogy felírható-e az adott rendszer evesebb dimenzió vonatkozásban is. Egy adott dimenzió elhagyásához arra van szükség, hogy y síkon egyenlő legyen a koncentráció, azaz

$\partial C/\partial y = 0$. Ha $\partial C/\partial y = 0$, akkor a diffúziós fluxus ($D \partial^2 C/\partial y^2$) és az advektív fluxus ($v \partial C/\partial y$) is elhagyható az adott síkban.

$$(21) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D \left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right]$$

Ezek elhagyásával a transzportegyenlet kétdimenziósra (x és z) egyszerűsödik. Példának okáért vegyük az iménti animáció párhuzamos, no flux határokkal rendelkező rendszerét. A határok helye: $y = \pm L$. A koncentráció mező kezdetben három dimenziós, x, y és z gradiensekkel. Idővel azonban a határokra merőleges profil, $C(y)$ egyenletessé válik. $C(y)$ időbeli fejlődését a **245. ábra** szemlélteti. Az ábrán is jól látható, hogy a rendszer y síkban, azaz a határokra merőleges síkban egyenletes lesz $t = t_y = (2L)^2/4D$ idő alatt. Ezt az időt nevezzük keveredési időnek.



245. ábra: Egységnyi anyagot bocsátunk egy folyékony tartományba ($x, y, z, t=0$ értéknél). A tartomány x-z síkban nem körülhatárolt, de $y = +L$ and $-L$ értékeknél párhuzamos, no flux határok övezik. A kibocsátás után több időpontban is mérjük a koncentráció profilokat $C(x=0, y, z=0)$. A rendszer az y-tartományban $t = (2L)^2/4D$ idő alatt válik teljesen egyenletessé (vegyülés).

A vegyülési időn, $\partial C/\partial y = 0$, túl a rendszert tekinthetjük kétdimenziós (x és z) rendszernek is. Ennek oka, hogy mivel $t > t_y$, a transzportegyenlet a következőképpen egyszerűsödik:

$$(22) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right]$$

a koncentráció alakulása pedig leírható a *kétdimenziós rendszerbe* bocsátott pillanatnyi pontforrásból kiáramló anyagra vonatkozó megoldással (ld. **24.1**)

$$(23) \quad C(x, z, t) = \frac{M}{(2L)4\pi Dt} \exp\left(-\frac{x^2+z^2}{4Dt}\right)$$

ahol $(2L)$ a mostanra elhanyagolt dimenzió hosszát jelöli.

A vegyülési idő.

Generikus rendszer esetében a vizsgált hossz alatt a tartomány egész hosszanti kiterjedését értjük egy adott irányban, pl. L_x , L_y , L_z . Ha a tartomány középpontjába anyagot bocsátunk, az egységes feltételek eléréséhez szükséges idő mindegyik dimenzióban a következő lesz:

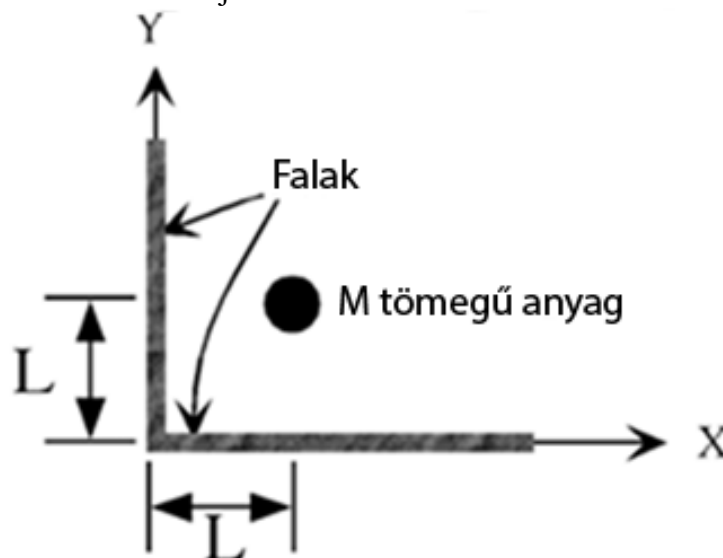
$$(24) \quad \text{Vegyülési idő } t_i = l_i^2/4D_i, \text{ ahol } i = x, y, z$$

A fenti definíció általános érvényű ugyan, de a **245. ábra** látottakból is kitűnik, hogy ennél rövidebb idő alatt, $L_i^2/8D_i$, is megvalósul a csaknem tökéletes keveredés.

25.2. Feladatsor

25.2.1. Feladat

M tömegű anyagot pillanatnyi kibocsátással egy nagy, alacsony falú dobozba engedünk. A doboz teljes szélessége és hossza $L_x=L_y=100L$, a doboz magassága pedig $L_z=0.01L$. A doboz minden oldala no-flux határértéket jelöl. A tömeg kibocsátás helye L távolság a két szomszédos oldaltól, és középtáv a felső és alsó határok között. állapítsa meg a diffúziós, D által képviselt izotropikus diffúziót a doboz belsejében.



Jellemezze a dobozban $t=0$ és $t=L/D$ közötti koncentrációmezőt.

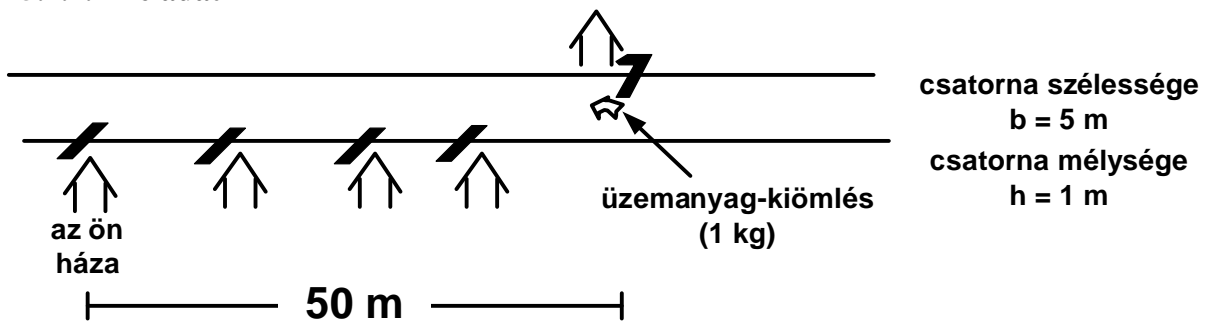
Segítség 1: Mikor jön létre az anyag egyenletes vertikális keveredése?

Segítség 2: Becsülje meg, mikorra éri el az anyag a doboz függőleges falát

Segítség 3: Hogyan hatnak az egyes határok a megoldásra $t = 0$ és L^2/D idő alatt

Segítség 4: Határozza meg a tükrökép-források helyét a no flux határfeltétel teljesüléséhez.

25.2.2. Feladat

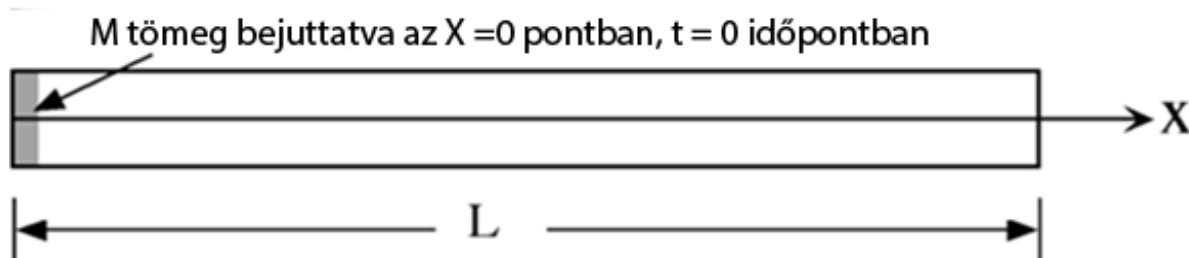


Egy ház és egy kikötő van az Ön tulajdonában egy csatorna mentén, ami öntől 25 méterre ér véget öntől, a folyás irányában felfelé. Egy napon a szomszédja csekély mértékű (1kg) benzinnel szennyezi a csatorna vizét. A csónakforgalomnak köszönhetően a csatorna diffúzitása igen magas, $D=0.01 \text{ m}^2/\text{s}$. A csatorna áramlása elhanyagolható, olyannyira, hogy a benzin kizárólag a diffúzió révén áramlik az Ön háza felé ($x=-50\text{m}$). Tegyük fel, hogy a benzin nagyon gyorsan keveredik a csatorna széle és mélysége mentén, és hogy a csatorna falánál nem tapasztalható fluxus.

- Mekkora lesz a koncentráció az Ön házánál 10 órával a szennyező anyag kibocsátása után?
- Mekkora lesz a maximum koncentráció az Ön házánál, és mikorra alakul ki?
- Tegyük fel, hogy a biztonságos határérték $0.2 \text{ g}/\text{m}^3$. A kiömlés után mennyi idővel éri a koncentráció ezt a szintet?
- Ismételje meg az a, b és c műveleteket úgy, hogy azt feltételezzük, hogy a határ $x=-75 \text{ m}$ -nél teljesen abszorbens.

25.2.3. Feladat

Adott mennyiségű festéket, $M=1\text{mg}$ bocsátunk egy egyik végén lezárt csőbe oly módon, hogy a festékanyag egységesen kitölti a cső y - z keresztmetszetét. A cső minden határa n_o fluxus határ. A cső hossza $L=10 \text{ cm}$, a molekuláris diffúzió $D=10^{-5} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$, a cső átmérője pedig $A_{yz} = 1 \text{ cm}^2$. Tételezzünk fel 1-D diffúziót.



- Becsülje meg, hogy időben (T) mikorra fog a festék egyenletesen eloszlani x tartományban.
- Erősítse meg becsülésének eredményét azáltal, hogy meghatározza $C(x)$ értékét $t = T/10, T/4, T/2, T$ időpontokban is.

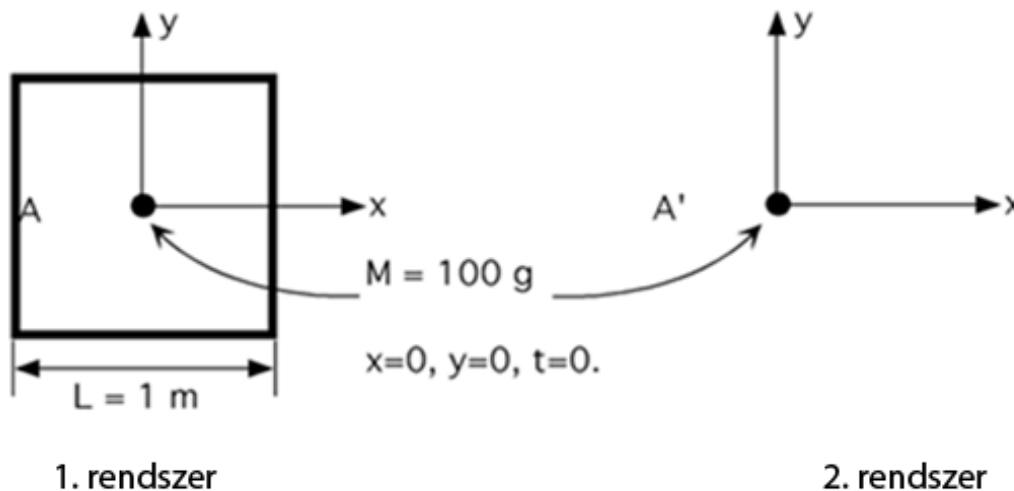
25.2.4. Feladat

Induljon ki a lent ábrázolt két rendszerből. Az 1. rendszert no-flux falak határolják, melyek egy $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 0.1\text{ m}$ nagyságú dimenziótartományt határoznak meg. A 2. rendszert párhuzamos, vízszintes (x - y tengelyű) no flux határok határolják $z = \pm 0.1\text{ m}$ -nél, de egyébként korlátozás nélkül létező rendszer.

Mindkét rendszer azonos izotropikus diffuzitással rendelkezik: $D = 2\text{ cm}^2\text{ s}^{-1}$ $t=0$ időpontban egységnyi tömegű, $M=100\text{ g}$ anyagot bocsátunk mindkét rendszerbe $x=0$, $y=0$ és $z=0$ pontokon. Mindkét rendszerben koncentrációpróbát (A és A') végzünk azonos pontokon ($x = -0.5\text{ m}$, $y = 0$, $z = 0$). A próbák detekciós határértéke 10 ppm (gm^{-3}).

- Becsülje meg, mely időpontban kezd elválni egymástól A és A' koncentrációjának mértéke?
- Mi lesz az egyes rendszerek végső koncentrációértéke, és mikor lesz ez az érték mérhető?
- Írja le, hogyan alakul a koncentráció mező az egyes rendszerek esetében: $C(x,y,z,t)$.

A Z koordináta kilóg az oldalból



25.3. Megoldások

25.3.1. Megoldás

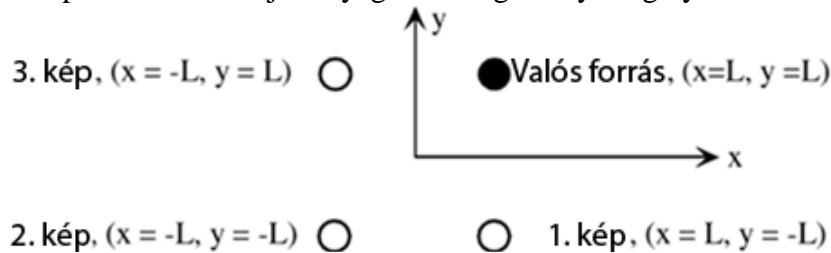
Ismertesse a koncentráció mezőt a dobozban $t = 0$ és $t = L^2/D$ között.

- Segítség: mikor jön létre az anyag egyenletes vertikális keveredése?**
a 25.24 egyenlőségéből két párhuzamos, egymástól L_z távolságban lévő határ közé fél távolságra bocsátott anyag koncentrációja a két határ között $t = L_z^2/4D$ időpontban lesz egyenletes, ahol L_z a két határ távolságát jelöli. A vertikális tartományban a koncentráció egyenletes elkeveredésének időpontja ezért: $t = L_z^2/4D$.
- Segítség: Becsülje meg, mikorra éri el anyag a doboz függőleges falát!**
becslésünk alapja, hogy a felhő a tömegeloszlás eltérései szabályaihoz alkalmazkodva fogja először érinteni a határt. A felhő akkor fogja a felső és alsó falat érinteni, amikor $3\sigma = 3\sqrt{2Dt} = L$, vagy amikor $L^2 = 18D$. A felhő akkor fogja a túlsó falat érinteni, amikor $3\sigma = 3\sqrt{2Dt} = 99L$, vagy amikor $t \approx 545 L^2/D$.
- Segítség: Hogyan hatnak az egyes határok a megoldásra $t = 0$ és L^2/D idő alatt?**

Használja az 1. és 2. segítségéknél meghatározott időskálákat. Mivel a vertikális tartományban a koncentráció mező nagyon hamar, adott idő $1/10.000$ része alatt egyenletessé válik, feltételezhetjük, hogy z tartományban a koncentráció azonnal egyenletes lesz, azaz $\partial C/\partial z = 0$ egész idő alatt. A vizsgált idő alatt a felhő nem éri el a túlsó falat ($L^2/18D < L^2/D$), és korrekcióra lesz szükség ahhoz, hogy ezeknél a falaknál megvalósulhasson a no flux határfeltétel.

4. **Segítség: Határozza meg a tükörkép-források helyét a no flux határfeltétel teljesüléséhez. .**

A következő pontokon van szükség tükörkép-források elhelyezésére. A 2. tükörkép ellensúlyozza a 3 tükörképen keresztül zajló anyagvesztéséget az x -tengelyen keresztül és az 1. tükörképen keresztül zajló anyagvesztéséget az y -tengelyen keresztül.



Megoldás - . A dobozban jelen lévő koncentráció meghatározásához a kétdimenziós, pillanatnyi anyagkibocsátások (3.23 egyenlet) szuperpozicionálására van szükség a fenti források mindegyikénél.

$$C_R(x, y, t) = \frac{M}{L_z 4\pi D t} \bullet$$

$$\exp\left(-\frac{(x-L)^2 + (y-L)^2}{4Dt}\right) + \exp\left(-\frac{(x-L)^2 + (y+L)^2}{4Dt}\right) + \exp\left(-\frac{(x+L)^2 + (y+L)^2}{4Dt}\right) + \exp\left(-\frac{(x+L)^2 + (y-L)^2}{4Dt}\right)$$

valós forrás
1. tükörkép
2. tükörkép

3. tükörkép

25.3.2. Megoldás

- a. $x = -150$ m értéknél tükörkép-forrásra van szükség ahhoz, hogy a csatorna végén teljesüljön a no flux határfeltétel. A csatornában az üzemanyag koncentrációját ezen két egydimenziós pillanatnyi forrás szuperpozíciója határozza meg.

$$C(x, t) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi Dt}} \left[\exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right) + \exp\left(\frac{-(x+150)^2}{4Dt}\right) \right]$$

VALÓS
TÜKÖRKÉP

Ebből adódóan $x = -50$ m értéknél, $t = 10$ hrs (= 36000 s),

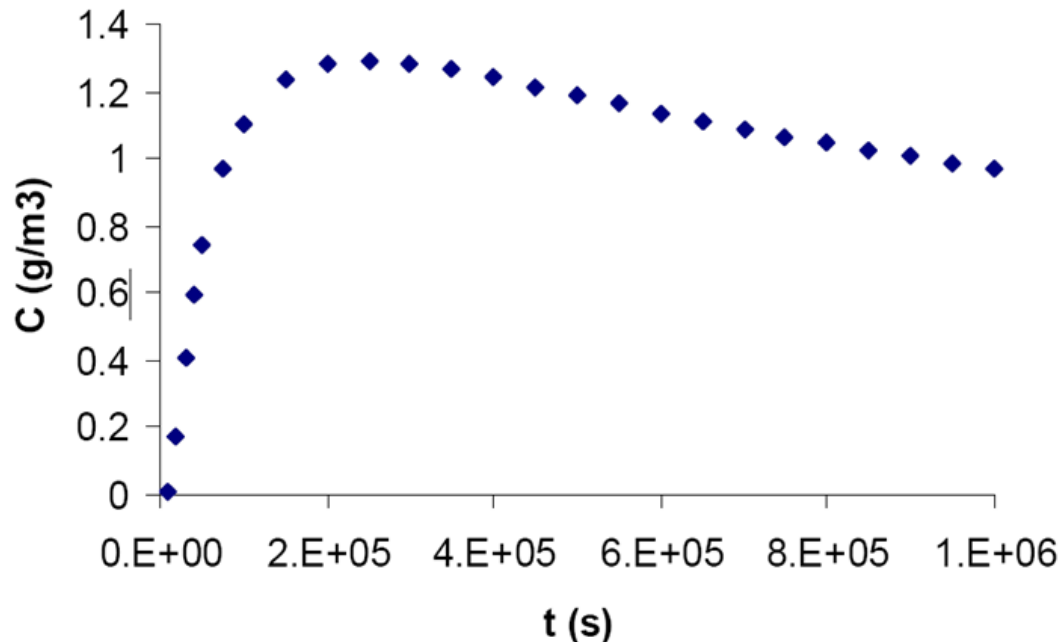
$$C = \frac{1000 \text{ g}}{5 \text{ m}^2 \sqrt{4\pi(0.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})(36000 \text{ s})}} \left[\exp\left(\frac{-(50 \text{ m})^2}{4(0.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})(36000 \text{ s})}\right) + \exp\left(\frac{-(100 \text{ m})^2}{4(0.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})(36000 \text{ s})}\right) \right]$$

$$= 2.97 \text{ gm}^{-3}(0.176 + 0.001) = \mathbf{0.53 \text{ gm}^{-3}}$$

b. A grafikus megoldás a legmegfelelőbb.

$$C(-50 \text{ m}, t) = \frac{1000 \text{ g}}{5 \text{ m}^2 \sqrt{4\pi(0.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})t}} \left[\exp\left(\frac{-(50 \text{ m})^2}{4(0.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})t}\right) + \exp\left(\frac{-(100 \text{ m})^2}{4(0.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})t}\right) \right]$$

az alábbi ábra alapján:



Az ábra alapján látható, hogy a háznál a maximum koncentráció értéke hozzávetőlegesen: 1.3 gm^{-3} (ahol $t \approx 2.4 \times 10^5 \text{ s} = 67 \text{ hrs}$)

c. A (b) feladat megoldására $C = 0.2 \text{ gm}^{-3}$ értéknél a grafikus vagy a próbaszerű megoldás a legkézenfekvőbb módszer. Mivel az alábbi megoldóképletből hiányoznak a korai állapotokra vonatkozó adatok, próbaszerű megoldással közelítjük meg a kérdést:

$$0.2 \text{ gm}^{-3} = \frac{1000 \text{ g}}{5 \text{ m}^2 \sqrt{4\pi(0.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})t}} \left[\exp\left(\frac{-(50 \text{ m})^2}{4(0.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})t}\right) + \exp\left(\frac{-(100 \text{ m})^2}{4(0.01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})t}\right) \right]$$

t értékre. Az ebből kapott megoldás: $t = 21060 \text{ s} = 5.8 \text{ hrs}$.

Hasonlítsuk össze a most kapott megoldást a Hiba! A hivatkozási forrás nem található., hogy lássuk, milyen hatással van a no flux határ a háznál észlelhető üzemenyag-koncentrációra.

d. $x = -150 \text{ m}$ értéknél tükörkép süllyesztőre lesz szükség, hogy a csatorna végén tökéletesen abszorbens határfeltétel valósuljon meg. (ld. **25.1**)

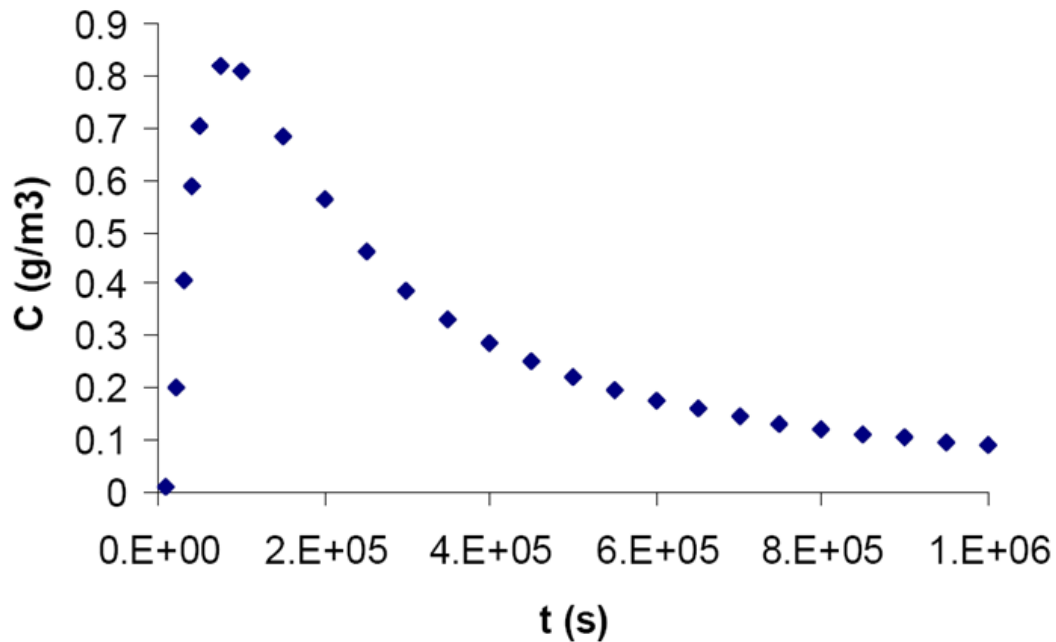
$$C(x, t) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi Dt}} \left[\exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right) - \exp\left(\frac{-(x + 150)^2}{4Dt}\right) \right]$$

VALÓS

TÜKÖRKÉP

(a) - (c) viszonylag egyszerűen megismételhető, a következő eredménnyel:

- $C(x = -50 \text{ m}, t = 36000 \text{ s}) = 0.52 \text{ gm}^{-3}$ (azaz ilyen rövid idő alatt a határ hatása nem vagy csak nagyon kis mértékben érzékelhető) i
- $C_{max}(x = -50 \text{ m}) = 0.82 \text{ gm}^{-3}$ (azaz $t \approx 83000 \text{ s} = 23 \text{ hrs}$).

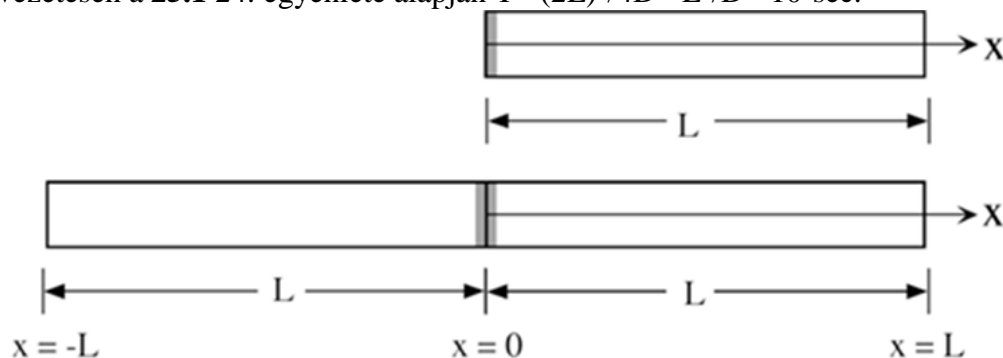


$C = 0.2 \text{ gm}^{-3}$ amikor $t = 21060 \text{ s}$. A válasz megegyezik a (c) - esettel, mielőtt a felhő elérné a határt (azaz $2\sqrt{2Dt} < 75 \text{ m} \Rightarrow t < 70300 \text{ s}$), alatt a határ hatása nem vagy csak nagyon kis mértékben érzékelhető

25.3.3. Megoldás

- a. **Becsülje meg, hogy időben (T) mikorra fog a festék egyenletesen eloszlani x tartományban.**

A túlsó falnál kibocsátott festékanyag diffúziója (felső ábra) hasonló lesz ahhoz, mintha a festékanyagot az egymástól kétszeres távolságban lévő túlsó falak közt félúton bocsátanák a rendszerbe (alsó ábra). Ennek oka, hogy a diffúzió mindkét rendszerben $\exp(-x^2/4Dt)$ függvényeként viselkedik, amelynek szimmetriája csaknem $x = 0$. Ezen hasonlóság alapján azt várhatjuk, hogy a festékanyag mindkét rendszerben ugyanakkora fog egyenletesen elkeveredni, azaz az alsó rendszer számára felállított skála szerint, nevezetesen a **25.1** 24. egyenlete alapján $T = (2L)^2/4D = L^2/D = 10^7 \text{ sec}$.



- b. **Erősítse meg becsülésének eredményét azáltal, hogy meghatározza $C(x)$ értékét $t = T/10, T/4, T/2, T$ időpontokban is.**

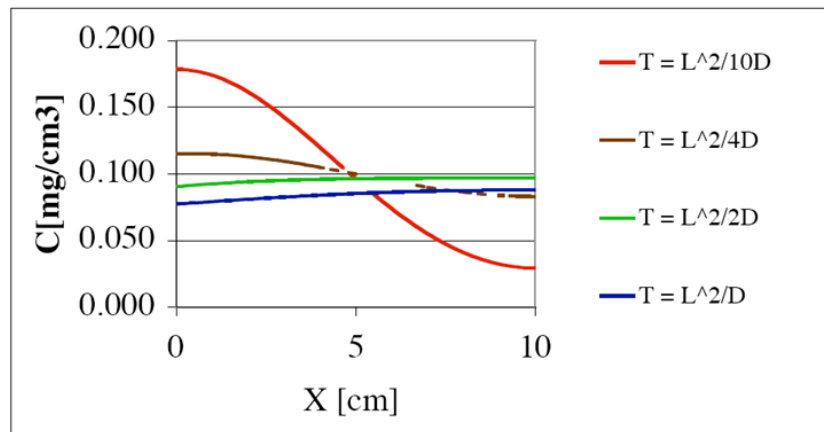
Két párhuzamos határ esetében elméletileg végtelen számú tükörképre van szükség ahhoz, hogy teljesüljenek a no flux határérték feltételek. Az egyszerűség kedvéért

kezdetben minden határhoz csak egyetlen tükörképet rendelünk hozzá. Az $x=0$ határhoz I1 és $x=0$ értéknél elhelyezett tükörképre lesz szükség, azaz ennek helye megegyezik a valós forrás helyével. Az $x=L$ értéknél lévő határhoz a tükörkép helye I2 és $x=2L$ a valós forráshoz, ugyanúgy, mint az I3 tükörkép az I1 forráshoz. A koncentráció mező:

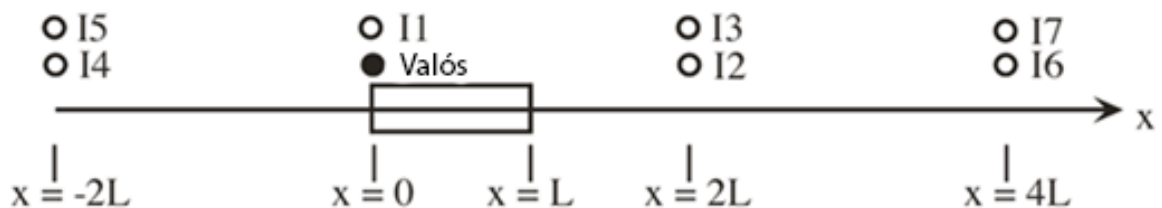
$$C(x, t) = \frac{M}{A_{yz}\sqrt{4\pi Dt}} (2\exp(-x^2/4Dt) + 2\exp(-(x - 2L)^2/4Dt))$$

Valós + I1

I2+I3



A megoldás arra enged következtetni, hogy a 3 tükörkép nem elegendő, mivel a vizsgát idő alatt nem valósul meg a tömegmegmaradás törvénye. A végső koncentráció értékének $1\text{mg}/(10\text{cm}^3) = 0.1 \text{ mg cm}^{-3}$ kellene lennie, de a fenti megoldás mégis 0.66 mg cm^{-3} és $t=L^2/D$. Ráadásul, a határoknál a koncentráció gradiens értékének zérusnak kellene lennie a határoknál, $\partial C/\partial x = 0$, hogy megvalósuljon a no flux határfeltétel. Ez a feltétel nem valósul meg $x=10\text{cm}$ esetében. Az összehasonlítás kedvéért a következő megoldás hét tükörképet tartalmaz, mindegyiket I jelöléssel látjuk el.



I1 a valós forrást egyenlíti ki $x=0$ határnál.

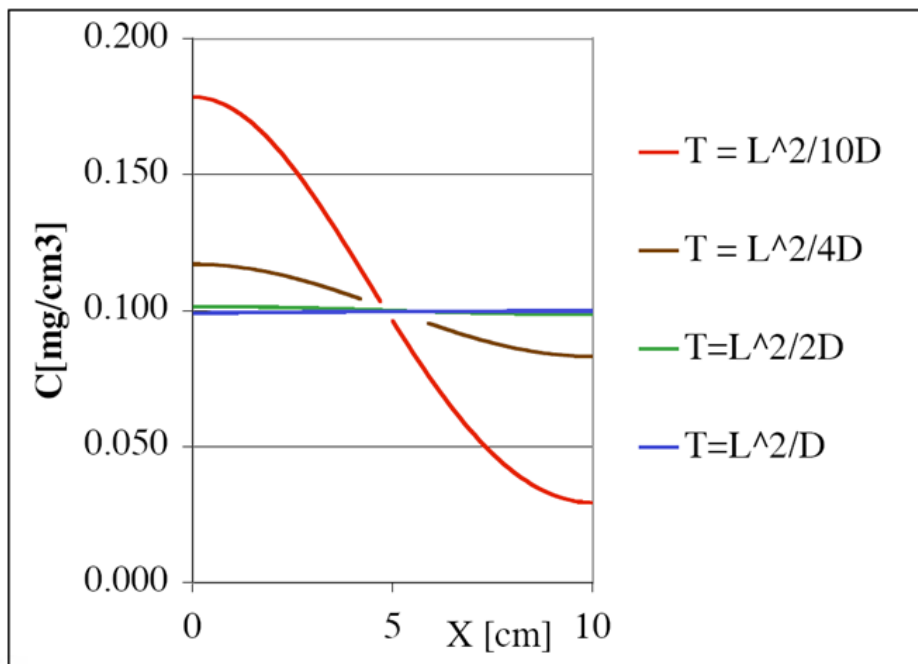
I2 és I3 a valós forrást és I1-et egyenlíti ki $x=L$ határnál.

I4 és I5 I2-t és I3-at egyenlíti ki az $x=0$ határon keresztül.

I6 és I7 I4-et és I5-öt egyenlíti ki $x=L$ határon keresztül.

$$C(x, t) = \frac{M}{A_{yz}\sqrt{4\pi Dt}} (2\exp(-x^2/4Dt) + 2\exp(-(x - 2L)^2/4Dt) + 2\exp(-(x + 2L)^2/4Dt) + 2\exp(-(x - 4L)^2/4Dt))$$

Valós + I1 I2+I3 I4+I5 I6+I7



A hét tükörképpel a koncentráció értéke helyes lesz, $T = L^2/D$. Hosszabb időtartam alatt továbbra is tömegveszteség fog bekövetkezni a kiegyensúlyozatlan tükörképek miatt, és a koncentráció értéke csökkenni fog. A hosszabb időintervallumok azonban kívül esnek a vizsgálat körén, mert miután a rendszer tökéletesen elvegyült $(\partial C/\partial x = 0$ minden x esetében) tartományban, a valós profil nem fog tovább változni.

25.3.4. Megoldás

- a. **Becsülje meg, mely időpontban kezd elválni egymástól A és A' koncentrációjának mértéke?**

A és A' koncentrációjának mértéke akkor kezdenek eltérni egymástól, amikor a határ hatása érezhetővé válik az 1. rendszerben. Ez akkor következik be, amikor a diffúziós felhő eléri a határt. A találkozás időpontjának megbecsüléséhez a felhő széléhez 3σ hosszanti értéket rendelünk. Ebből adódóan a felhő akkor ér a határhoz, amikor teljesül $3\sigma = 3\sqrt{2Dt} = 50\text{cm}$, úgy, hogy $t = (50\text{cm})^2 / 18 \cdot 2\text{cm}^2 \text{ s}^{-1} = 70 \text{ sec}$.

- b. **Mi lesz az egyes rendszerek végső koncentrációértéke, és mikor lesz ez az érték mérhető?**

Az 1. rendszerben a végső koncentráció érték $C = (100\text{g}) / (1\text{m} \times 1\text{m} \times 0.1\text{m}) = 1000 \text{ ppm}$ lesz. z az érték akkor érvényesül, amikor az anyag tökéletesen elvegyül a tartományban. A legnagyobb dimenziót használva az időskála megbecsüléséhez, $t = (L)^2 / (4D) = 1250 \text{ s}$. Ahogy azt korábban is megjegyeztük, az a becslés konzervatív, és $t = (L)^2 / (8D) = 625 \text{ s}$ is reális becsült értéket képvisel. Mivel a 2. rendszer nincs körülhatárolva, a hígulás a végtelenségig tud zajlani, és a végső koncentráció érték $C=0 \text{ ppm}$, ez azonban elméletileg csak végtelen idő alatt valósulhat meg. Mivel a próba során az észlelési határérték 10ppm , bármely $C < 10 \text{ ppm}$ koncentráció alatti értéket zérus értékű koncentrációként fogunk észlelni, ennek megvalósulása pedig véges idő alatt is lehetséges.

- c. **Írja le, hogyan alakul a koncentráció mező az egyes rendszerek esetében: $C(x,y,z,t)$.**

Mindkét rendszer esetében a z tartományban a kibocsátás utáni $t = (10\text{cm})^2 / (4 \times 2\text{cm}^2\text{s}^{-1}) = 12.5$ s időben a koncentráció egyenletes lesz. Mivel ez az időintervallum a másik vizsgált időtartamhoz (1250 sec) képest viszonylag rövid, a 3-D fázist figyelmen kívül hagyva kétdimenziós megoldást használunk. Az 1. rendszer esetében a no flux határfeltétel érvényesüléséhez végtelen számú tükörkép-forrásra van szükség.

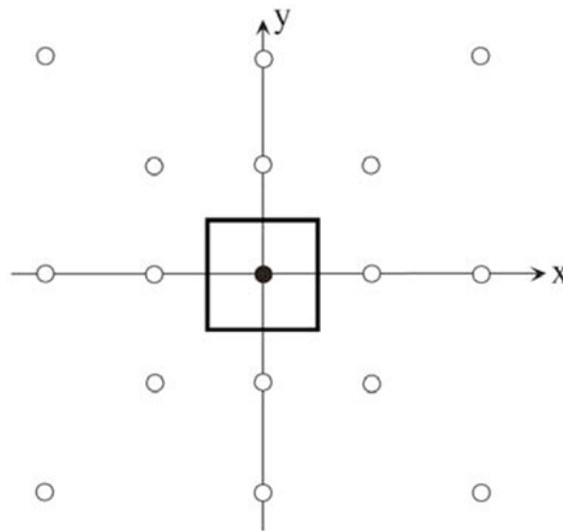
$$C1(x, y, t) = \frac{M}{L_z 4\pi Dt} \left[\exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4Dt}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2 + (y \pm 2L)^2}{4Dt}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x \pm 2L)^2 + y^2}{4Dt}\right) \right] * \\ * \frac{M}{L_z 4\pi Dt} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x \pm 2nL)^2 + (y \pm 2nL)^2}{4Dt}\right) \right]$$

valós forrás

tükörképek y
tengely mentén

tükörképek x
tengely mentén

sarkok tükörképek



A második sorban a tükörképek a sarkoknál helyezkednek el (ld. vázlat), hogy ellensúlyozzák az y-tengely tükörképeinek veszteségét az $y = \pm L/2$ határokon keresztül. A gyakorlatban nincs szükség végtelen számú tükörképre. A határok ($t < L^2/4D$) közti egyenletes keveredési állapot eléréshez szükséges időnél rövidebb vizsgált időintervallum esetében határonként három tükörkép is elegendő ahhoz, hogy megközelítsük a végtelen tükörkép esetén kapható megoldást. Ennél hosszabb idő alatt viszont a koncentráció mindenképpen egyenletes és állandó lesz, így nem is lesz szükség többé a fenti megoldásra. A 2. rendszer egyszerű kétdimenziós anyagkibocsátással került leírásra:

$$C2(x, y, t) = \frac{M}{L_z 4\pi Dt} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4Dt}\right)$$

26. Pillanatnyi kibocsátás advekcio és diffúzió



A **24.1** az állandó fluidumba bocsátott felhő diffúzióját vizsgáltuk. Jelen fejezet ezeket a vizsgálatokat viszi tovább, és az egyenletes áramlásban egyszerre jelen lévő advekcio és diffúziós folyamatokat vizsgálja. Továbbra is a **24.1** is felvázolt felhő tulajdonságokat tekintjük érvényesnek, azaz a felhő tömegközéppontjában Gauss-féle koncentráció-eloszlás van jelen, viszont az előzőekben tárgyalt felhő a következőkben adott sebességgel mozog majd adott irányba. megvizsgáljuk a mozgó felhő térbeli és időbeli változásait. Kiemeljük a Peclet-szám fontosságát, és bemutatjuk, hogy miért tölt be kiemelten hangsúlyos szerepet a transzportfolyamatok vizsgálata során. Ha az adott rendszerben túlsúlyba kerül akár az advekcio, akár a diffúzió, könnyen eldönthető, hogy mennyi idő alatt jutott a vizsgált anyag a kibocsátás helyéről a vizsgálat helyére.

A példafeladatok során a Peclet-számon alapuló vizsgálatokat, valamint a koncentráció térbeli és időbeli jellemzői közötti különbségtevést

26.1. Pillanatnyi pontforrásból történő advekcio és diffúzió

Jelen fejezetben a pillanatnyi pontforrásból történő advekcio és diffúziós folyamatok révén létrejövő kombinált transzportfolyamatokat vizsgáljuk. Az izotropikus és homogén diffúziós egyenlet a következőre redukálódik:

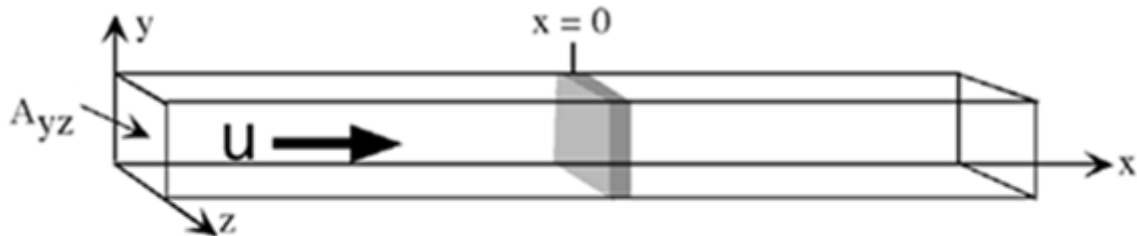
$$(1) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D \left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right]$$

Az egyszerűség kedvéért először egy egydimenziós rendszert veszünk alapul, ahol Y és z irányban minden áramlási paraméter azonos, azaz $\partial/\partial y = 0$ és $\partial/\partial z = 0$. A transzportegyenlet ez esetben egyszerűen:

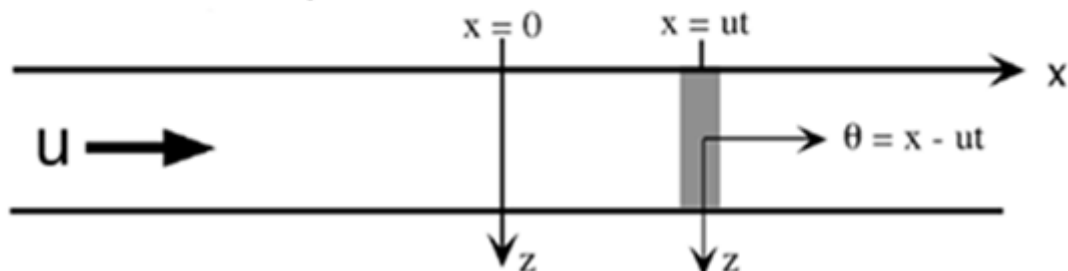
$$(2) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Ez az egyenlet az alábbi modellrendszerben zajló transzportfolyamatokat írja le. A rendszerbe pillanatnyi ponttömeget bocsátunk, melyet a szürke sáv jelöl, úgy, hogy $X=$ és 0 és $t=0$. A tömeg eloszlása azonos lesz y - z síkban, és elhanyagolható x dimenzióban, így a kezdeti koncentráció $C(x) = M \delta(x)$, ahol $\delta()$ a Dirac delta függvény.

Perspektívikus nézet a $t = 0$ időpontban



Felülnézet a $t > 0$ időpontban



A (2) egyenlet megoldásához: $C(x) = M \delta(x)$, célszerű a referenciakeretek megváltoztatása, úgy, hogy az állandó koordináták (x,t) helyett a mozgó koordinátákat (θ, t) vesszük figyelembe. A felülnézetben ábrázolt hosszanti koordináta, $\theta = x - ut$ a főáramlással, u , fog együtt mozogni, és $\theta = 0$ végig a tömegközéppontban marad. A (2) egyenletben a (x, t) értékeket a láncszabály használatával (θ, t) értékekre változtatjuk, figyelembe véve, hogy $\partial\theta/\partial t = -u$.

$$(3) \quad \frac{\partial C(\theta,t)}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} = -u \frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{\partial C}{\partial t}$$

$$\frac{\partial C(\theta,t)}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 C(\theta,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2}$$

A (3) egyenletből behelyettesítve a $\partial C/\partial t$, $\partial C/\partial x$, és $\partial^2 C/\partial x^2$ értékeket, a (2) egyenlet a következőképpen alakul:

$$(4) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2}$$

C kezdőérték mellett $(\theta = 0, t = 0) = M \delta(\theta)$, a (4) egyenlet megoldása: **24.1** 10. egyenlet

$$(5) \quad C(\theta, t) = \frac{M}{A_{yz}\sqrt{4\pi Dt}} \exp(-\theta^2/4Dt)$$

Mindezt az állandó keretrendszerre visszavetítve a következőt kapjuk:

$$(6) \quad C(x, t) = \frac{M}{A_{yz}\sqrt{4\pi Dt}} \exp(-(x - ut)^2/4Dt)$$

Pillanatnyi pontforrás egy dimenzióban:

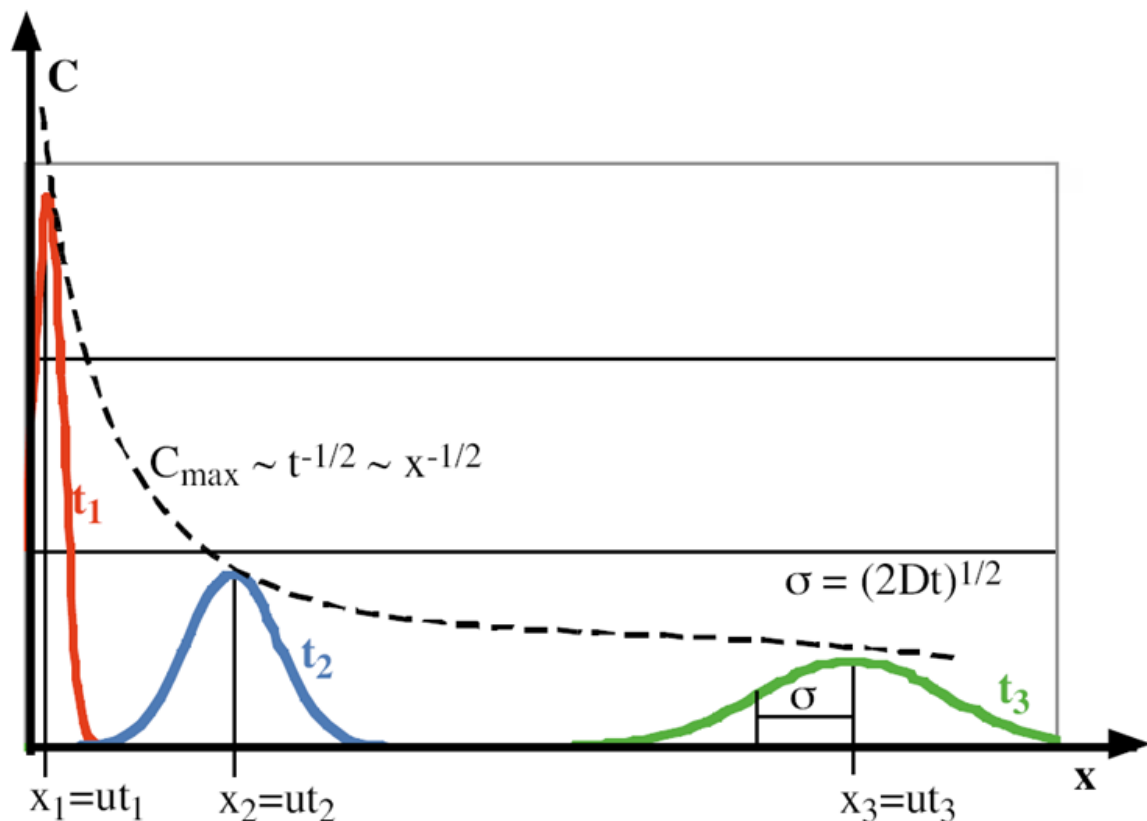
Transzportegyenlet:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Kezdeti feltétel: $C = M \delta(x)$ at $t = 0$

$$C(x, t) = \frac{M}{A_{yz}\sqrt{4\pi Dt}} \exp(-(x - ut)^2/4Dt)$$

A (6) egyenletben leírt koncentrációs mezőt a **246. ábra** ábrázolja. A megoldás fontos jellemzője, hogy a tömeg középpontjában az exponenciális argumentum értéke nulla, azaz $x = ut$, és a maximum koncentráció, $C_{\max} = M/\sqrt{4\pi Dt}$ mindig a tömeg középpontjában található. Mint azt korábban láthattuk, a diffúzió felhő hosszanti értéke $\sigma = \sqrt{2Dt}$. Mivel a felhő térbeli helyzete, x , az állandó advekciónak köszönhetően szorosan kapcsolódik annak időbeli alakulásához, $t = x/u$, C_{\max} and σ értéke várhatóan egyaránt csökkenni fog. Pontosabban, $\sigma = \sqrt{2Dx/u}$ és $C_{\max} \sim x^{-1/2}$.



246. ábra: A koncentrációs mező alakulása pillanatnyi tömegpont kibocsátás hatására egydimenziós rendszerben, állandó advekciónak, u , érték és diffúzió, D , mellett. A piros, kék és zöld görbék $C(x, t)$, $t = t_1$, t_2 , és t_3 értékek alakulását jelölik. A koncentrációs csúcs $t^{-1/2}$ és $x^{-1/2}$ értéknél fog lecsökkenni, ahogy a szaggatott vonal jelöli.

Pillanatnyi pontkibocsátás két-és háromdimenziós rendszerekben:

Abból a tényből, hogy a tömegközéppontban az exponenciális szakasz argumentuma nulla, könnyen levezethető a megoldás más rendszerekre is, különböző sebesség-, anizotropikus diffúziós és tömegértékekkel tetszőleges pozíciókkal (x_0, y_0, z_0). A rendszerben a tömegközéppont követi a pályagörbét ($x = x_0 + ut, y = y_0 + vt, z = z_0 + wt$). Az pillanatnyi pontforrás tömegkibocsátás koncentrációs mezője állandó rendszer esetében a **24.1** megadottak szerint alakul, ahol az exponenciális szakasz argumentumai a pályakörbe mentén a nulla érték mentén alakulnak.

Pillanatnyi pontkibocsátás két dimenziós modell esetén.

L_z = az elhanyagolható dimenzió hossza

Transzportegyenlet:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

Kezdeti feltétel:

$$C = M \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \quad t = 0\text{-nál}$$

$$C(x, y, t) = \frac{M}{L_z 4\pi t \sqrt{D_x D_y}} \exp\left(-\frac{(x-x_0-ut)^2}{4D_x t} - \frac{(y-y_0-vt)^2}{4D_y t}\right)$$

Pillanatnyi pontkibocsátás három dimenziós modell.

Transzportegyenlet:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

Kezdeti feltétel:

$$C = M \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0) \quad t = 0\text{-nál}$$

$$C(x, y, z, t) = \frac{M}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{D_x D_y D_z}} \exp\left(-\frac{(x-x_0-ut)^2}{4D_x t} - \frac{(y-y_0-vt)^2}{4D_y t} - \frac{(z-z_0-wt)^2}{4D_z t}\right)$$

Példa:

Egy kétdimenziós rendszerbe $x = 0$ cm, $y = 50$ cm, és $t = 0$ s értékek mellett adott tömeget, M bocsátunk, állandó, $u = 1 \text{ cm s}^{-1}$ sebességgel, és, $D = 2 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ izotropikus diffúziós értékkel. A tömegközéppont követi a pályagörbét ($x = ut, y = 50$ cm). Az így kapott koncentrációs mező a fent megadott kétdimenziós modell számításánál megadott értékeket követi:

Koncentrációs mező:

$$C(x, y, t) = \frac{M}{L_z 4\pi D t} \exp\left(-\frac{(x-ut)^2 + (y-50)^2}{4D t}\right)$$

Jelen esetben z lesz az figyelmen kívül hagyott dimenzió, melynek hossza: L_z . A koncentrációt a rendszer három pontján mérjük: A próba helye: $x_A = 100$ cm, $y_A = 50$ cm. B próba helye: $x_B = 250$ cm, $y_B = 50$ cm. C próba helye: $x_C = 250$ cm, $y_C = 0$ cm.

1. Becsülje meg, hogy az egyes próbák során mely időpontban lesz vizsgálható a legmagasabb koncentráció.
2. Becsülje meg a felhő fizikai hosszát abban a pillanatban, amikor a koncentráció a legmagasabb értékeket éri el az egyes próbák során.
3. Becsülje meg, hogy mennyi ideig vizsgálható a felhő stabil állapotban.
4. Hasonlítsa össze a vizsgált koncentráció maximumokat az egyes próbák esetében, és állapítsa meg, hogyan aránylanak egymáshoz C_{Amax}/C_{Bmax} és C_{Bmax}/C_{Cmax} .

A koncentráció legmagasabb értéke B próbánál B ($x_B = 250$ cm) és C próbánál ($x_C = 250$ cm) at $t_B = t_C = 250$ s esetén valósul meg.

Válasz:

1. A legmagasabb koncentráció értéket mindegyik próba esetén a tömegközéppontnál kell vizsgálni. A tömegközéppont $u = 1$ cms⁻¹ értéknél advektál. Ebből következik, hogy az x helyen végzett A próba esetében a koncentráció a legmagasabb értéket $t_A = x_A/u = 100\text{cm}/1\text{cms}^{-1} = 100$ s. értékeknél fogja elérni.
2. A felhő hosszának becsült értéke: $L \approx 4\sigma$ (24.1 14. egyenlet). A próba esetén a felhő $L_A \approx 4\sigma_A = \sqrt{2Dt_A} = \sqrt{2 \times 2 \text{ cm}^2\text{s}^{-1} \times 100\text{s}} = 80$ cm lesz. B és C próba esetén a felhő $L_B = L_C \approx 4\sigma_B = 4\sqrt{2Dt_B} = 4\sqrt{2 \times 2 \text{ cm}^2\text{s}^{-1} \times 250\text{s}} = 126$ cm.
3. Feltételezve, hogy a próba ideje alatt a felhő mérete nem változik, a vizsgálat idejének becsült értéke Δt lesz, a felhő hosszát és a sebességet figyelembe véve. A próba esetén $\Delta t = L_A/u = 80$ s. B és C próba esetén $\Delta t = L_B/u = 126$ s. vegyük azonban figyelembe, hogy a számítások a felhő állandóságát feltételezzük. A felhő vizsgálatának időbeli hossza függ a próba detekciós határértékétől is.
4. A koncentráció legmagasabb értéke a próba helyének és a csúcserték elérésének időpontjából becsülhető meg:
A próba: $C_A(x = 100 \text{ cm}, y = 50\text{cm}, t = t_A = 100\text{s}) = M/(Lz^4 \pi Dt_A)$
B próba: $C_B(x = 250 \text{ cm}, y = 50\text{cm}, t = t_B = 250\text{s}) = M/(Lz^4 \pi Dt_B)$
C próba: $C_C(x = 250 \text{ cm}, y = 0\text{cm}, t = t_B = 250\text{s}) = [M/(Lz^4 \pi Dt_C)] \exp(-50^2/4Dt)$
Ezért: $C_{Amax}/C_{Bmax} = t_B/t_A = x_B/x_A = 2.5$; és $C_{Cmax}/C_{Bmax} = \exp(-50^2/4Dt_C) = 0.29$

Tekintse meg a 26.1 található animációt és figyelje meg, hogy a fent meghatározott idő- és hosszértékek összhangban állnak a felhő térbeli terjeszkedésével, a fenti egyenletnek és az animációban ábrázoltaknak megfelelően. Figyelje meg, hogy mindhárom próba Gauss-féle egyenletet eredményez, abban az esetben is, ha a próbát nem a középpontban végezzük. A koncentrációcsúcs csökkenése $C_{max} \sim x^{-1} \sim t^{-1}$ következik be.

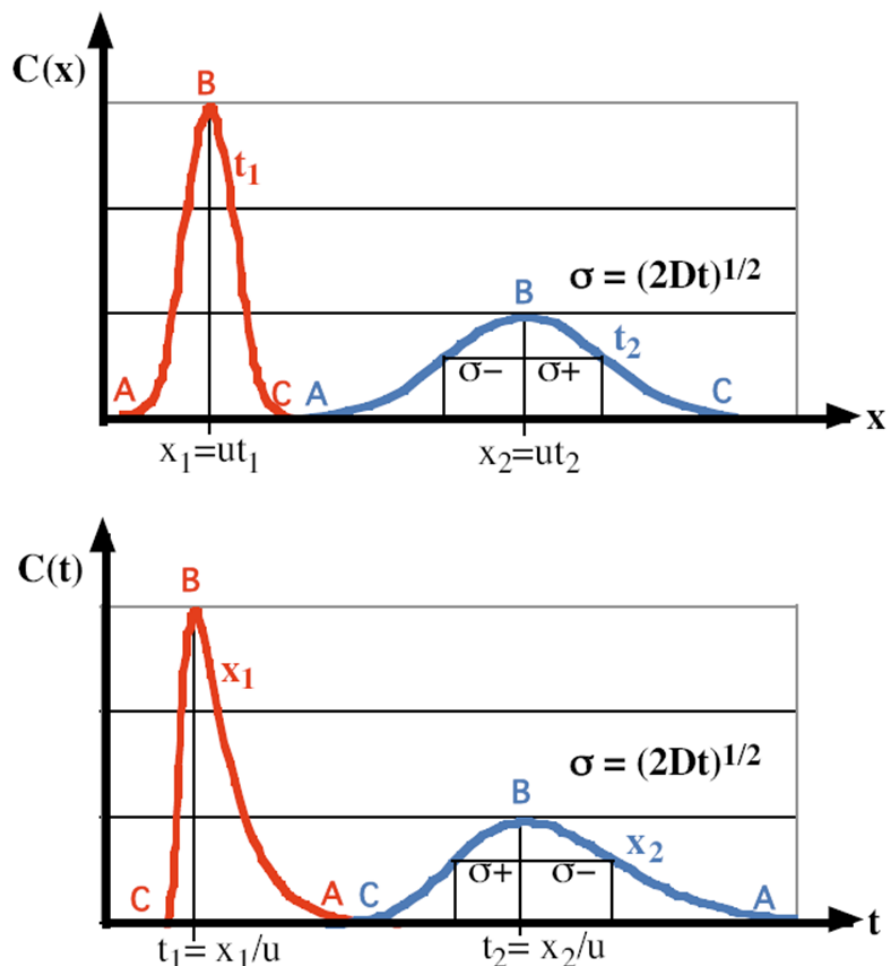
A koncentráció időbeli és térbeli jellemzői.

A koncentráció disztribúciót a gyakorlatban két módszerrel vizsgálhatjuk. Az egyik, ha a koncentrációt az egész áramlatban egyszerre vizsgáljuk. Az ilyen vizsgálatból kikövetkeztethető az egész térbeli koncentrációs mező. Ez a módszer azonban csak laboratóriumban kivitelezhető, a valóságban ugyanis jóval nagyobb térbeli kiterjedésekkel találkozunk. A gyakorlatban sokkal megvalósíthatóbb módszer, ha az mezőből adott pontokon mintákat veszünk, és az adott pontok időbeli koncentráció változásait figyeljük meg. A gyakorlati vizsgálat során szerzett adatok interpretációjához szükség van a térbeli és időbeli vizsgálatok összehasonlítására is. Vegyünk alapul például hogy pillanatnyi pontforrásból adott tömeget bocsátunk egy egydimenziós rendszerbe, melynek koncentrációs mezejét a (6) egyenlet írja le. A 247. ábra első fele mutatja 2 időpontban fogja mutatni a térbeli disztribúciót, $C(x)$. $C(x)$ direkt méréséhez számos egyidejű mérésre van szükség az x -tengely mentén.

Összehasonlításként nézzük meg, milyen eredményt ad, ha két adott pontban, x_1 and x_2 , állandó jelleggel végezzük a mérést. A rekordok az ábra második felében láthatóak.

A görbék a felhő állapotát mutatják különböző időben és térbeli pozícióban. Fontos megjegyezni, hogy mindegyik görbe együttesen a B érték külön-külön jelöli az (x_1, t_1) és (x_2, t_2) méréseket. Ezen kívül a térbeli disztribúció, $C(x)$, láthatóan megőrzi a felhő előre haladó (C) és hátul haladó (A) széléit. Az időbeni disztribúció esetében a két érték láthatóan ellentétes irányú lesz, és a felhő előre haladó (C) széle a hátul haladó (A) széltől balra helyezkedik el. Fontos még, hogy az időbeli rekord $C(t)$ jobb irányba látszik eltolódni (pozitív sík), míg a térbeli disztribúció, $C(x)$ szimmetrikus lesz.

A ábra felső részében a felhő csúcstól lefelé található hossza, σ^- , azonos a csúcs feletti hosszal, σ^+ . $C(x)$, σ^- és σ^+ rendelkezik hosszanti kiterjedéssel. $C(t)$ esetében σ^- és σ^+ időbeli kiterjedéssel rendelkezik, és σ^+ értéke jóval kisebb, mint σ^- (alsó ábrán.).



247. ábra: A koncentrációs mező alakulása pillanatnyi tömegpont kibocsátás hatására egydimenziós rendszerben, állandó advekción, u , érték és diffúzió, D , mellett. A piros, kék és zöld görbék $C(x,t)$, $t = t_1$, t_2 , és t_3 értékek alakulását jelölik. A koncentráció csúcs $t^{-1/2}$ és $x^{-1/2}$ értéknél fog lecsökkenni, ahogy a szaggatott vonal jelöli.

A $C(t)$ nél tapasztalható eltolódás annak köszönhető, hogy a felhő tovább növekszik, $\sigma \sim t^{1/2}$, még azután is, hogy elérte a x ,pozíciót. A felhő hátul haladó széle x_2 at $t > t_2$ áthaladásának pillanatában nagyobb, mint a felhő elöl haladó széle volt x_2 at $t < t_2$ áthaladás pillanatában. Fontos különbséget tenni a látszólagos eltolódás, mint az itt látott $C(t)$ értéknél látható eltolódás

és a $C(x)$ értéknél tapasztalt valódi eltolódás között, mivel a $C(x)$ eltolódása minden esetben a Fick-féle diffúziótól eltérő folyamatra jelenlétére utal. Ha a tömeg terjedése Fick törvényét követi, a tömegeloszlás szimmetrikus lesz. A **29.1** részletesen is tárgyaljuk majd azokat a mechanizmusokat, melyek a tömeg terjedésével függenek össze, és amennyiben nem Fick törvényét követik, valódi eltolódást képesek indikálni.

A Peclet-szám.

A Peclet szám egy dimenzió nélküli paraméter, mely megmutatja, hogy egy adott rendszerben a skalárok transzportja szempontjából mekkora fontossággal bír az advekción és a diffúzió. Ha az advekciót és a diffúziót különálló időbeli skálákon ábrázoljuk, a Peclet szám ezen időbeli skáláknak az egymáshoz való arányát mutatja meg. Az időbeli skálákat dimenzió nélküli kikötésekkel adjuk meg, pl.: a hossz, L , a z áramlási sebesség, U , adott időpillanatban csak a következő feltételekkel eredményezhet egységnyi időt:

Advekciós idő skála: $= T_U \sim L/U$.

A hossz, L , és diffúziós ráta, D , csak a következők szerint eredményezhet időegységet:

Diffúziós idő skála $= T_D \sim L^2/D$.

A Peclet szám e fenti két szám arányát mutatja:

Peclet szám,

$$Pe = \frac{T_D}{T_U} = \frac{UL}{D}$$

Ha a $T_U \ll T_D$ advekciós transzportja gyorsabb, mint diffúziós transzportja, advekción domináns rendszerről beszélünk. Ilyenkor $Pe \gg 1$.

Transzportegyenlet felírása.

A Peclet-szám az egyenletfelírásnál is előforduló tényező. Az egyszerűség kedvéért tételezzünk fel egy egydimenziós rendszert, U sebességgel és állandó diffúziós együtthatóval, D . A koncentrációt egy L hosszúságú tesztrészen fogjuk vizsgálni t_0 ideig. A rendszer főegyenlete:

$$(7) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Hogy eldönthessük, mely folyamatok a legfontosabbak, összehasonlítjuk a szakaszok magnitúdóját. Ehhez először is mindent változót vissza kell alakítanunk dimenziómentes formátumba, $O(1)$. Például: ha a tesztrész hossza x , akkor a dimenziómentes távolságban $x^* = x/L$ $O(1)$ lesz a tesztrészen belül.

$$(8) \quad \frac{C}{t_0} \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + \frac{UC}{L} u^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} = \frac{DC}{L^2} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial x^{*2}}$$

Ha minden részletet elosztunk DC/L^2 -vel, megkapjuk a dimenziómentes rendszer egyenletét:

$$(9) \quad \frac{L^2/D}{t_0} \frac{\partial c^*}{\partial t^*} + \frac{uL}{D} u^* \frac{\partial c^*}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 c^*}{\partial x^{*2}}$$

$O(1)$ Pe $O(1)$ $(O1)$
 bizonytalanság advekción diffúzió

Mivel a csillaggal jelölt változó minden esetben $O(1)$, össze tudjuk hasonlítani a bizonytalanság, az advekción és a diffúzió jellemző értékeit úgy, hogy pusztán a dimenziómentes prefaktorokat kell összevetnünk. Például, a diffúziós tagnak nincsen prefaktora, ezért a tag magnitúdója szimplán $O(1)$ lesz. Az advekción tag prefaktora UL/D , amely megadja a Peclet-számot. Abban az esetben, ha $Pe \gg 1$, az advekción tag nagyobb lesz a diffúziós tagnál, melynek értéke $O(1)$. Ebből következik, hogy a diffúziós tagot figyelmen kívül hagyhatjuk. Hasonlóan, ha $Pe \ll 1$, akkor az advekción tag lesz elhanyagolható. A bizonytalan tag jól meghatározható a prefaktor magnitúdója alapján, L^2/Dt . Például, ha $Pe \ll 1$ (diffúzió dominancia), és $L^2/Dt \gg 1$, ebben az esetben a koncentráció bizonytalanságot időben célszerű vizsgálni, tO .

26.2. Feladatsor

26.2.1. Feladat

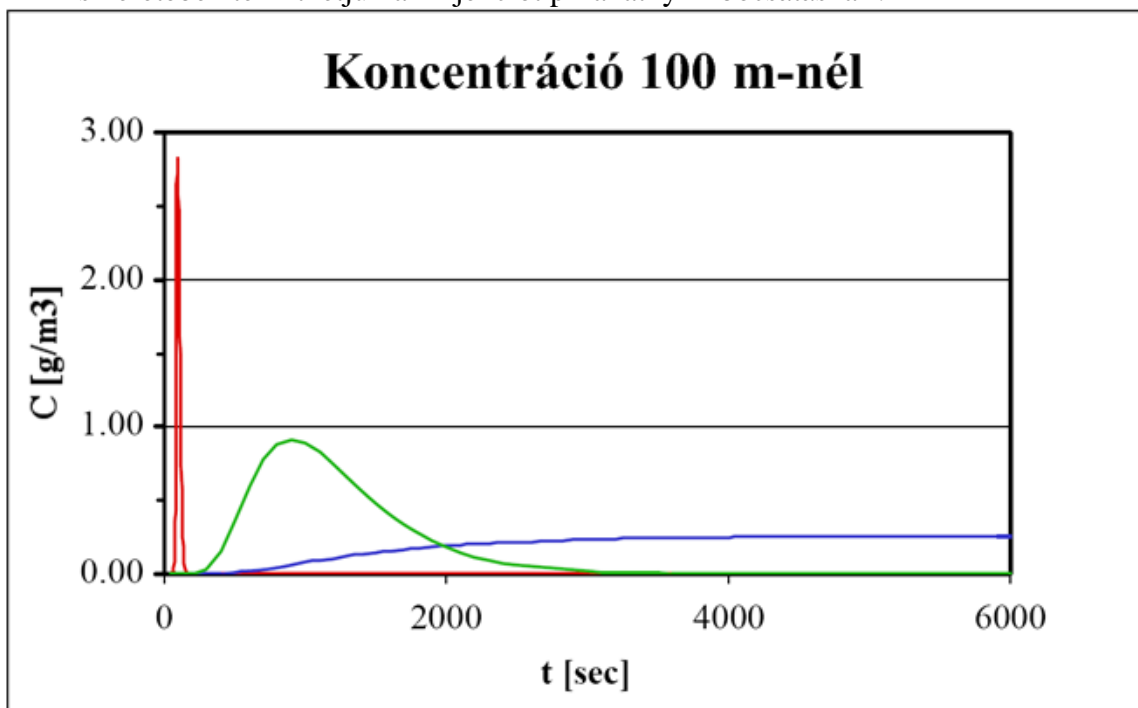
Egy hosszú, keskeny csőbe egy grammnyi festéket injektálunk, ami azonnal lekeveredik a cső keresztmetszetében., $A = A = 1 \text{ cm}^2$. A csövön vizet pumpálunk keresztül: $Q = 0.1 \text{ cm}^3\text{s}^{-1}$. Tételezzük fel, hogy az áramlat egyenletes A -n keresztül. Ha az áramlat lamináris, tegyük fel, hogy a diffúziós együttható, $D_M = 10^{-5} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$. Egyéb esetben tételezzük fel, hogy $D = 100 D_M$. A koncentrációt az injekciós ponttól $x = L = 100 \text{ cm}$ távolságban mérjük az áramlás felfelé mutató irányában.

Becsülje meg a festékfolt hosszát, amikor áthalad $x=L$ ponton, és az ezen a ponton mérhető koncentráció értékét.

26.2.2. Feladat

1 kg tömegű festékanyagot 10 m^2 méretű csatornába engedünk $x=0$ ponton. Az áramlás irányában lefelé, $x=L=100 \text{ m}$ helyen mérjük a festék koncentrációját. A tesztet három különböző áramlás esetén ismétljük: $u = 0.001, 0.1, 1 \text{ ms}^{-1}$. Az egyszerűség kedvéért a diffúziós együttható minden esetben $D = 1 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

- Becsülje meg mindegyik esetben az advekción és diffúziós időskálást valamint a Peclet-számot.
- A [lenti három görbe](#) a három esetet ábrázolja. Jelölje mindhárom görbét a megfelelő Peclet-számmal.
- Melyik görbe esetében lesz az L pontban vizsgált koncentrációs csúcs az advekción időskálán található? Számolja ki ezen esetekben a koncentrációs csúcs értékét.
- Az anyag befecskendezéséhez 10 másodpercre volt szükség. A releváns időskálák ismeretében tekinthetjük az injekciót pillanatnyi kibocsátásnak?



26.2.3. Feladat

Ön egy új gyáregység biztonsági ellenőre, és felhatalmazása van arra, hogy a kezelt szennyvizet a közeli folyóba engedje le, $2 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ áramlás mellett. a folyó keresztmetszete négyzet alakú, a

keresztmetszet területe 20m^2 . A normál eljárás mód mellett a leengedett szennyvíz teljesen megtisztított állapotban kerül a folyóba. A szennyvíz leeresztését folyamatosan ellenőrzik, és ha a szennyvízben a vegyi anyagok koncentrációja meghaladja a 100mg l^{-1} biztonsági határértéket, az üzem leáll. A leállást elindító jelzésre azonban 100 másodperc a reakcióidő. Az ön feladata, hogy környezeti hatástanulmányt készítsen a gyártól 1 km távolságban a folyás irányban lefelé található haltenyészet számára. A haltenyészet a folyóból nyeri a vizet a tartályok öblítéséhez. A tanulmányok alapján a halivadékok számára a tenyészetben beállított egészségügyi határérték $C = 0.5\text{mg l}^{-1}$.

Írja le, milyen mértékű koncentráció lesz tapasztalható a halgazdaságban. Ezután a lent felsorolt forgatókönyvek mindegyikéhez írja le, hogy milyen koncentráció mennyi ideig lesz hatással a halgazdaságba felvett vízre. Ezután fejtse ki, milyen veszélyekkel járhat, ha a szennyezés bizonyos ideig tapasztalható a tenyészetben, és döntse el, hogy szükség lesz-e biztonsági figyelmeztetés kiadására.

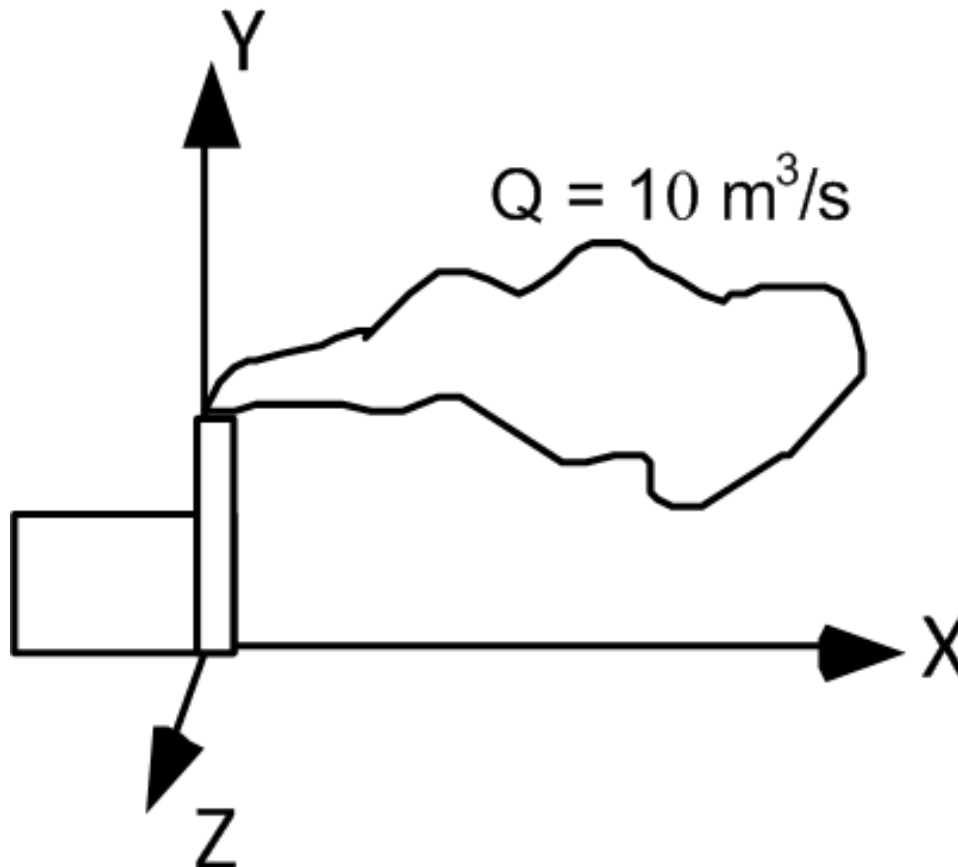
1.eset: magas kibocsátás. $U = 50\text{cms}^{-1}$, $D_x = 10\text{m}^2\text{s}^{-1}$, $D_Y = D_Z = 0.1\text{m}^2\text{s}^{-1}$

2.eset: alacsony kibocsátás. $U = 2\text{cms}^{-1}$, $D_x = 1\text{m}^2\text{s}^{-1}$, $D_Y = D_Z = 0.01\text{m}^2\text{s}^{-1}$

Segítség 1.: A rendszer dinamikájának leírását kezdje az időskálákkal.

26.2.4. Feladat

Egy vegyi anyag-gyár $10\text{m}^3/\text{s}$ áramlási sebességgel egy $H=20\text{M}$ magas kéményen keresztül fúródó gázt bocsát ki. A szűrőrendszer hibájából adódóan a rendszer szén-dioxid, SO_2 , bekerülését is engedi kibocsátott anyagba. A fúródó gáz SO_2 tartalma normál esetben zérus, de a hiba következtében $10\text{mg}/\text{m}^3$ szintre emelkedik. A SO_2 kibocsátás $T_R = 5$ percig tart. Tételezzünk fel izotrópikus diffúziót, $D = 1\text{m}^2/\text{s}$, és egyenletes szélességet: $U = 2\text{m}/\text{s}$.



- A fent vázolt koordináta-rendszerben számolja ki XX vegyszer koncentrációját a lefelé haladó áramlásban, feltételezve, hogy a kibocsátás pillanatnyi, M tömegkibocsátásnak felel meg. Tételezzük fel azt is, hogy a föld no flux határként viselkedik.
- Számolja ki Pe# értékét $x = 500$ m távolságban és fejtse ki, hogy a kapott eredmény mire enged következtetni a transzportfolyamattal kapcsolatban.
- Az áramlás lefelé haladó irányában milyen távolságban fog a kibocsátás pillanatnyi kibocsátásnak tűnni?
- Az ön otthona a gyártól 500 m-re található, szélirányban. Milyen maximális koncentráció értéket fog várhatóan tapasztalni a házában a talaj szintjén?

26.2.5. Feladat

Tételezzünk fel egy hosszú, keskeny csatornát, mely egy öbölbe csatlakozik, és amibe a parton lévő város széléről ($x=0$) szennyvíz érkezik átlagosan $Q = 0.005 \text{ m}^3/\text{s}$ sebességgel. Egy reggelen egy csónakból egy tartálynyi zsíroldó szer kerül a vízbe, $x=25\text{m}$ távolságnál. Az alábbi kérdések megválaszolásával becsülje fel, milyen hatással van a vegyszer az öböl vizére. Tételezzük fel, hogy a diffúzió izotrópikus, $D = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$.

- Becsülje meg a rendszer Peclet-számát $Pe=UL/D$, és fejtse ki magyarázatát.
- Mely időpontban válik szükségessé megelőző intézkedések bevezetése az öböl szennyeződésektől való megóvása érdekében?
- Becsülje meg a szennyező anyag vertikális és horizontális elkeveredésének idejét.
- Ahhoz hogy megvizsgálhassuk az öböl szennyezőanyag-koncentrációját ($x=75\text{m}$ távolságba) egy- két- vagy háromdimenziós modellre és egyenletre van szükség? Válaszát indokolja
- A matematikai szimbólumok segítségével ($[U, D, x, t, M, \text{stb.}]$ írja le a kiömlő anyag térben és időben történő terjedését, miután a koncentráció egyenletesen elkeveredett a csatorna szélességi és mélységi irányában. Tételezzük fel, hogy a szennyező anyag nem képes áthatolni az $x=0$ ponton lévő betét hátsó falán.

26.3. Megoldások

26.3.1. Megoldás

Elsőként meg kell állapítani, hogy az áramlás lamináris-e. A sebesség a csőben $U = Q/A = 0.1 \text{ cm/s}$. A cső átmérője $d = \sqrt{(4/\pi)A} = 1.13 \text{ cm}$. A Reynolds-szám $Re = UD/\nu = (0.1 \text{ cm/s})(1.13 \text{ cm})/(0.01 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}) = 11.3 \ll 2100$, a lamináris áramlás határértéke.

Ez esetben $Pe = UL/D = (0.1 \text{ cm/s})(100 \text{ cm})/(10^{-5} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}) = 10^6$. Mivel $Pe \gg 1$, a festékanyag L pontba érkezésének becsült ideje $L/U = 1000 \text{ s}$. Ekkorra a festékfolt hossza $4\sigma = 4\sqrt{2Dt} = 4\sqrt{2(10^{-5} \text{ cm}^2\text{s}^{-1})(1000\text{s})} = 0.57 \text{ cm}$. A koncentráció akkor éri el a maximumot, amikor az anyag áthalad ezen a ponton, azaz $t = L/U$ időpontban. Ezért, a maximum koncentráció: $C(x = L, t = L/U = 1000\text{s})$. Mivel az anyag folyamatosan keveredik a cső keresztmetszetén, és az áramlás is egyenletes, a rendszer összességében egydimenziósnak tekinthető. A pillanatnyi pontkibocsátásból adódó koncentráció:

$$C(x, t) = \frac{M}{A_{yz}\sqrt{4\pi Dt}} \exp(-(x - ut)^2/4Dt)$$

$x = L$ és $t = L/U$ -nál kiértékelve a következőt kapjuk:

$$C(x = L, t = L/U) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi DL/U}} = \frac{1 \text{ g}}{1 \text{ cm}^2 \sqrt{4\pi(10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1})(100 \text{ cm})/(0.1 \text{ cm/s})}} = 28.2 \text{ g cm}^{-3}$$

26.3.2. Megoldás

a) és b) . A hosszúság minden esetben $L = 100 \text{ m}$ és a diffúzió mértéke $D = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

U [m s ⁻¹]	Diffúzió: $T_D L^2/8D$	Advekción: $T_U = L/U$	Pe = UL/D	Görbe
0.001	1250 s	100,000 s	0.1	Kék
0.1	1250 s	1,000 s	10	Zöld
1	1250 s	100 s	100	Piros

c) . A Fick-féle diffúzió értelmében a koncentráció csúcserőke az advekción időskálát elérő anyag középpontjában less mérhető, azaz T_U időpontban a koncentráción csúcserők a felhő L pontjában less mérhető. Ez annak köszönhető, hogy a koncentráción magnitűdója megváltozik a mérési ponton áthaladás közben. Ha a felhő áthaladási sebessége alacsony ($Pe \ll 1$), a koncentráción várhatóan jelentősen csökkenni fog, olyannyira, hogy az L pontban mért koncentráción már azelőtt kialakulhat, hogy az anyag középpontja is elérte volna a mérési pontot. Ha a koncentráción alig vagy kis mértékben változik a felhő áthaladása alatt (az advekción gyorsabb, mint a diffúzión, $Pe \gg 1$), az L pontban vizsgált koncentráción érték megegyezik majd az advekción időskálájával. A Piros és Zöld rendszerek esetében ennek teljesülését várjuk.

A koncentráción megállapításához először is azt kell felmérnünk, hogy a felhő három- két vagy egydimenziós rendszerként éri-e el a mérési pontot. Ez attól függ, hogy mennyi idő alatt oldódik fel a festékanyag a csatorna keresztmetszetének felületén, $A = 10 \text{ m}^2$. Ha négyzet alakú keresztmetszetet feltételezünk, a csatorna szélessége és hossza a következő: $L_y = L_z = \sqrt{10} \text{ m}$. A keveredéshez szükséges idő (ld. 25.1 24. egyenlet): $t_i = L_i^2 / 4D_i = 10 \text{ m}^2 / (4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}) = 2.5 \text{ s}$. T_D és $T_U \gg 2.5 \text{ s}$ mindkét görbe esetében, ezért bizonyossággal állíthatjuk, hogy a festékanyag egyenletesen eloszlott a csatornában, mire eléri L pontot. Ezért bátran használhatjuk az egydimenziós modellt a koncentráción méréséhez L ponton $t = L/U$ időpontban.

$$\text{Piros görbe: } C(x = L, t = L/U) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi Dt}} = \frac{1000 \text{ g}}{10 \text{ m}^2 \sqrt{4\pi(1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})(100 \text{ s})}} = 2.82 \text{ gm}^{-3}$$

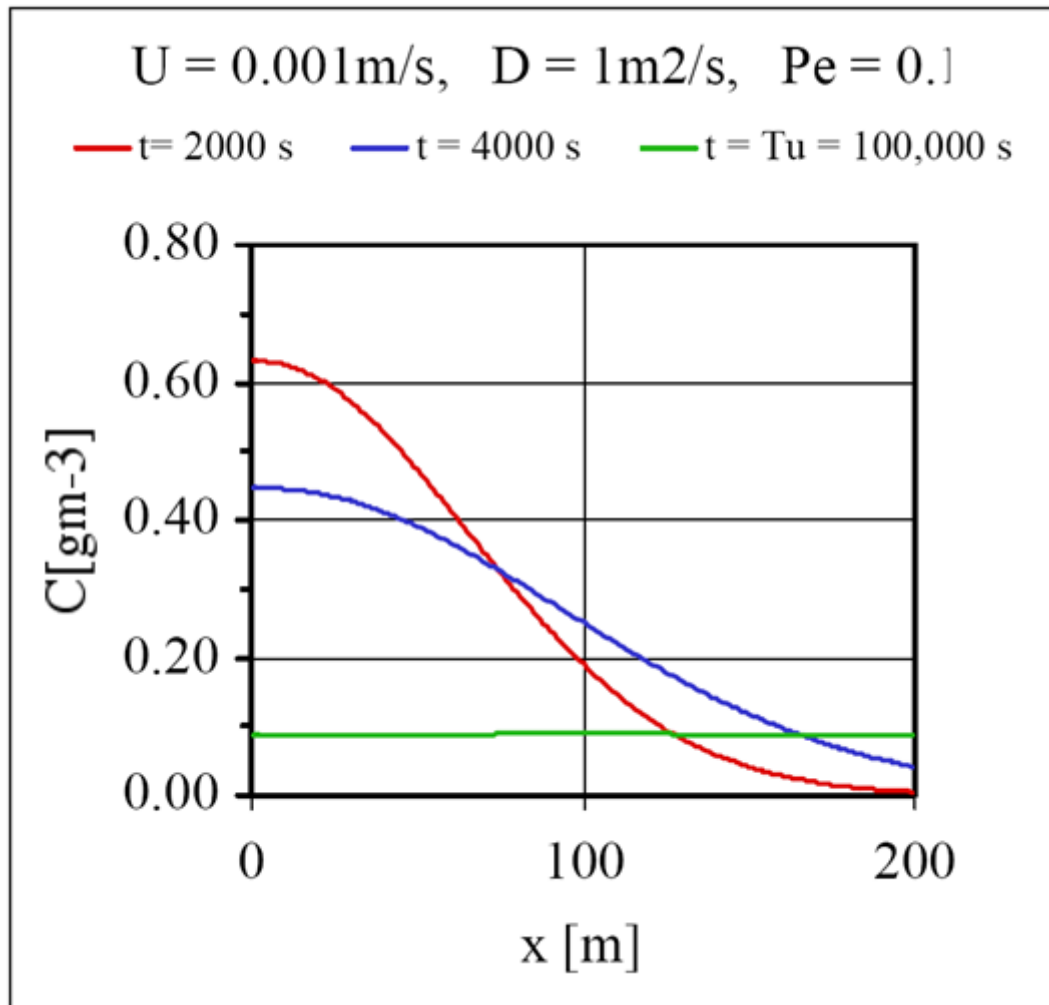
A kapott eredmény megegyezik az L pontban vizsgált koncentráción csúcscsal.

$$\text{A Zöld görbére: } C(x = L, t = L/U) = \frac{1000 \text{ g}}{10 \text{ m}^2 \sqrt{4\pi(1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})(1000 \text{ s})}} = 0.89 \text{ gm}^{-3}$$

Az érték ebben az esetben is megegyezik a vizsgált koncentráción csúcserőkkel.

$$\text{A Kék görbére: } C(x = L, t = L/U) = \frac{1000 \text{ g}}{10 \text{ m}^2 \sqrt{4\pi(1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})(100,000 \text{ s})}} = 0.09 \text{ gm}^{-3}$$

Ez az érték ALACSONYABB, mint az l pontban $t = 4000 \text{ s}$ ($C = 0.25 \text{ gm}^{-3}$) időpontban vizsgált koncentráción. Ebben az esetben az L pontban vizsgált koncentráción csúcserők T_U időpont előtt jelentkezik, azaz mielőtt az anyag középpontja áthaladna L ponton. Ennek oka, hogy a felhőben a koncentráción gyorsabban csökken (a diffúzión által), mint az anyag középpontjának haladási sebessége (advekción által). A térbeli disztribúción, $C(x)$ az alábbiak szerint alakul:



d) Az $L=100\text{ m}$ távolságban mért koncentrációt szeretnénk megvizsgálni. A transzport időskála ezen a helyen minden esetben 100 sec vagy több, azaz sokkal hosszabb, mint az injekció időtartama. Ennek okán az injekció folyamata tekinthető pillanatnyinak.

26.3.3. Megoldás

A rendszer dinamikájának definíciója időskála segítségével.

Az $L=100\text{ m}$ távolságban szeretnénk előre jelezni a koncentráció mértékét. Mivel 1) a csatorna négyzet alakú; 2) $D_y = D_z$, és 3) a kiömlés a csatorna középpontjában történik, a keresztmetszetben való elkeveredés ideje $T_{\text{mix}} = 20\text{m}^2/(4D_y)$. Az időegységeket minden esetben másodpercben adjuk meg.

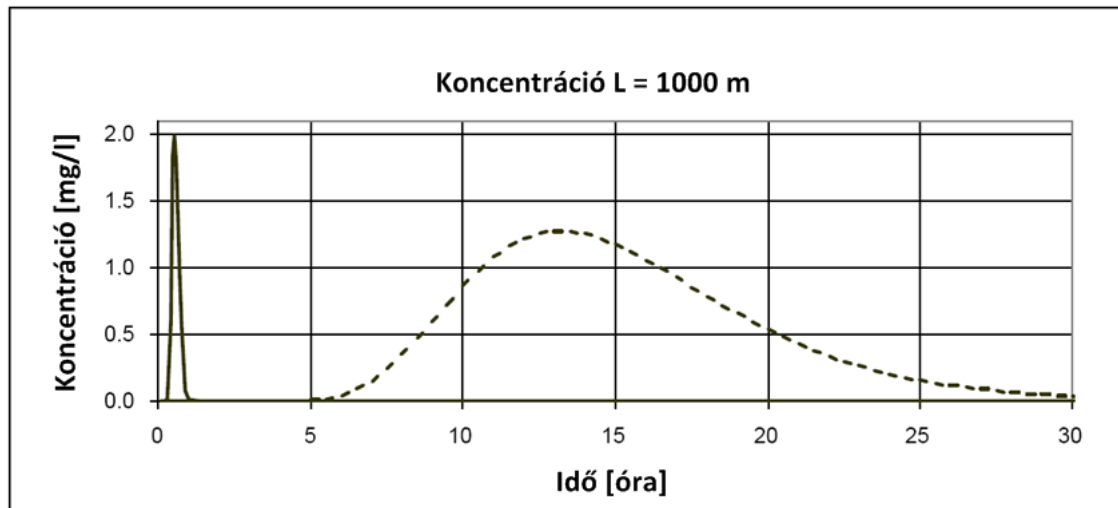
Eset	U [ms^{-1}]	D_y [m^2s^{-1}]	Keveredés $T_{\text{mix}} = 20\text{m}^2/4D_y$	D_x [m^2s^{-1}]	Diffúzió $T_D = L^2/8D_x$	Advekción $T_U = L/U$	$Pe = LU/D_x$
1	0.5	0.1	50 s	10	12500 s	2000 s	50
2	0.02	0.01	500 s	1	125000 s	50,000 s	20

Mindkét esetben: $T_{\text{mix}} \ll T_D$ és T_U , úgyhogy feltételezhetjük, hogy a vegyi anyag y és z irányban is egyenletesen elvegyül, mire a halgazdasághoz ér. Ezért használhatunk egydimenziós modellt $z=L=100\text{m}$ pontban mért koncentráció megállapításához. Ráadásul, mivel a kibocsátási idő [100 s] is rendkívül rövid az időskálákhoz viszonyítva, a modellt bátran tekinthetjük pillanatnyi kibocsátásnak. Végül, mivel a koncentráció y és z irányba is egyenletes, nincs szükség tükröképekre sem a $no\text{ flux}$ határok korrekciójához, azaz $\partial C/\partial y = 0$ és $\partial C/\partial z = 0$ feltételek

egyaránt teljesülnek a határoknál. Mindezeket figyelembe véve megállapíthatjuk, hogy a koncentráció mértéke a halgazdaságnál a következőképpen alakul:

$$C(x = L, t) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi D_x t}} = \text{EXP}\left(-\frac{(L - ut)^2}{4D_x t}\right)$$

A kibocsátott anyag össztömege: $M = (2\text{m}^3\text{s}^{-1})(0.1\text{g l}^{-1})(100\text{ s})(1000\text{ l m}^{-3}) = 20000\text{ g}$ vagyis 20 kg. A megoldás $C(x = L, t)$ alább látható (1. eset-folyamatos vonal, 2. – szaggatott vonal)



A fenti ábra alapján megállapítható a szennyezés mértéke. Az 1. esetben, magas kibocsátás mellett a kiömlő anyag legmagasabb koncentrációja 2 mg l^{-1} , ami kb. fél órán keresztül az egészségügyi határérték felett van. A 2. esetben, alacsony kibocsátás mellett a koncentráció legmagasabb értéke mg l^{-1} , ami 13 órán keresztül marad az egészségügyi határérték felett. A szennyezés egyik esetben sem krónikus mértékű, azért nem szükséges különösebb biztonsági szabályozás bevezetése. Amennyiben azonban a haltenyészet ideiglenes bezárása a szennyeződés elvonulásáig anyagilag nem túlságosan megterhelő, a biztonság kedvéért érdemes megtenni ezt a lépést.

A szennyeződés csúcserőssége és időtartama szintén megjósolható a következők szerint. Mivel mindkét esetben $Pe > 1$, a csúcserősség az advektációs skálán jelentkezik, azaz:

$$C_{max} = C(x = L, t = T_u) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi D_x T_u}}$$

$$\text{Az 1. esetre: } C_{max} = \frac{20,000\text{ g}}{20\text{ m}^2\sqrt{4\pi(10\text{ m}^2\text{s}^{-1})(2000\text{ s})}} = 2\text{ gm}^{-3} = 2\text{ mg l}^{-1}$$

$$\text{A 2. esetre: } C_{max} = \frac{20,000\text{ g}}{20\text{ m}^2\sqrt{4\pi(1\text{ m}^2\text{s}^{-1})(50,000\text{ s})}} = 1.3\text{ gm}^{-3} = 1.3\text{ mg l}^{-1}$$

A csúcserősség túlhaladása után a vegyi anyag-felhő hossza, $4\sigma = \sqrt{2D_x D_u} \cdot 4$. Ha feltételezzük, hogy a felhő nem nő tovább $x=L$ ponton áthaladás közben, az időtartam a következőképpen alakul: $\Delta T = 4\sigma/U$.

$$1. \text{ eset: } \Delta T = 4\sigma/u = (4\sqrt{2D_x T_U}) / (4\sqrt{2(10 \text{ m}^2\text{s}^{-1})2000 \text{ s}}) / (0.5 \text{ m/s}) = 1600 \text{ s} = 27 \text{ perc}$$

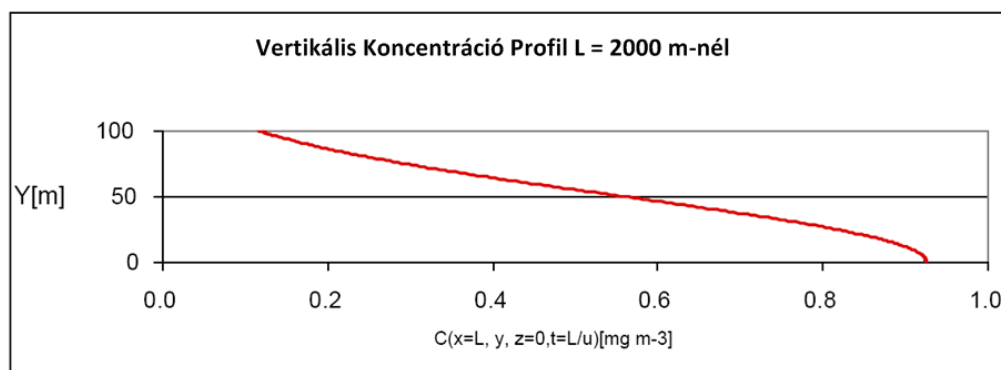
$$2. \text{ eset: } \Delta T = (4\sqrt{2D_x T_U})/u = (4\sqrt{2(1 \text{ m}^2\text{s}^{-1})50,000 \text{ s}}) / (0.02 \frac{\text{m}}{\text{s}}) = 63,246 \text{ s} = 17.6 \text{ óra}$$

26.3.4. Megoldás

- a. Mivel a rendszer egyik irányból (x,y,z) sem körülhatárolt, a koncentráció egyik irányban sem less soha egyenletes eloszlású, ezért három dimenziós modell alkalmazására van szükség. Feltételezve, hogy a kibocsátás időpontja $t=0\text{s}$, a vegyi anyag-felhő tömegközéppontjának pályagörbéje ($x = Ut$, $y = H$, $z = 0$). Ahhoz, hogy az $y=0$ pontban teljesülhessen a no flux határfeltétel, tükröképpont hozzáadásra van szükség $y=-H$ pontban. A tükrökép tömegközéppontjának pályagörbéje ($x = Ut$, $y = -H$, $z = 0$) less. Ezen feltételek, valamint izotrópikus diffúzió esetén a koncentráció a következőképpen alakul:

$$C_{x,y,z,t} = \frac{M}{(4\pi Dt)^{3/2}} \left[\exp\left(-\frac{(x-ut)^2 + (y-H)^2 + z^2}{4Dt}\right) + \exp\left(-\frac{(x-ut)^2 + (y+H)^2 + z^2}{4Dt}\right) \right]$$

- b. $x=L=500 \text{ m}$ hossz esetében $Pe\# = (2 \text{ ms}^{-1})(500\text{m})/(1\text{m}^2\text{s}^{-1}) = 1000 \gg 1$. Ez arra enged következtetni, hogy a kéményből az $x=500\text{m}$ pozícióba történő transzportfolyamat advekciónál dominált.
- c. A kibocsátás abban az esetben tekinthető pillanatnyinak, ha a kibocsátás időtartama, T_R , sokkal rövidebb, mint a transzport időtartama. Olyan távolságok esetében, ahol a $Pe\# = Ux/D \gg 1$, a transzport advekciónál dominált folyamat. Ez igaz $x \gg D/u = 0.5 \text{ m}$ esetében is, az egész áramlástartományon belül. Ezután az áramlás olyan távolságok esetében fog pillanatnyinak tűnni, ahol $T_U \gg T_R$. Vagy, $x/U \gg T_R$. Ez igaz $x \gg (300 \text{ s})(2 \text{ ms}^{-1}) = 600 \text{ m}$ esetében.
- d. $=2000 \text{ m}$ távolságban a koncentrációnak $T_u = 2000\text{m}/(2\text{ms}^{-1})=1000 \text{ s}$ időpontban kellene elérnie a csúcserőteket. Az $x=L$, $t=L/u$ vertikális profilja az alábbi ábrán látható. Fontos megjegyezni, hogy a koncentráció csúcserőteke nem a kibocsátás felső határán, hanem a no flux határon less tapasztalható.



26.3.5. Megoldás

- a. feltételezve, hogy az áramlás egyenletesen kitölti a csatornát, $U = Q/A = 2.5 \times 10^{-4} \text{ ms}^{-1}$. $L=75$ értékkel számolva $Pe = 0.19$, vagy másképp: $L = (75-25) = 50 \text{ m}$, $Pe = 0.13$. Mindkét esetben megállíthatjuk, hogy a Peclet szám arra utal, hogy a rendszer diffúzió által dominált.

27. Állandó pontforrások

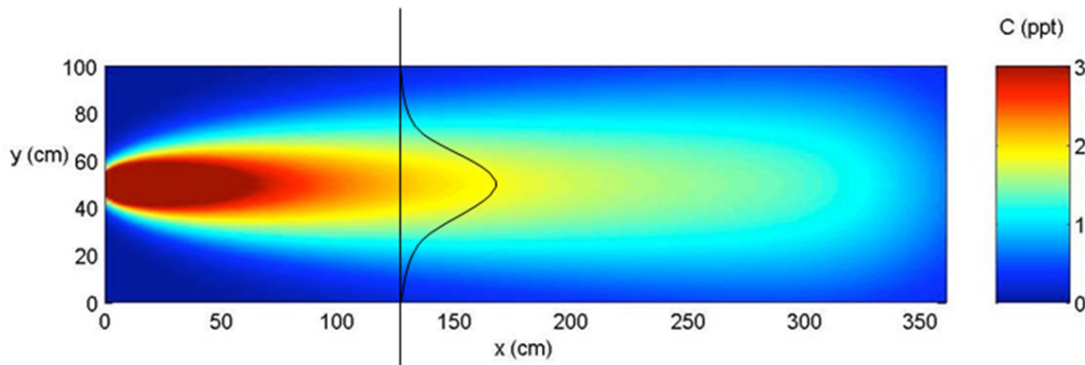


Az előző részekkel ellentétben ez a fejezet a vegyi anyagok fluidumban történő állandó oldódását ismerteti, mint például kéményfüst, talajvízáramlás folyókba, ipari hulladékáram, stb. Egy kémiai anyag mozgásban lévő fluidumba diffúzió útján történő folyamatos oldódása füstfáklyát képezve vízszintes irányban terjeszti ki az áramlási irányt az advekción keresztül. Ez a fejezet a füstgomolyag koncentrációs mezőjét vizsgálja behatárolt és határ nélküli tartományokban. Egy behatárolt tartományban (pl. egy szűk, sekély csatorna) egyszerű anyagmérleg által egy állandósult állapot jön létre. Az állandósult állapot előtti átmeneti periódus sokkal érdekesebb, innen származik a koncentrációs határt meghatározó analitikai kifejezés. Az animáció szemlélteti, hogy a forrástól való távolsággal hogyan változik a létrejött koncentrációs határ.

A mintavételi problémák a felhasználó azon képességét tesztelik, amelyek a határ geometriáján alapuló problémák leegyszerűsítésével kapcsolatosak, valamint olyan információszerzéssel kapcsolatosak, amelyet a diffúziós együtthatóból nyerünk a megállapított koncentrációs határ alapján.

27.1. Állandó kibocsátási pontforrás

Egy megadott pontból mozgó fluidumba folyamatosan kibocsátott skalár diffúzió útján történő folyamatos oldódása egy csóvát képezve vízszintes irányban terjeszti ki az áramlási irányt advekción keresztül. Mivel az áramlásra merőleges koncentrációs profil a tengelytől Fick-féle diffúzióval megállapítható, így az Gauss-féle hibaterjedéssel bír. Ebből kifolyólag a gomolyagot Gauss-féle csóvának hívjuk. Néhány közismert példája a Gauss-féle csóvának a kéményfüst, folyókba bocsátott hulladékáram, valamint a földfelszín alá temetett szivárgó tartályokból származó szennyezés.



248. ábra: A Gauss-féle csóva koncentrációs határvonalai, ahol $x=0$, $y=50$ cm, $z=0$. A $C(y)$ és $C(z)$ koncentrációs profilok Gauss félek. Lásd: $C(x=125, y, z=0)$ profil a fenti ábrán feketével jelölve.

A kibocsátás akkor nevezhető állandónak, ha az advekciónak időskála rövid a kibocsátás hosszához viszonyítva. A kibocsátás megközelít egy pontforrást, ha a forrás skálája alacsony a forrástól mért távolsághoz és a csóva adott távolságon mért szélességéhez viszonyítva. A forrás akár állandó, akár pillanatnyi kibocsátást vagy akár pontforrást, akár megosztott forrást közelít meg, nem csak a forrás tagoltságától függ, hanem annak térbeli elhelyezkedésétől is. Tehát, a megközelítések megválasztása nem a forrás abszolút térbeli és időbeli skálájától függ, hanem inkább a relatív skáláktól. Például adott egy folyó főárama (U), ahol a megállapított koncentráció a folyóba történő tíz perces kibocsátás ($T_{\text{kibocsátás}}$) után a becsült állandó kibocsátást éri el, vagyis $x \ll UT_{\text{kibocsátás}}$, de ugyanakkor egy pillanatnyi kibocsátást is elér, vagyis $x \gg UT_{\text{kibocsátás}}$,

Állandósult állapot, egydimenziós megoldás állandó kibocsátásra.

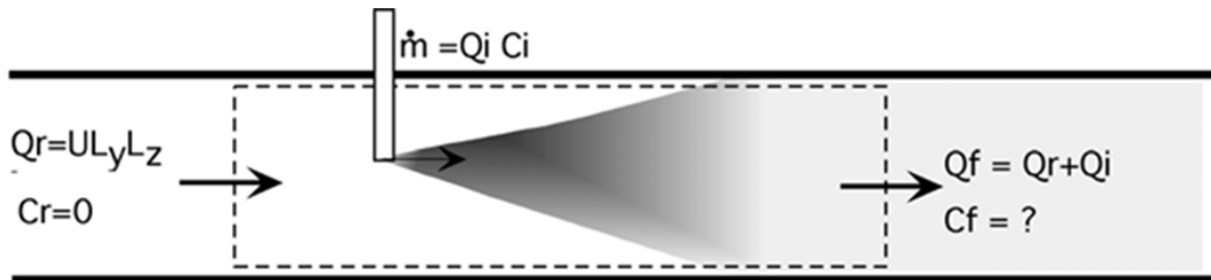
Adott egy hosszú, keskeny meder, melynek szélessége L_y , mélysége L_z egyirányú áramlata U és izotropikus diffúziója D . A meder középszélességénél és közép mélységénél kibocsátunk egy jelölő vegyületet engedünk $\dot{m}[\text{kg s}^{-1}]$. A reakciót mellőzve a tömegmegmaradás egyenlete (transzportegyenlet):

$$(1) \quad \frac{c}{t_0} \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = D \left[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right]$$

Rendszerint egy folyó jellemzően advekciónak, tehát $Pe \gg 1$ és $Pe = xU/D \gg 1$ bármely x -re. Ezt feltételezve, a hosszirányú diffúzió terminust elhanyagolható, mikor a hosszirányú advekciónak terminust vizsgáljuk. Feltételezzük, hogy a kibocsátás elég hosszán történik, hogy a folyóban lévő kondíciók elérjék az állandósult állapotot. Különösen egy jellemzően advekciónak rendszerben, x kibocsátási áramlat távolságon az állandósult állapot $t \gg x/U$ időben jön létre. Továbbá feltételezzük azt is, hogy a jelölő anyag/vegyület hosszanti és mélységi bevegülésére az időskála (T_{mix}) megfelelően rövid ahhoz, hogy a jelölő folyadék a keresztmetszetenél azonnal oldódjon és akkor $\partial C/\partial y = \partial C/\partial z = 0$. Ez a feltételezés az $x \gg UT_{\text{mix}}$ távolságokra lehet igaz. Mindezekkel a kiegészítő feltevésekkel az (1) egyenlet a következőképpen egyszerűsödik le,

$$(2) \quad u \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

vagy egyszerűen csak $C \neq f(x)$ egy állandó, behatárolt kibocsátású távöltérben. Ahhoz, hogy a távöltéri koncentráció értékét megállapítsuk, tömegegyensúlyt érvényesítünk a kibocsátás körüli kontrol térfogatban.



249. ábra: Tömegmegmaradás referencia térfogaton belül, állandó helyhez kötött forrás. A meder felső része, ahol az áramlás (Q_r) és a koncentráció folyamatos befecskendezése (C_i), az áramlás (Q_i).

Állandósult állapotban az össztömeg a referencia térfogaton belül nem az idő függvénye, valamint a tömeg be- és kiáramlások összegének egyensúlyban kell maradni:

$$Q_r C_r + Q_i C_i = Q_f C_f = (Q_r + Q_i) C_f$$

beáramlás kiáramlás

Ha $C_r = 0$, akkor a távortéri, állandó koncentráció

$$(3) \quad C_f = (Q_i C_i) / (Q_i + Q_r)$$

Hígítás mérése.

Az állandó, távortéri megoldást használják néha a sekély, komplex medrű folyók térfogatáramának becslésére, amelyre a sebességmérő alkalmazása nem célravezető. A jelölőanyag kibocsátást úgy tervezték, hogy a befecskendezés áramlási sebessége (Q_i) sokkal kisebb, mint maga az áramlási sebesség (Q_r), tehát ($Q_r + Q_i \approx Q_r$). A befecskendezés koncentrációja és áramlási sebessége ismert, így megállapítható a távortéri koncentráció (C_f). Ezután a (3) egyenletből

$$(4) \quad Q_r = Q_i C_i / C_f$$

Emlékezzünk vissza, hogy a (4) egyenlet szerint a jelölő folyadéknak a meder keresztmetszetével való megfelelő vegyülése C_f pontban mérhető. A konzervatív jelölő anyag (forrás- és süllyedésmentes) az áramlási táv függvénye lesz akkor, amikor a keresztmetszetbe vegyül. Tehát, egy olyan pozíció eléréséhez ahol a (4) egyenlet lép érvénybe, a koncentrációt addig mérjük, amíg az egy állandó érték aszimptotája nem lesz.

Helyhez kötött, állandó pontforrás nem meghatározott értelmezési tartományban.

A következőkben feltételezzük egy helyhez kötött, állandó pontforrást egy nem meghatározott értelmezési tartományban. Tökéletes vegyülés nem érhető el határok nélkül, így minden dimenzióra alkalmazni kell. Legyen $v=w=0$ és $Pe \gg 1$, a reakciót és az advokcióra vonatkozó longitudinális diffúziót figyelmen kívül hagyva. Általánosságban az anizotrópia megengedett a diffúzióban [$D_x \neq D_y \neq D_z$]. A rendszerben állandó transzport biztosítása érdekében az egyenletünk a következő:

$$(5) \quad u \frac{\partial c}{\partial x} = D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$

A fenti egyenlet azt mutatja meg, hogy az advekció és a diffúzió kettéválik a koordináták által. Azaz, transzport x irányában kizárólag advekcióval és transzport y és z irányokban csakis

diffúzióval történhet. Az (5) egyenlet megoldására átalakítjuk egyenletünket egy olyan referenciatartományban, amely az áramlással együtt halad. Ha $\tau = x/u$, then $u\partial C/\partial x = \partial C/d(x/u) = \partial C/\partial \tau$, akkor az (5) egyenlet a következőképpen alakul:

$$(6) \quad \frac{\partial C}{\partial \tau} = D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

A (6) egyenlet a jelölő anyag egy keskeny hasámban történő áramlásának kiterjedését magyarázza u sebesség mellett, ahol a hasáb hosszúsága dx . Ahogy a hasáb eléri a befecskendezési pontot, $M = \dot{m}(dx/u)$ tömegbecsapódás érzékelhető, ahol dx/u jelöli az időtávot, amely alatt a tömeg exponál a befecskendezett jelölő anyaggal. Ha a befecskendezés $x=0$ pontban történik, akkor a tömegbecsapódás $\tau = 0$ pontban lesz. A kezdeti kondíció szerint $C(\tau = 0) = M \delta(y) \delta(z)$, ahol a befecskendezés pontjára $y=z=0$ teljesül. Kezdeti kondíciók mellett a (6) egyenletre a megoldást a **24.1** (23) egyenletében találjuk, amibe az adott koordinátákat behelyettesítve az alábbi megoldást kapjuk:

$$(7) \quad C(y, z, \tau) = \frac{M}{dx4\pi\tau\sqrt{D_y D_z}} \exp\left(-\frac{y^2}{4D_y\tau} - \frac{z^2}{4D_z\tau}\right)$$

Visszatérve a (7) egyenlet állandó keretén belül $\tau = x/u-t$ felcseréljük, továbbá $M = \dot{m}(dx/u)$. Ez a felállítás egy határozatlan, háromdimenziós állandó kibocsátás (\dot{m}) koncentrációs mezőjét teszi lehetővé, ahol a pontforrás $(x, y, z) = 0$ pontban van.

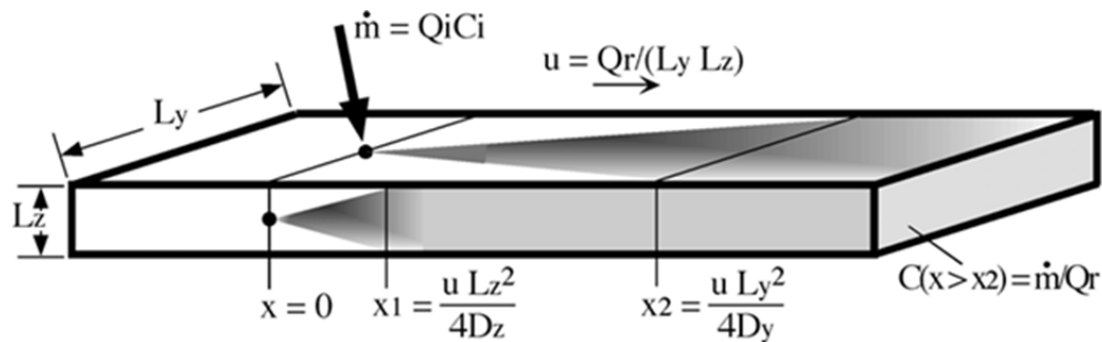
$$(8) \quad C(x, y, z) = \frac{\dot{m}}{4\pi\sqrt{D_y D_z x}} \exp\left(-\frac{uy^2}{4D_y x} - \frac{uz^2}{4D_z x}\right)$$

Állandó csóva áramlási fejlődése.

Feltételezzük, hogy a **250. ábra** jelölt állandó pontforrásból történő áramlási fejlődést. A kibocsátás középmélysége ($z = 0$) pontban, középszélessége pedig ($y = 0$) pontban lesz, valamint $x = 0$. A meder határára vonatkozó feltételezéseket szem előtt tartva, a vízfelszínnél forrásokat jelölünk meg a (8) egyenletben található megoldásra vonatkozóan. Emlékezzünk, hogy a **25.1** egy határozatlan áramlás esetében pozitív forrás megjelölése szükséges és egy teljesen feloldódó határnál negatív forrást adtunk meg. A mennyiben a csóvában található kémiai anyag nem volatilis, a vízfelszín határozatlan áramlatúként viselkedik. A négy határozatlan áramlás az $(x=0, y=nL_y, z=0)$ és $(x=0, y=0, z=nL_z)$ pontokban található pozitív képletek összege, ahol $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ és +/- végtelenbe tart

$$(9) \quad C(x, y, z) = \frac{\dot{m}}{4\pi\sqrt{D_y D_z x}} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u(y+nL_y)^2}{4D_y x} - \frac{uz^2}{4D_z x}\right) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \exp\left(-\frac{uy^2}{4D_y x} - \frac{u(z+nL_z)^2}{4D_z x}\right) \right]$$

A második összegben $n = 0$ nem szerepel, mivel az a valódi forrásra vonatkozik, amelyet már az első összegben szerepeltettünk.



250. ábra: Állandó kibocsátás, ahol a középszélesség ($y=0$), a középnyúlóság ($z=0$) és $x=0$. Jelöltük a pontokat, ahol a csóva keveredik a mélységnél (x_1) és a szélességnél (x_2)

A csóva-koncentráció tökéletesen vegyül a $x > u L_z^2 / 4D_z$ mélységnél és $\partial C / \partial z = 0$ e fölött a távolság fölött (250. ábra), megcáfolva a vertikális diffúziót az (5) egyenletben. Az (5) egyenletben szereplő matematikai levezetést követve egy háromdimenziós csóva esetében, egy határok nélküli kétdimenziós csóva koncentrációs mezőjét kapjuk, ahol a kibocsátás $(x,y)=0$ pontban van.

$$(10) \quad C(x, y) = \frac{m/u}{L_z \sqrt{4\pi D_y (x/u)}} \exp\left(-\frac{u y^2}{4 D_y x}\right)$$

$\partial C / \partial z = 0$, és a felszín áramlási határvonalai, valamint a meder automatikusan kielégítőek. Kizárólag az oldalhatárokkal kell számolni a következő forrásoknál: $(x=0, y=nL_y, z=0)$, ahol $n = \pm 1, \pm 2 \dots$ végtelenbe tart. A csóva koncentrációja a (250. ábra) látható x_1 és x_2 közé esik.

$$(11) \quad C(x, y) = \frac{m/u}{L_z \sqrt{4\pi D_y (x/u)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u(y+nL_y)^2}{4 D_y x}\right)$$

ahol $n = 0$ a valódi pontforrás.

Átmeneti, egydimenziós megoldás állandó pontforrásra. .

A 250. ábra egy állandó pontforrásbeli áramlat térbeli fejlődést mutatja, állandósult állapot elérését követően. Ezt követően meghatározzunk az átmeneti időintervallumot, a befecskendezés kezdete ($t=0$) és az állandósult állapot elérése között ($t \gg x/U$). Egészen pontosan, $\partial C / \partial t \neq 0$ megengedett. Leegyszerűsítve, egy jól oldott állapotot feltételezünk a szélességnél és mélységnél egyaránt: $t \partial C / \partial y = \partial C / \partial z = 0$, valamint azt, hogy nincs reakció.

$$(12) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

A longitudinális diffúzió elvét követjük, még akkor is, ha elvárjuk, hogy $Pe \gg 1$. A 251. ábra az látható, hogy a diffúzió egy térbeli részt formál a front körül vagyis a csóva szélei felé tart. Amint a jelölő anyag bejut, minden egyes folyadékrészecske dx szélességben. Feltételezzük, hogy a tömeg közvetlenül keveredik a részecskéken belül, pl. a meder hosszában és szélességében egyaránt, ahol az elsődleges koncentráció a részecskén belül $C(x=0) = C_0 = M / (L_y L_z dx) = \dot{m} / (u L_y L_z)$. A határra vonatkozó feltételek a következők:

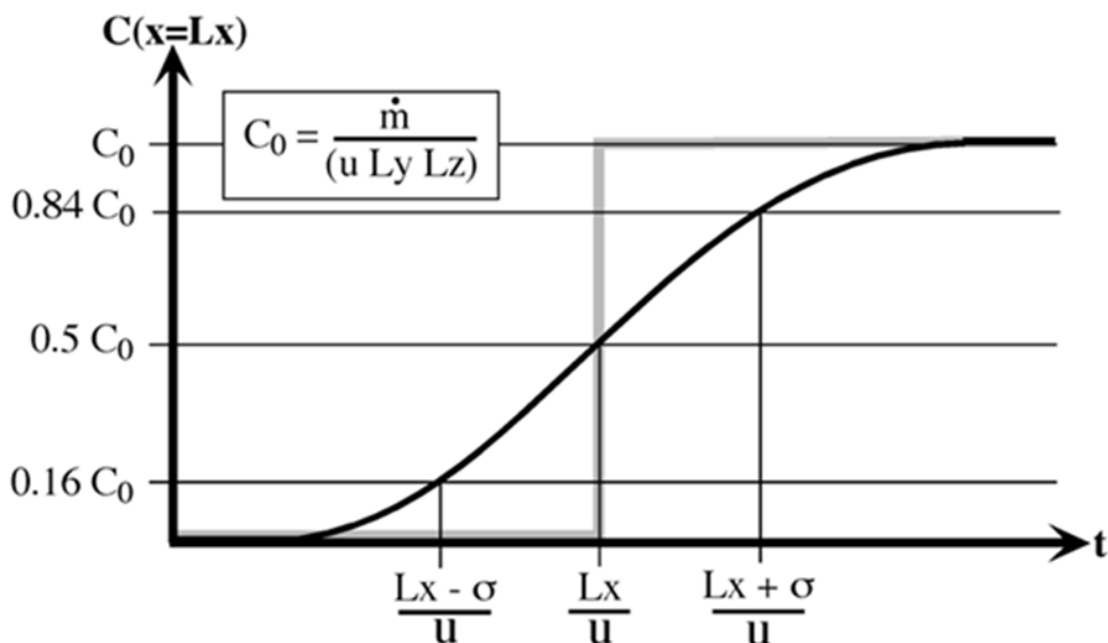
$$(13) \quad C(x) = 0 \quad \forall x, t < 0$$

$$C_0 = \frac{\dot{m}}{uL_yL_z} \quad x = 0, t \geq 0$$

A (12) egyenletre – a (13) egyenletben meghatározott feltételekkel – a megoldás:
Egydimenziós, átmeneti megoldás állandó kibocsátásra

$$(14) \quad C(x, t) = \frac{\dot{m}}{2uL_yL_z} \operatorname{erfc}\left(\frac{x-ut}{\sqrt{4D_x t}}\right) = \frac{C_0}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x-ut}{\sqrt{4D_x t}}\right)$$

Az *erfc* függvényt kiegészítő hibafüggvénynek nevezzük és a **11.** táblázat határozza meg értékeit. A (14) egyenlet az áttörési görbét írja le, mivel a koncentráció ideiglenes kialakulását mutatja, amikor a jelölő anyag először tör át egy specifikus távolságon belül, $t=0$ pontnál kezdődően ér a mederbe u sebesség mellett, ahol $x = 0$. Ha a jelölő folyadék túl gyorsan keveredik L_z mélységben és L_y szélességben, akkor a (14) egyenlet alapján a koncentráció $x = L_x$ pontban mérhető.



251. ábra: Áttörési görbe Jelölő anyag hozzáadása értékénél kezdődik, ahol $t = 0$. A koncentráció $x=L_x$ pontban érzékelhető, melyet a fekete görbe ábrázol. A szürke áttörési görbe a $D_x = 0$ pontban áll fenn, amennyiben a diffúziót figyelmen kívül hagyjuk.

11. táblázat: A hibafüggvény *erf(a)* a Gauss-féle hibaeloszlás integrálja 0 pontból a pontba. A kiegészítő hibafüggvény a Gauss-féle hibaeloszlás integrálja, amely a pontból végtelenbe tart, vagyis $\operatorname{erfc}(a) = 1 - \operatorname{erf}(a)$ és $\operatorname{erfc}(-a) = 2 - \operatorname{erfc}(a)$.

$\operatorname{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-r^2} dr \qquad \operatorname{erfc}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^\infty e^{-r^2} dr$					
a	<i>erf(a)</i>	<i>erfc(a)</i>	a	<i>erf(a)</i>	<i>erfc(a)</i>
0	0	1.0	1.4	0.952285	0.047715
0.7	0.677801	0.322199	2.0	0.995322	0.004678
1.0	0.842701	0.157299	3.0	0.999978	0.000022

27.2. Feladatsor

27.2.1. Feladat

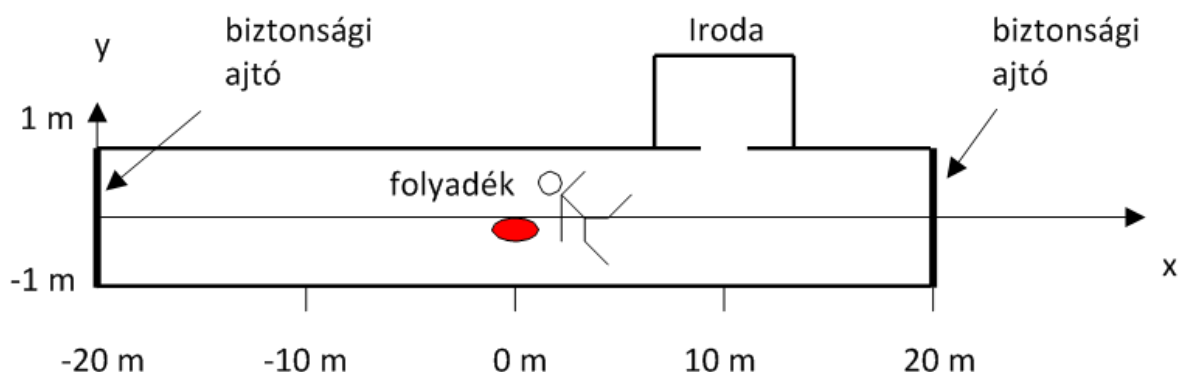
Egy kis patak Lindán-nal (olyan növényvédőszer ami májkárosodást és epileptikus rángógörcsöt idézhet elő) szennyezett. Ugyanezen a területen lévő artézi kutak vizei is beszennyeződtek Lindán-nal, és gyanított, hogy a folyóvíz szennyeződés az artézi vizekből származó szennyeződésből került a patakba. Hogy bebizonyítsuk a feltevést, a jelölőfestékekkel kapcsolatos tanulmányainkra hagyatkozunk. Az alábbi információkra alapozva, becsüljük meg a felszín alatt víz áramlási tömegét, Q_{LGW} , és a Lindán koncentrációt (C_{LGW}) a vízben.

1. állomás: 50-mg/l jelölőanyag oldatot fecskendezünk be $Q_i = 100\text{cm}^3/\text{s}$ sebességnél
2. állomás: 1. sz. állomástól 100 méterre folyásiránnyal megegyező irányban.
Jelölőanyag koncentráció, $C_{dye} = 10\ \mu\text{g/l}$
Lindán koncentráció $C_{L2} = 0.5\ \mu\text{g/l}$
3. állomás: 1. sz. állomástól 200 méterre folyásiránnyal megegyező irányban.
Jelölőanyag koncentráció, $C_{dye} = 8\ \mu\text{g/l}$
Lindán koncentráció $C_{L3} = 0.9\ \mu\text{g/l}$

27.2.2. Feladat

Egy szórakozott professzor felbotlik és kiönt 1 g kémiai anyagot a folyosón az ajtótól 10 m távolságra. A folyosó 2 m széles és 2 m magas. A kémiai anyag 25 másodpercen belül evaporál. Tegyük fel, hogy az izotróp turbulens diffúzió $D = 0.05\ \text{m}^2/\text{s}$.

1. eset. A biztonsági ajtók zárva vannak, így nincs légáramlat a helyiségben. Írjunk fel egy egyenletet az ajtónál lévő koncentrációra, az összes feltételezésünket bebizonyítva. Tervezzük meg az expozíciót az ajtónál vs. a maximális és a legutolsó koncentráció ideje.
2. eset. A biztonsági ajtók kinyíltak, tehát egy 4 m/s szellő keletkezik, ami a kiöntött oldat irányából az ajtó felé fúj. Számoljuk ki az ajtónál lévő maximális koncentráció terjedelmét és időtartamát. Vázzuk fel a koncentráció alakulását $c(t)$, a maximális és a végző koncentrációs értékek pontos megjelölésével.



27.2.3. Feladat

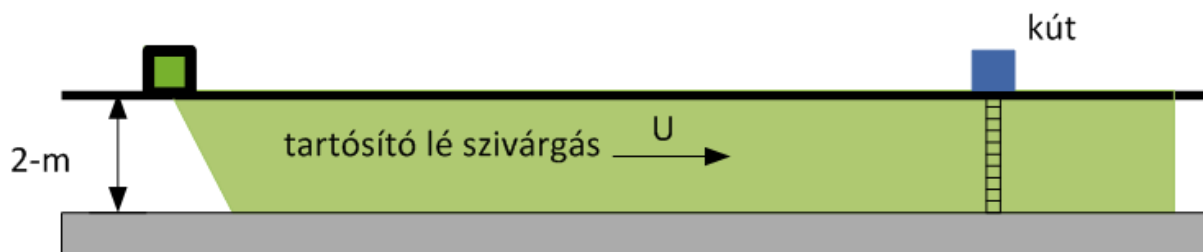
Indeck Rt. szerződésajánlattal keres meg minket, egy új 350 MW gázfűtéses energia erőmű építésével kapcsolatban, Rhode Island tartományban, Smithfield városban. Környezetvédelmi

jelentések szerint az erőmű 150 köbtonna szénmonoxidot bocsát ki egy 57.9-m magas kéményből. A házunk a feltételes kéménytől 1 km távolságban van, széliránnyal megegyező irányban, tehát a szénmonoxid kibocsátás hatása érint minket. Feltételezzük, hogy egyenletes szél fúj $U = 2$ m/s sebességgel, és a vertikális turbulens diffúziós együttható $D_z = 1$ m²/s, valamint a horizontális turbulens diffúziós együttható $D_x = D_y = 2$ m²/s.

- Írjuk fel az egyenletet a szénmonoxid koncentrációra a kéménytől széliránnyal megegyező irányban.
- Tervezzük meg a koncentráció vertikális profilját $C(z)$ a ház körül. Ha a ház 10 m magas, mi az a maximális koncentráció, amit előfordulhat?

27.2.4. Feladat

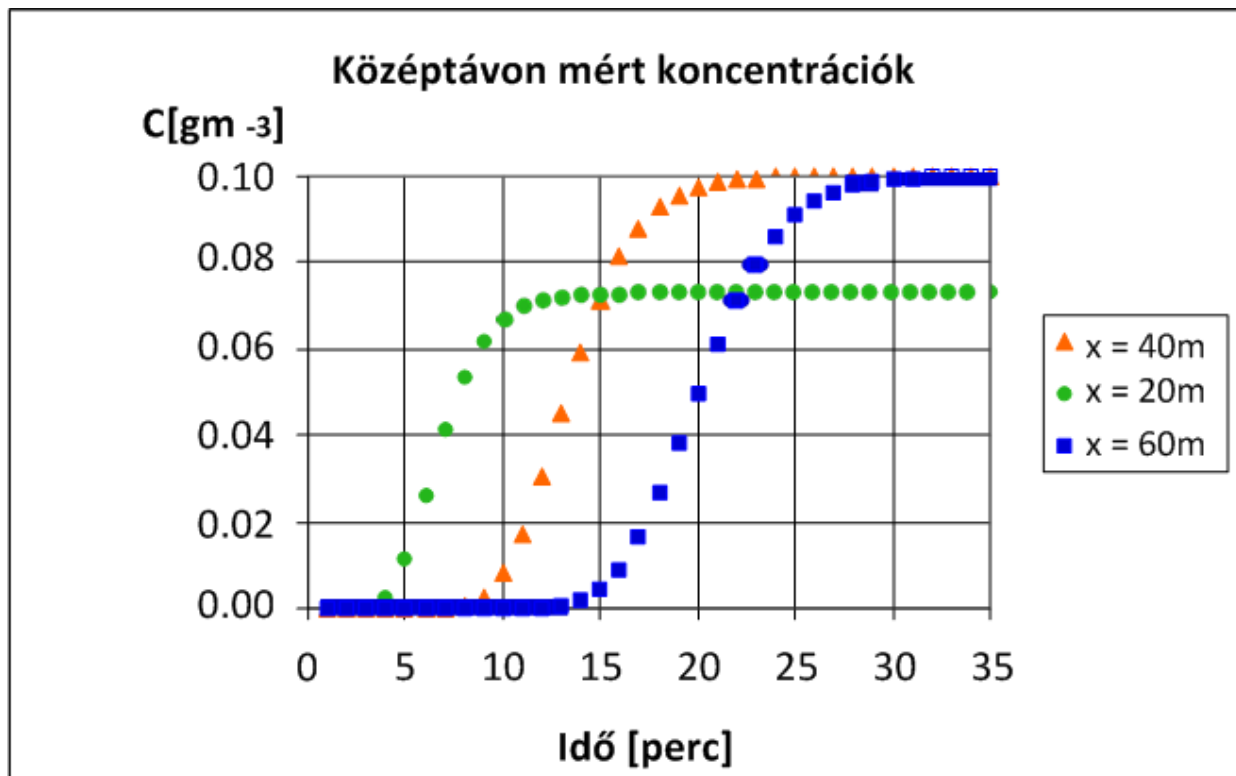
A savanyúságot nagyméretű fából készült tartályokban készítik, amelyben 10 g L⁻¹ só-koncentrációjú tartósító lé van. Minden egyes tartály alja négyzet alakú, melynek oldalhosszúsága 5 m. A Dill Pickle gyárban az egyik tartály szivárogni kezd, közvetlenül egy sekély akvifer-be 0.1 m³ hét⁻¹ sebességgel. A szivárgás egyenletesen eloszlik a tartály alján. Az akvifer 2 m mély, és egy nem vízáteresztő agyagréteg felett helyezkedik el. A tartósító lé sűrűsége a gyors diszperziót lehetővé teszi az akvifer mélysége fölött. A Pickle Rt. nincs tudatában ennek a kismértékű szivárgásnak, de az akvifer-t ivóvízként használó közösség igen. A közösségi kút 500-m távolságban helyezkedik el a tartálytól, a felszín alatti víz folyásával megegyező irányban. Összesítsük a az ivóvíz minőségére kifejtett lehetséges hatásokat úgy, hogy megbecsüljük a a koncentráció maximális sótartalmát a kútban. A szivárgástól számított mennyi időn belül éri el ezt a koncentrációs szintet? A transzportsebesség (pórussebesség) az akvifer-ben 10⁻⁶ m/s. A molekuláris diffúzió értéke a tartósító lében 10⁻⁹ m²s⁻¹. A hosszirányú diszperziós együttható 10⁻⁵ m²s⁻¹. A laterális diszperziós együttható 10⁻⁶ m²s⁻¹.



nem méretarányos nézet a tartósító lé szivárgásról

27.2.5. Feladat

Jelölőfolyadékot bocsátunk ki 10mgs⁻¹ egy téglalap alakú irrigációs csatorna oldalfalánál. A koncentrációt a csatorna közepénél mérjük folyásiránnyal megegyező irányban, három helyen, $x = 20$ m, 40m, és 60m. A befecskendezés $t = 0$ időpontban kezdődik. Becsüljük meg a csatornában lévő áramlást és a hosszirányú diszperziós együtthatót a közép keresztmetszeti tartományban.



27.3. Megoldások

27.3.1. Megoldás

1 állomás: 50-mg/l jelölőanyag oldatot fecskendezünk be $Q_i = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$ sebességnél

2 állomás: 1. sz. állomástól 100 méterre folyásiránnyal megegyező irányban.

Jelölőanyag koncentráció, $C_{\text{festék}} = 10 \text{ } \mu\text{g/l}$

Lindán koncentráció $C_{L2} = 0.5 \text{ } \mu\text{g/l}$

3 állomás: 1. sz. állomástól 200 méterre folyásiránnyal megegyező irányban

Jelölőanyag koncentráció, $C_{\text{festék}} = 8 \text{ } \mu\text{g/l}$

Lindán koncentráció $C_{L3} = 0.9 \text{ } \mu\text{g/l}$

Amennyiben a jelölőanyag festék jól vegyül és a koncentráció állandó, akkor az áramlás a 2 és 3 állomásokon:

$$Q_2 = Q_i C_i / C_{\text{dye}} = (100 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1})(50 \text{ mg l}^{-1}) / (0.01 \text{ mg l}^{-1}) = 0.50 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$Q_3 = Q_i C_i / C_{\text{dye}} = (100 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1})(50 \text{ mg l}^{-1}) / (0.008 \text{ mg l}^{-1}) = 0.63 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

Amennyiben nincs mellékfolyás vagy kanális a 2 és 3 állomások között, akkor az áramlás a két állomás között a következő lesz:

$$Q_{\text{GW}} = Q_3 - Q_2 = 0.13 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

Hogy a Lindán koncentrációt meg tudjuk határozni a felszín alatti vizekben, értékeljük a a folyón belüli tömegkoncentrációt a 2 és 3 állomás közötti szakaszon. A Lindán beáramlások

ebbe a referenciatömegbe a 2 állomáson történik, a felszín alatti vízből. A kiáramlás a 3 állomásnál lesz. Tehát

$$= Q_2 C_{L2} + Q_{GW} C_{L_{GW}} = Q_3 C_{L3}$$

A felszínalatti koncentráció alakulása:

$$C_{L_{GW}} = \frac{Q_3 C_{L3} - Q_2 C_{L2}}{Q_{GW}} = 2.4 \mu g/l$$

27.3.2. Megoldás

1. eset: A biztonsági ajtók zárva vannak, így nincs légáramlat a helyiségben.

Használjuk az időskálákat arra vonatkozóan, hogy a kibocsátás folyamatos vagy pillanatnyi az irodánál. Az irodához való távolság $dx=10$ -m. Nincs advekción (zéró áramlás), a transzport időmérték $T_{diffúzió} = dx^2/8D$, a kontúr megérkezésének időpontján alapszik. Tehát $T_{diffúzió} = (10\text{-m})^2/(8 \times 0.05\text{m}^2\text{s}^{-1}) = 250$ s. Ez sokkal hosszabb, mint a kibocsátási időmérték (25 s), tehát az irodánál mért koncentráció úgy tűnik, mintha pillanatnyi kibocsátás lenne.

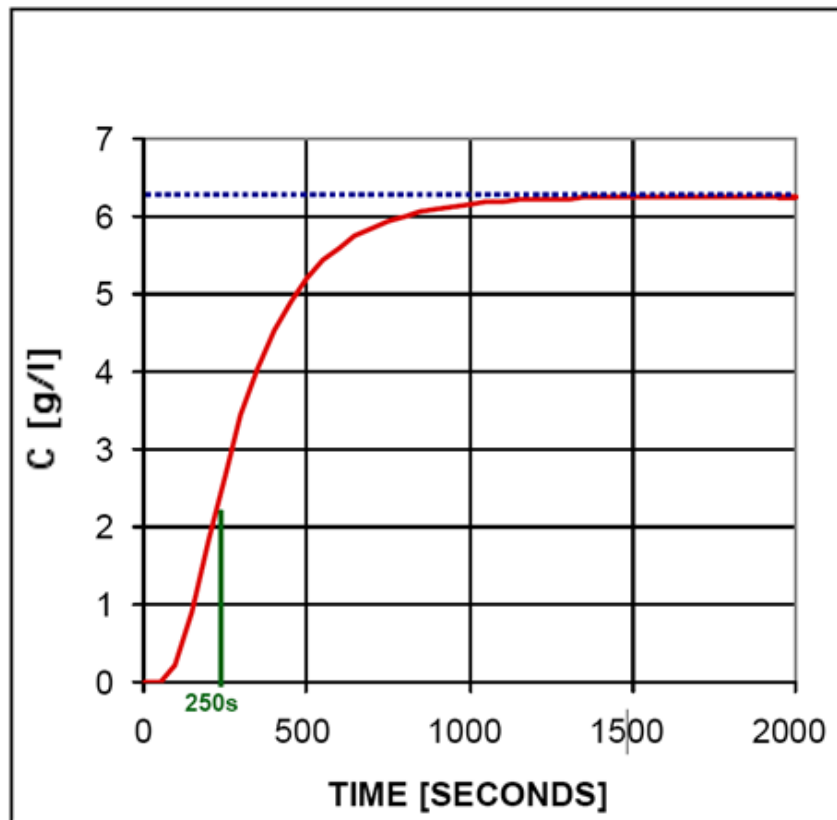
Hasonlóképpen, használjuk az időmértéket ahhoz, hogy meghatározzuk a koncentráció az ajtónál 1-D, 2-D, vagy 3-D forrásból ered. Ha feltételezzük, hogy a kibocsátás középtávon jelentkezik, akkor a vegyüléshez szükséges idő $t_{mix,y} = (2\text{m})^2/(4 \times 0.05 \text{m}^2\text{s}^{-1}) = 20$ s. A vertikális vegyülés időmértékével kapcsolatban ne felejtjük el, hogy a kibocsátás a padló határánál történt. A kibocsátásnak kétszer akkora távon kell szétterjedni, mint ha középtávon lenne a kibocsátás, tehát a hosszúságot meg kell duplázni. A vegyülés időmértéke $t_{mix,z} = (2 \times 2\text{m})^2/(4 \times 0.05\text{m}^2\text{s}^{-1}) = 80$ s. Mivel $t_{diffúzió} \gg t_{mix}$, a koncentráció az ajtónál azt jelzi, hogy a kibocsátás egydimenziós forrásból származik. pl. y és z pontokban egyenletesen oszlik szét.

Végül, zárt ajtók esetében az $x = \pm 20$ pontnál nincsenek áramlási határok. Hogy ezeket a határokat megértsük, végtelen képforrást jelölünk meg az $x = 40n$ pontban, ahol $n = \pm 1, \pm 2$, stb. A valódi forrás az $n=0$ pontban van. Az ajtónál mért koncentráció a következő lesz,

$$C(x, t) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi Dt}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\exp(-(x + 40n)^2/4Dt))$$

ahol $x = 10$ m. A folyosó keresztmetszeti területe $A = 4 \text{ m}^2$.

Zárt ajtók mellett a folyosó egy zárt rendszer, és a végső koncentráció egyszerűen az az érték, amit akkor kaptunk, amikor a kibocsátás teljesen elvegyült a folyosó fölött. Feltételezzük, hogy az egyes helyiségekbe vezető ajtók zártak, tehát semmiféle füst nem lép a szobákba. A végső koncentráció ekkor, $C_{final} = 1\text{g} / (2 \times 2 \times 40 \text{ m}^3) = 6.25 \text{ g/l}$.



Az ajtónál mért koncentráció ($x = 10$ m) a fentiekben tervezett. Vegyük észre, hogy az ajtónál mért koncentráció a diffúziós időmértéknél (250 s) nem elhanyagolható. Ez az időmérték a megérkezés pillanatán alapul. (2σ), nem pedig a koncentráció egy specifikus értékén. A csóva méretén alapuló időmérték (2σ) nem feltétlenül jó jele a kockázatnak. Főként, ha az abszolút koncentráció a 2σ pontban a határérték alatt van, akkor észre sem vennénk, még akkor sem ha már megérkezett. A végső koncentráció az 1600 s pontban lép fel, ami rövidebb, mint $t_{mix,x} = L_x^2/4D = 8000$ s, ahol $L_x = 40$ m (4. fejezetben meghatározott). Ez ismét kihangsúlyozza a normál vegyülésű becslés konzervatív természetét, $L^2/4D$.

2. eset. A biztonsági ajtók kinyíltak, tehát egy 4 m/s szellő keletkezik.

Az advekción időmérték $T_{advekción} = dx/u = 10\text{-m}/4\text{ms}^{-1} = 2.5$ s $\ll T_{diffúzión}$ és $\ll T_{release}$. Tehát a transzportot az advekción dominálja, és a kémiai anyag még azelőtt megérkezik az ajtóhoz, hogy az kibocsátás befejeződött volna. Tehát a legtöbb kibocsátás során, az ajtóhoz érkező koncentráción úgy tűnik, mintha egy állandó forrásból származna. Továbbá, a fenti vegyülési időmérték még mindig tart, tehát írhatjuk azt, hogy $T_{mix,y}$ és $T_{mix,z} > T_{advekción}$, tehát a vegyszer felhő nem vegyül el y és z at pontokban az ajtónál. Tehát a felhő teljes mértékben háromdimenziós az ajtónál. Az egyszerűség kedvéért, kijelöljük a kibocsátás eredetét az ($x = 0, y = 0, z = 0$) pontban. Képforrások a határ nélküli áramlásoknál $y = \pm 1$ -m és $z = 0$ és $z = 2$ m. Határozzuk meg a négy legközelebbi képet, (y,z)= $[(0,0); (-2,0); (2,0); (0,4)]$. A kibocsátások többsége során, az ajtónál lévő koncentráción,

$$C(x, y, z) = \frac{\dot{m}}{4\pi Dx} \left[2 \exp\left(-\frac{u(y^2 + z^2)}{4Dx}\right) + \exp\left(-\frac{u((y-2)^2 + z^2)}{4Dx}\right) + \exp\left(-\frac{u((y+2)^2 + z^2)}{4Dx}\right) + \exp\left(-\frac{u(y^2 + (z-4)^2)}{4Dx}\right) \right]$$

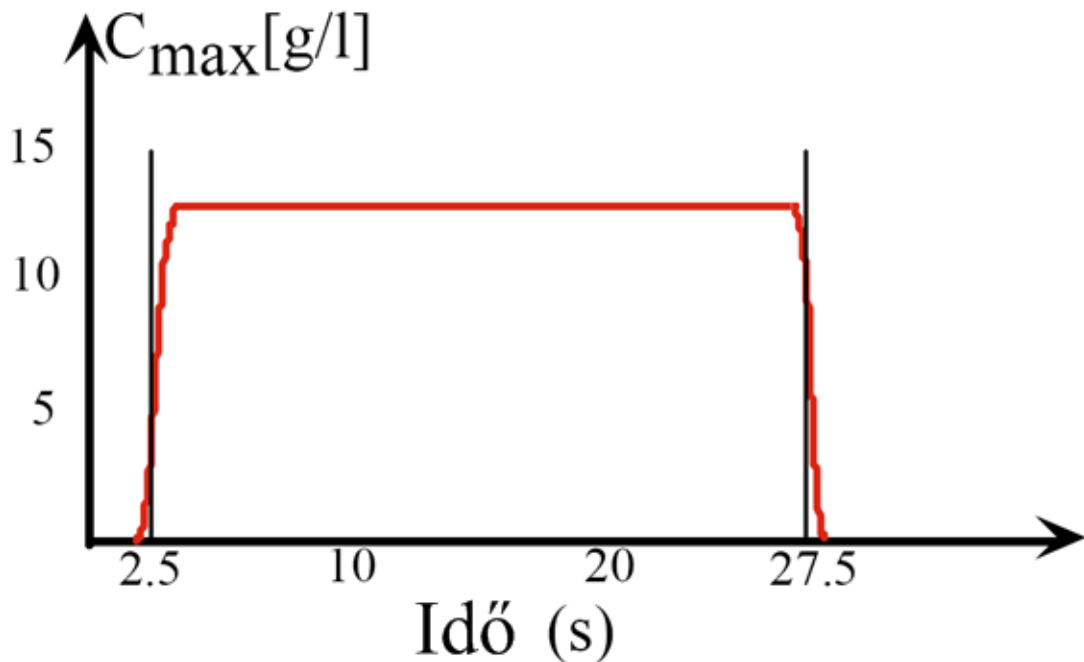
valós+tükörkép (y=0, z=0)-nál tükörkép (y=2, z=0)-nál tükörkép (y=-2, z=0)-nál tükörkép (y=0, z=4)-nél

Az ajtónál lévő maximális koncentráció a padlón lesz, a forrással egy vonalban. Tehát megoldjuk a fenti egyenletet (x = 10m, y = 0, z = 0) pontokra, a következőt kapjuk:

$$C_{max} = \frac{\dot{m}}{4\pi Dx} \left[2 + 2 \exp\left(-\frac{u(2m)^2}{4Dx}\right) + \exp\left(-\frac{u(4m)^2}{4Dx}\right) \right] =$$

$$= \frac{(1 \text{ g}/25 \text{ s})}{4\pi(0.05 \text{ m}^2\text{s}^{-1})(10 \text{ m})} [2 + 2(0.00034) + 1.2 \times 10^{-14}] = 12.7 \text{ g/l}$$

Látható az értékekből, hogy az utolsó kifejezésben, hogy csak a kép valódi forrásokkal vezet jelentős mértékben a megoldáshoz. A fenti koncentrációs értéket a az ajtónál mértük, a kibocsátás időtartamán belül. Pontosabban, a kezdésnél mért koncentráció kb. a t = 2.5 s időpontban következik be, (advekción időmérték) és a (25 + 2.5) = 27.5 sec pontban ér véget. A maximális koncentráció az ajtónál az alábbi ábrán látható. Mivel a hosszirányú diffúzió nem éles, de lesz egy átmeneti területe, ami megközelítőleg $\approx 4\sigma$ hosszú, ahol σ becsült érték, az advekción időmérték 2.5s. Tehát az átmeneti terület hossza $4 \sqrt{2}(0.05\text{m}^2\text{s}^{-1})(2.5\text{s}) = 2 \text{ m}$, ami egy (2-m)/(4m/s) = 0.5 s nagyságú átmeneti területet jelöl. Vegyük észre, hogy a végső koncentráció zéró, voltaképpen minden távozik a folyosóról a légáramlással együtt.



27.3.3. Megoldás

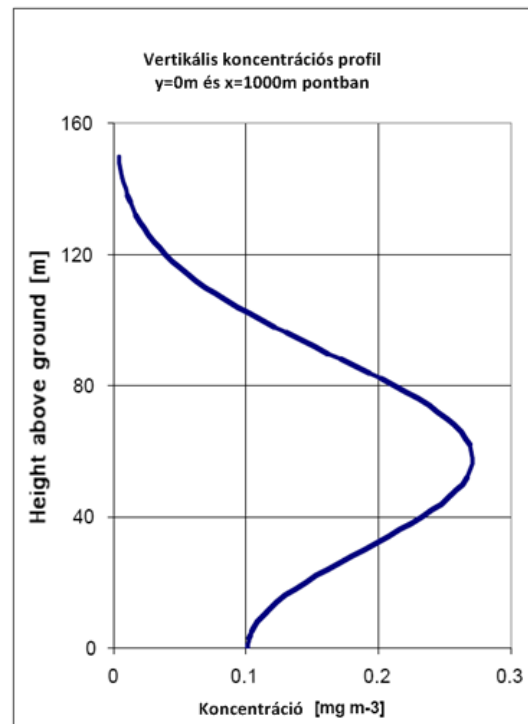
A kémény folyamatosan füstöl, tehát a folyamatos kibocsátás megoldását vesszük igénybe. Legyen H = 57.9-m be a kémény magassága. Ha z = 0 a földön, a forrás az (x=0, y=0, z = H) pontokban van. Szükség van egy képforrásra is az (x = 0, y = 0, z = -H) pontban, hogy meghatározzuk az áramlásmentes határokat. a földön.

$$C(x, y, z) = \frac{\dot{m}}{4\pi x \sqrt{D_y D_z}} \left[\exp\left(-\frac{uy^2}{4D_y x} - \frac{u(z-H)^2}{4D_z x}\right) + \exp\left(-\frac{uy^2}{4D_y x} - \frac{u(z+H)^2}{4D_z x}\right) \right]$$

valós forrás

tükörkép forrás

Ez az egyenlőség akkor igaz, ha $Pe=Ux/DX \gg 1$ és $x \gg D_x/U = 1$ -m. Mivel a ház közvetlenül széliránnyal megegyező irányban van, legyen $y=0$, $x = 1000$ -m a fenti egyenletben. A kibocsátás sebessége, $\dot{m} = 150,000\text{kg/yr} = 4.8 \text{ gs}^{-1}$. Nézzük meg a tervet a következőkben $C(z)$ értékére. A maximum koncentráció értéke a háznál a tetőn lesz, $C(z = 10\text{-m}) = 0.11 \text{ mg/m}^3 = 0.11 \text{ }\mu\text{g/l}$. Végül az áramlásmentes határt a profilban a következőképpen fejezzük ki, $\partial C/\partial z = 0$ at $z = 0$

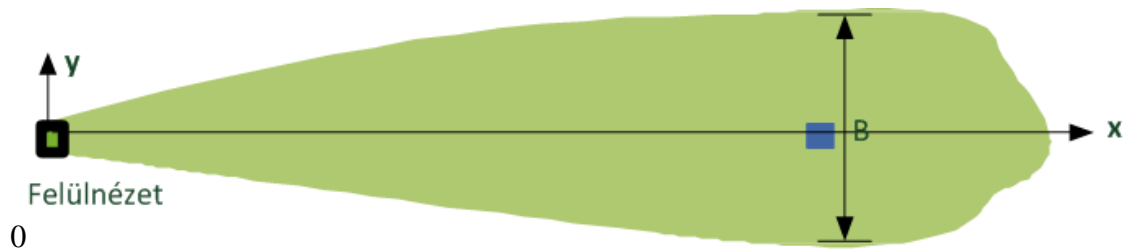


27.3.4. Megoldás

A kibocsátást állandónak tekintjük, ami gyorsan hozzájárul az akvifer mélységében történő változáshoz. Nem jelöltünk hosszirányú határokat. Első becslésként feltételezzük, hogy a koncentrációs mező hasonlóan alakul majd a kétdimenziós folyamatos kibocsátáshoz, (x,y) , azzal a feltétellel, hogy az egyenletes a vertikális koordinátában, z . Nincs szükség képforrásra, mivel a határok nagymértékben szigorítják az áramlást z irányban, és a koncentráció már eleve állandó z -ben, így az áramlásmentes kondíció $\partial C/\partial z = 0$ automatikusan teljesül. A forrás nem pontforrás, hanem inkább egy $5\text{-m} \times 5\text{-m}$ -es területen oszlik szét. Abban az esetben, ha a terület mérete kicsi a kútnál lévő csóva kiterjedéséhez képest, tekinthetünk rá úgy, mint pontforrásra (lásd lent), mivel a mért koncentráció a kútnál úgy jelenik meg, mintha az egy pontforrásból származna. Megbecsüljük a csóva oldalirányú dimenzióját $B = 4 \sigma_y = 4 \sqrt{(2K_y L/U)}$, ahol $L = 500\text{m}$ a kúttól mért távolság, és a hosszirányú diszperzió $K_y = 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. Ezt követően $B = 126\text{m}$. Mivel $5\text{m} \ll 126\text{m}$, a kútnál mért koncentráció úgy jelenik meg, mintha pontforrásból származna. Végül felírjuk az egyenletet a tartósító lé koncentrációjára a szivárgástól számítva folyásiránnyal megegyező irányban.

$$C(x, y) = \frac{\dot{m}/u}{L_z \sqrt{4\pi K_y} (x/u)} \exp\left(-\frac{uy^2}{4K_y x}\right)$$

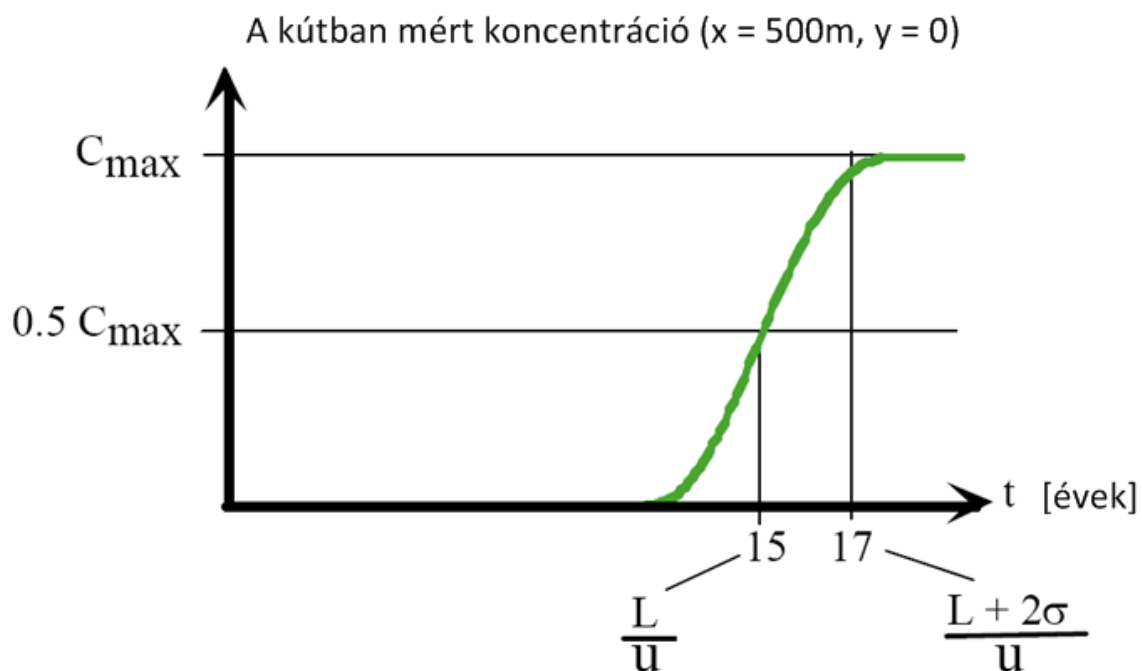
ahol $L_z = 2\text{m}$ az akvifer vastagsága. Ez a megoldás a érvényes a $Pe = Ux/K_x \gg 1$, vagy $x \gg 10\text{m}$ értékekre, tehát ezt alkalmazhatjuk a kút esetében az $x = 500\text{m}$ pontban.



A kútban lévő maximális koncentráció, C_{max} , a fenti egyenletből számítva az $(x=500\text{m}, y=0\text{m})$ pontban.

$$C_{max} = \frac{(10 \text{ g/l})(0.1 \text{ m}^3/\text{week})(1 \text{ week}/604800\text{s})}{(10^{-6} \text{ m/s})(2 - m)\sqrt{4\pi(10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})(500 \text{ m}/10^{-6} \text{ m/s})}} = 0.011 \text{ g/l} = 0.011 \text{ ppt}$$

Ez a sótartalom emberi érzékszervekkel nem észlelhető. Viszonyításképpen, a sósvíz 30 ppt. A fenti megoldás azt feltételezi, hogy állandósult állapot alakult ki a kútban. Ennek a létrejöttéhez szükséges idő függ az advekciótól és a hosszirányú diszperzió. Az advekciós időmérték $T_U = 500\text{m}/10^{-6} \text{ m/s} = 5 \times 10^8 \text{ s} \approx 15 \text{ év}$, meghatározza a középtávhoz érkezés időpontját, aminek $C_{max}/2$ a koncentrációja. Az időintervallum Δt a középtávhoz érkezés és a feltételes időszak vége között körülbelül $\Delta t = (2\sigma_x)/u$, ahol σ_x a középtávhoz érkezés időpontjában a kútban, $\sigma_x = \sqrt{2K_x L/u}$. Tehát, $\Delta t = (2/10^{-6} \text{ ms}^{-1}) \times \sqrt{(2 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \times 500/10^{-6} \text{ ms}^{-1})} = 6.3 \times 10^7 \text{ s} = 2 \text{ év}$. A kútban mért koncentráció értékei az alábbi ábrán láthatóak.



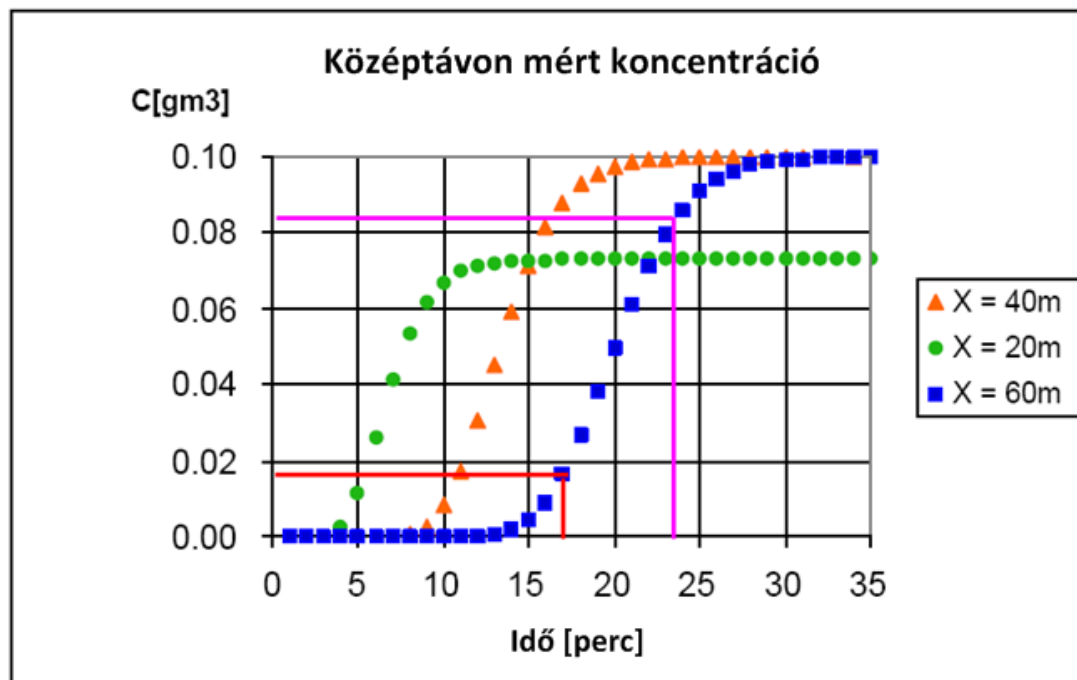
Végül, vegyük észre, hogy a molekuláris diffúzió miatt jelen van, elhanyagolható az oldalirányú és hosszirányú diszperzióhoz képest, tehát a transzport számításokba nem foglaljuk bele.

27.3.5. Megoldás

Ha a jelölőfolyadék jól elvegyül a csatornaterület fölött, akkor $Q_r = Q_i C_i / C_f = \dot{m} / C_f$, ahol \dot{m} a befecskendezett jelölőanyag sebessége és C_f az állandósult állapotot jelöli a koncentrációs mezőben. Amért koncentrációkból kiindulva és hogy $\dot{m} = 0.01 \text{ gs}^{-1}$,

X[m]	C _f [gm-3]	becsült Q _R [m ³ s ⁻¹]
20	0.075	0.13
40	0.1	0.10
60	0.1	0.10

A becsült áramlás az első állomáson magasabb, mint a két későbbi állomásnál. Először ez azt feltételezi, hogy az áramlást elvezetjük a csatornából 20 és 40 m távolságok között. Mivel az áramlás elvezetése nem változtatná meg a koncentrációt, ezért ez nem alkalmazható. Ehelyett azt gyanítjuk, hogy az $x = 20\text{m}$ tpontban a jelölőfolyadék nem vegyült el teljes mértékben a csatornában, így a mért koncentrációs adatok alacsonyabbak lesznek, mint az állandósult állapotban mért értékek. Ezt követően összefoglalhatjuk, hogy a csatornában lévő áramlás $0.1 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$. Megbecsüljük a Lagrange-féle középértéket u , a közép-távhoz való érkezés pillanatától. Az $x = L$ pontban a befecskendezésnél, a koncentráció értéke $0.5C_f$ ahol $t = L/u$. Felhasználjuk a 60-m-es távnál kapott adatokat, $C = 0.5C_f = 0.05 \text{ gm}^3$ a $t = 20$ perc időpontban. Tehát, $u = (60\text{m}) / (1200\text{s}) = 0.05 \text{ ms}^{-1}$. A közép keresztmetszeti terület $x = 0$ és $x = 60\text{-m}$ pontok között, $A = Q_R / u = 2\text{m}^2$.



A hosszirányú diszperziós együtthatót, K_x , a homlokzat alakjából becsüljük. Ahol $t_{0.16} = (L - \sigma_x)/u$, a koncentráció $0.16C_f$. Ahol $t_{0.84} = (L + \sigma_x)/u$, a koncentráció $0.84C_f$. Az $x = L = 60\text{m}$ koncentrációs értéket használva,

L[m]	u [m/s]	t_{0.16} [min]	$\sigma_{0.16} = L - ut_{0.16}$ [m]	t_{0.84} [min]	$\sigma_{0.84} = ut_{0.84} - L$ [m]
60	0.05	17	9	24	12

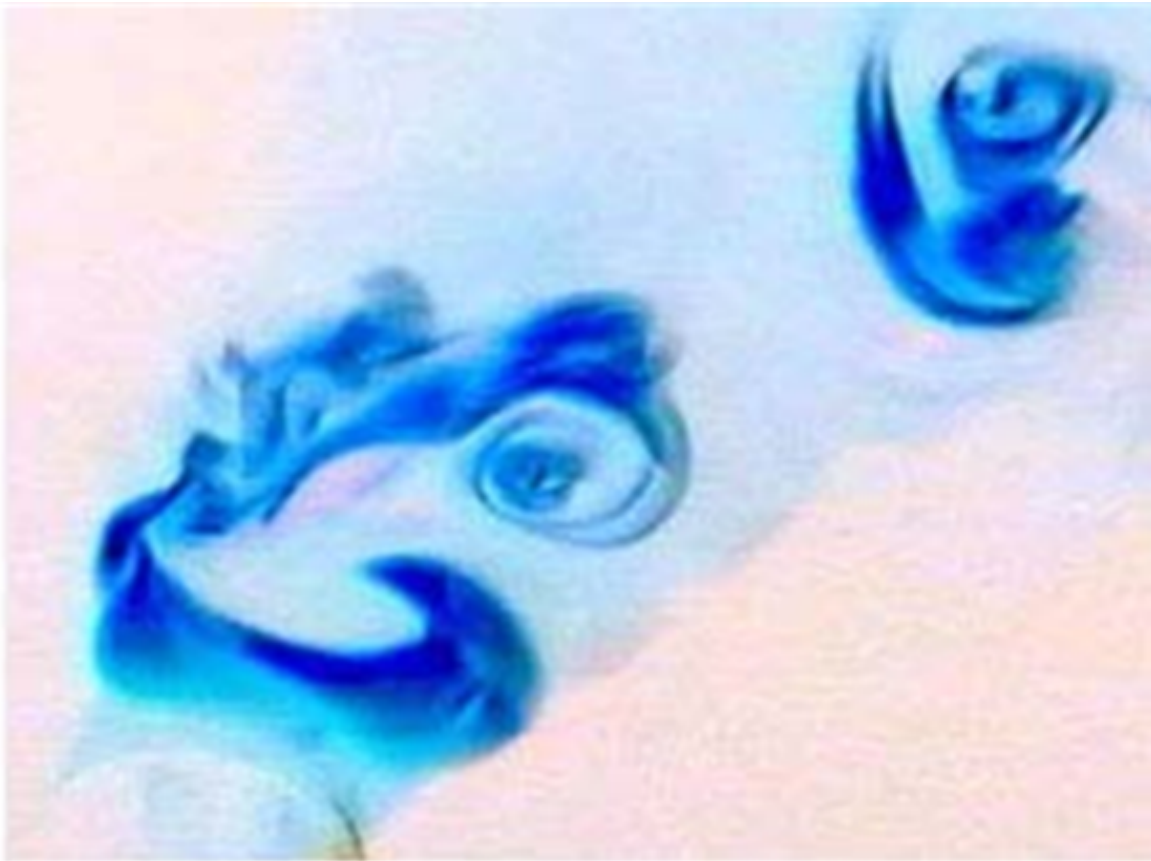
Feltételezzük, hogy $\sigma = 0$ a $t = 0$ pontban két becsült értékünk van K_x értékére

$$K_x = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma^2}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{0.84}^2}{t_{0.84}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(12 \text{ m})^2}{24 \text{ min}} \right) = 3.0 \text{ m}^2 \text{ min}^{-1}$$

$$K_x = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma^2}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{0.16}^2}{t_{0.16}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(9 \text{ m})^2}{17 \text{ min}} \right) = 2.4 \text{ m}^2 \text{ min}^{-1}$$

A kapott értékeket átlagoljuk, hogy legjobb becsült értéket kapjuk, $K_x = 2.7 \text{ m}^2 \text{ min}^{-1}$

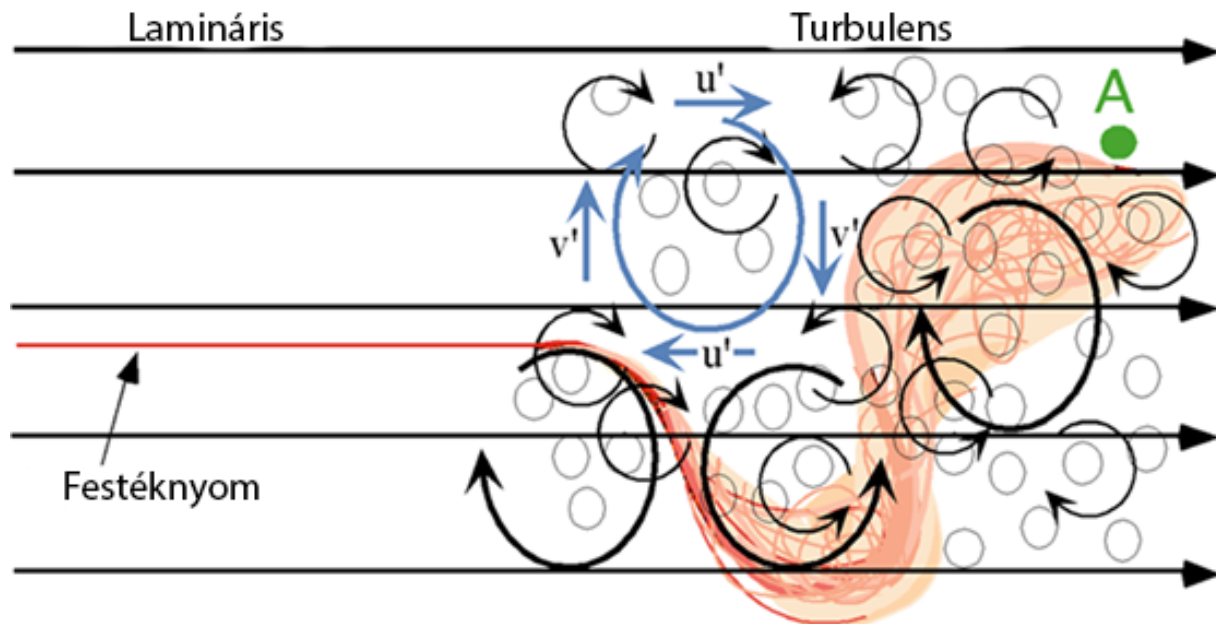
28. Sebességprofilok és turbulencia



A turbulencia mindenhol jelenlévő jelenség a környezeti folyadék mechanizmusokban, amely jelentősen befolyásolja az áramlat struktúráját és a keveredést. Éppen ezért nagyon fontos a turbulens áramlatok elméleti hátterének megértése és kvantitatív mérésük módozatainak megismerése. A következő fejezet a turbulencia eredetébe és statisztikai leírásába enged bepillantást, és megismertet a turbulens határréteg fogalmával is. Külön kitérünk majd a környezeti rendszerekben turbulencia hatására bekövetkező gyors keveredési folyamatokba is. A fejezet végén található gyakorlati feladatok segítségével felmérhetőek a turbulens határrétegek főbb sajátosságainak felmérésére irányuló képességek, és az, hogy az olvasó megfelelően meg tudja-e határozni a környezeti áramlásokban a turbulens diffúziós mértékét.

28.1. A turbulens áramlás alapjai

Adott áramlás lamináris vagy turbulens volta függ a folyadék sűrűségétől és az áramlási inerciától is. Az inerciális és viszkózus erők arányszámát a Reynolds-szám fejezi ki. Adott jellemző sebesség, U , és hossz, L , mellett a Reynolds-szám $Re = UL/\nu$ lesz, ahol ν a folyadék kinetikus viszkozitásának értéke. A felszíni vízrendszerek esetében a legtöbb esetben a meder hosszát értjük a rendszer hossza alatt. Mivel ez a hossz rendszerint nagyobb értékű (1 métertől több száz kilométeres hosszig terjed), a felszíni vizekre a legtöbb esetben a turbulencia a jellemző. Ezzel ellentétben a felszín alatti vizek általában pórusos jellegű áramlással mozognak, ahol a mozgási helyük kicsi ($< 1\text{mm}$), így a felszín alatti vizek mozgása többnyire lamináris jellegű.



252. ábra: Jelölőanyag mozgása lamináris és turbulens áramlás esetén. A feketével jelölt párhuzamos vízszintes egyenesek az áramlásvonalakat jelölik, melyek minden esetben párhuzamosak a főáramlással. Lamináris áramlás esetén a folyadékrezecskék pontosan az áramlásvonalakkal együtt haladnak, ezt látszik a lamináris mozgás régióban, ahol a színes vonalak a jelölőanyag mozgását jelzik. Turbulens áramlás esetén a főáramlás mellett számtalan különböző méretű örvény is kialakul. Amikor a jelölőanyag a turbulens mozgású folyadékba érkezik, mozgását egyaránt befolyásolja a főáramlás és az örvények is. A nagyobb örvények akár a fő áramlásvonalak között is mozgathatják a folyadékot. A kisebb örvények hatására a jelölőanyag kisebb mértékben kezd el kavarni, és az örvény körül fog szétterjedni (diffúzió).

A turbulencia jellemzése:

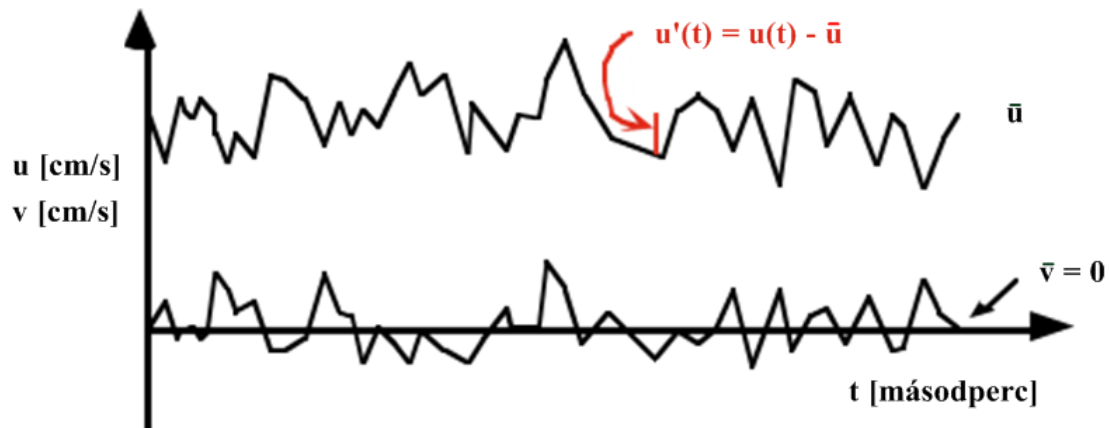
A turbulencia örvények sebesség-ingadozást okoznak az áramló folyadékban. Példaképpen, a **252. ábra** ábrázolt hosszanti (u) és vertikális (v) sebességet mérjük meg A pontban. ha az áramlás egyenletes és lamináris jellegű, t időpontban $u = \bar{u}$ and $v = \bar{v}$ lesz érvényben, ahol a vízszintes ékezet az időátlagot jelöli. A turbulens áramlás esetében azonban a sebesség értéke egyaránt rendelkezik középértékkel és egy turbulens komponenssel is. Az áramlat felbontása a következőképpen alakul:

$$(1) \quad u(t) = \bar{u} + u'(t)$$

$$v(t) = \bar{v} + v'(t)$$

átlag
turbulens fluktuáció

Ennek általános elnevezése a Reynolds-féle dekompozíció.



253. ábra: A mért sebesség értéke az előző ábra A pontjában.

Mivel az örvényekkel összefüggő turbulens mozgások relatíve véletlenszerűen történnek, jellemzőiket statisztikai megközelítéssel tudjuk meghatározni. Elméletileg a sebességérték folyamatos, és integrációval határozható meg a középértéke. A gyakorlatban azonban a mért sebességadatok diszkrét pontok, u_i . Az alábbi képletekben a felső vonal jelöli a t és $t+T$ időintervallum átlagát, ahol T jóval hosszabb, mint bármely turbulencia ideje, de sokkal rövidebb, mint a főáramlat ingadozásainak ideje, mint pl. a hullámok vagy az árapály jellegű ingadozások.,

Átlagsebesség:

$$(2) \quad \bar{u} = \int_t^{t+T} u(t) dt = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i$$

folyamatos rögzítés diszkrét, egyenlő osztású részek

Turbulencia ingadozás:

$$(3) \quad u'(t) = u(t) - \bar{u} \quad : \text{folyamatos rögzítés}$$

$$u'_i = u_i - \bar{u} \quad : \text{diszkrét pontok}$$

Turbulencia erőssége:

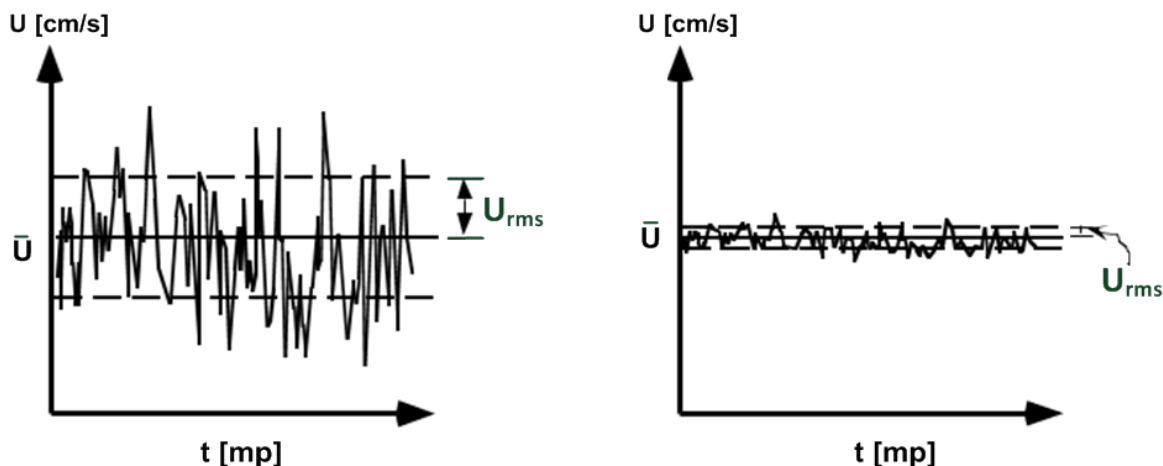
$$(4) \quad u_{rms} = \sqrt{\overline{u'^{(t)^2}}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u'_i)^2}$$

folyamatos rögzítés diszkrét, egyenlő osztású részek

Turbulencia intenzitása:

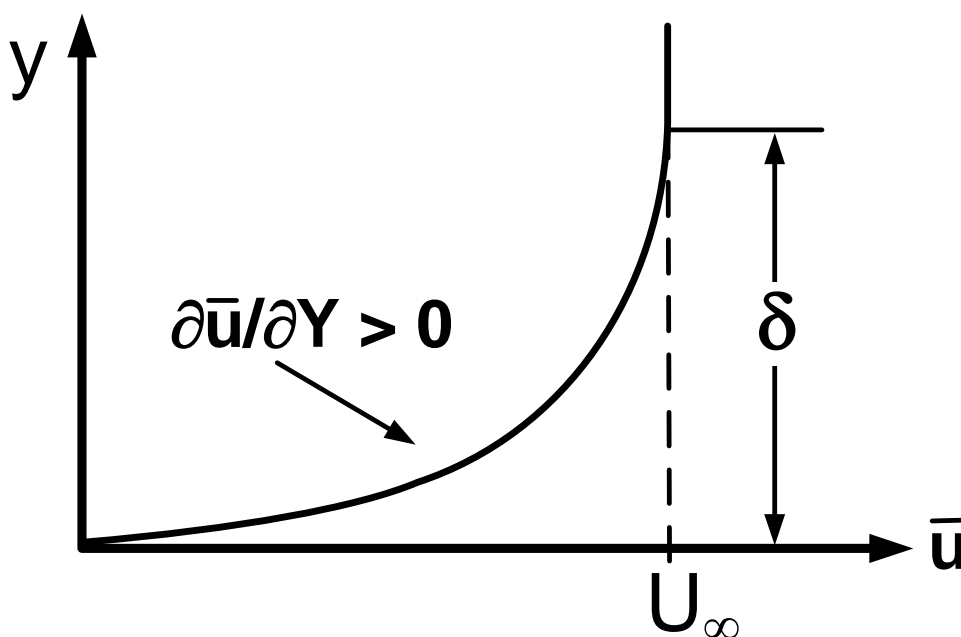
$$(5) \quad u_{rms}/\bar{u}$$

Az "rms" rövidítés a görbe gyökének átlagos négyzetét (root-mean-square) jelöli. A (4) egyenletben definiált u_{rms} a "véletlenszerű" sebesség fluktuációk, u'_i standard deviációja. Hasonló definíciók vonatkoznak a laterális és vertikális sebességekre is ($v(t)$ és $w(t)$). A nagyobb u_{rms} nagyobb mértékű turbulenciát jelez. Az alábbi ábrán mindkét érték azonos átlagsebességgel rendelkezik, de a bal oldali esetben magasabb a turbulencia mértéke.



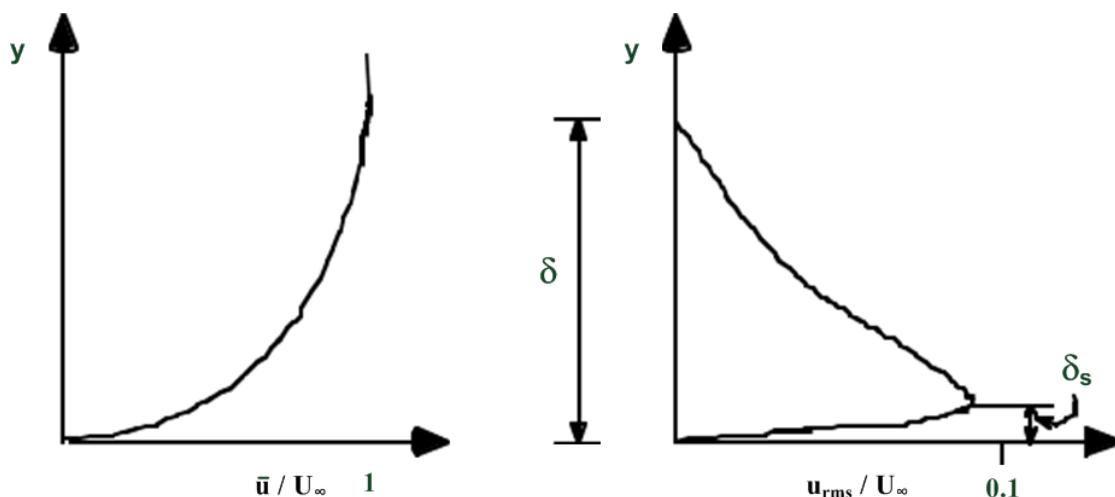
Átlagsebesség profilok – turbulencia határrétegek.

Az áramlás és egy szilárd réteg határán jól elkülöníthető az ún. határréteg. A határréteg fontossága abban rejlik, hogy a folyadék sebessége a határon eléri a zéró értéket. Ez az úgynevezett “csúszásmentes” állapot, azaz a folyadék sebessége megegyezik a határ sebességével. A jelenség a viszkozitás, ν , fogalmával magyarázható, ami nem más, mint a folyadék ellenállása a folyás ellen, azaz az ún. folyadéksúrlódás. A folyadék szó szerint hozzátapad a határhoz. Minél magasabb a viszkozitás mértéke, annál kevésbé fog folyni az adott folyadék. A méznek például jóval magasabb a viszkozitása a víznél. A víz kinematikus viszkozitása $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$. A lenti ábra egy tipikus átlagsebesség profilt ábrázol, $u(y)$, egy szilárd határ fölött. A függőleges (y) tengely a határ fölötti távolságot mutatja. A határnál a folyadék sebessége zéró értékű ($y=0$). A határ fölött egy bizonyos távolságra a sebesség állandó értéket fog elérni, U_∞ , amit a szabad áramlás sebességének nevezünk. A meder és a szabad áramlás között a sebesség változását a függőleges koordinátán jelezzük. A sebesség térbeli variánsát nevezzük *nyírásnak*. A sebességnyírás határ közei tartományát nevezzük pillanatnyi határrétegnek. A határréteg magasságát, δ , tipikusan a medertől való távolsága határozza meg, ahol $u = 0.99 U_\infty$.

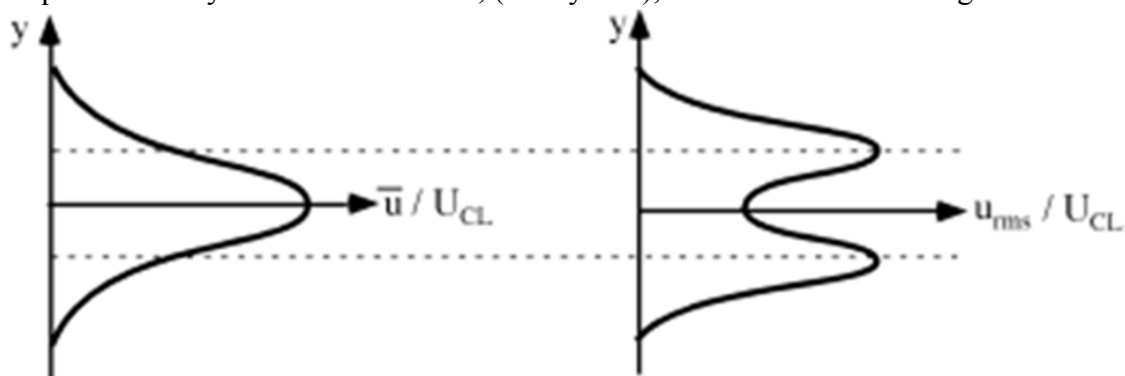


Nyírás és turbulencia.

A turbulencia tulajdonképpen egy nyírás által létrehozott instabil állapot. Minél erősebb a nyírás, annál erősebb lesz a turbulencia is. Ez világosan látható az (u_{rms}) erősségű turbulencia profilok határrétegeiben (ld. a következő ábrán). A határréteg nyírása a medertől távolodva csökkenést mutat, $\partial(\bar{u} / \partial y) / \partial y < 0$, és ennek következtében a turbulencia intenzitása is csökkenni fog. A meder közvetlen közelében a turbulencia ugyanakkor lényegesen lecsökken, és a fenéken eléri a zéró értéket ($y=0$). Ennek oka, hogy a csúszásmentes feltételek ugyanúgy hatnak a turbulencia sebességére, mint az átlagsebességre. Ebből kifolyólag a meder közelében lévő vékony rétegben nem tapasztalható turbulencia. Ezt a vékony réteget nevezzük *lamináris alaprétegnek* δ_s . Fontos megjegyezni, hogy az ábrán szereplő profilokat a szabad áramlás sebessége, U_∞ normalizálja. Erre azért van szükség, hogy ezzel is hangsúlyozzuk, hogy az adott határrétegben az átlag- és turbulencia sebességek *önmagukhoz hasonlóak*, a szabad áramlás sebességének, U_∞ függvényében. Ez azt jelenti, hogy mindkét profil azonos alakú, függetlenül az externális áramlás abszolút magnitúdójától, U_∞ -tól. Ennek az ön hasonlóságnak köszönhetően általában úgy tartjuk, hogy a turbulencia szintje együtt növekszik a szabad áramlás sebességével, $u_{rms} \sim U_\infty$, ahol a \sim jelölés az együtt változásra utal. Ráadásul, a turbulencia szintjének növekedésével párhuzamosan a lamináris alapréteg vastagsága csökkenni fog. Általában tehát: $\delta_s \sim (1/U_\infty)$.



A második példában az átlagos és turbulencia sebességet egy csőben vizsgáljuk. A profilok ön hasonlók, amint normalizálja őket a középvonali sebesség, (centerline velocity) U_{CL} . A legmagasabb turbulencia szint maximum nyíráspozíciókban lesz tapasztalható. A középvonalon a nyírás zéró értékű lesz, ($\partial u / \partial y = 0$), és a turbulencia erőssége lecsökken.



Súrlódási (nyírás) sebesség, U_* :

Közismert tény, hogy a turbulencia mértéke arányos a nyírással, $u_{rms} \sim \partial u / \partial y$. Ez az arányosság azonban a dimenzióktól függően változhat, így szükség van a nyírási sebesség fogalmának bevezetésére és ennek mérésére is. Ez a sebesség mértékegység, u_* , a nyírási sebesség, vagy más néven súrlódási sebesség, ami a határoknál tapasztalható nyírást jellemzi. Az u_* definíciója a meder nyomásán, τ_{bed} , alapul, azaz:

$$(6) \quad \tau_{bed} = \rho u_*^2$$

ahol τ_{bed} meghatározásának alapja a nyomás-terhelés viszony,

$$(7) \quad \tau_{bed} = \rho v \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Ezért,

$$(8) \quad u_* = \sqrt{\tau / \rho} = \sqrt{v (\partial \bar{u} / \partial y) |_{y=0}}$$

Az átlagebesség meghatározza a turbulencia erejét és a lamináris alréteg vastagságát.

$$(9) \quad r_{rms} \sim u_*$$

$$(10) \quad \delta_s = 5 v / u_*$$

Turbulens sebességprofil: A logaritmikus sebesség profil:

A sebességprofil alakulása turbulens határreteken belül elméletben is kísérletben is megbízhatóan igazolt. A profil különböző jelleget mutat a meder közelében, ahol a pillanatnyi függőleges transzportot a viszkozitás határozza meg, és másmilyen a medertől távolabb, ahol a függőleges transzportot a turbulencia határozza meg. A határhoz legközelebb eső terület Lamináris Alrétegnek nevezzük, mivel ebben a régióban a turbulenciát elnyomja a viszkozitás. A sebességprofil tehát ezen a részen a nyomás-reláció határozza meg, a (7) egyenletben leírtak szerint. A (6) egyenletben megadott definíciót behelyettesítjük a (7) egyenletbe, és a sebességprofil megoldásához a $\partial u / \partial y \approx u / y$ közelítést alkalmazzuk.

Lamináris Alréteg [$y < \delta_s = 5 v / u_*$]:

$$(11) \quad \bar{u}(y) = u_*^2 y / v$$

A Lamináris Alréteg, ($y > \delta_s$), felett a sebességprofil logaritmusosan alakul. A profil alakja egyaránt függ a meder nyomástól (u_* -n keresztül), és a meder textúrájától, melyet az egyenetlenség mértéke fejez ki, y_0 .

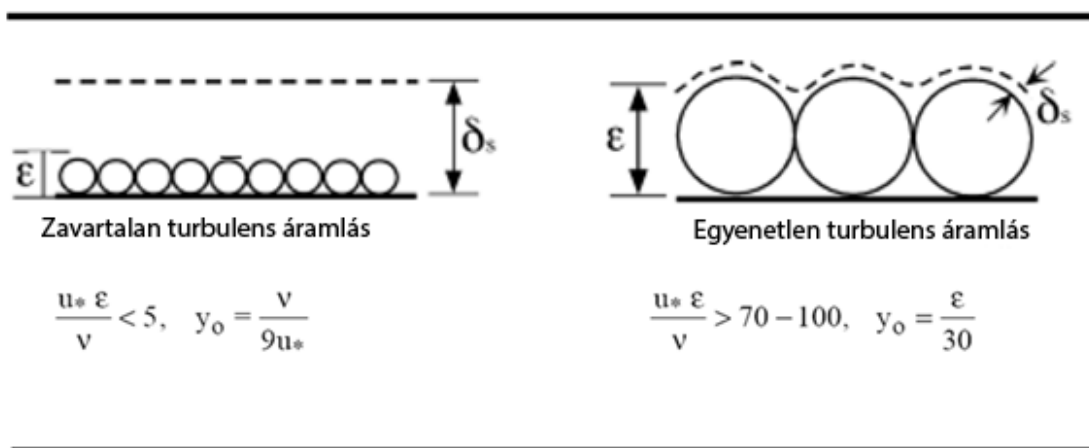
Logaritmusos réteg [$y > \delta_s$]:

$$(12) \quad \bar{u}(y) = \frac{2.3 u_*}{\kappa} \log_{10}(y / y_0)$$

$\kappa = 0.4$ a von Karman állandó, empirikus állandó

Nikuradse a határreteg textúrájának sebességprofilra gyakorolt hatását vizsgálta. Azonos méretű homokszemcséket ragasztott ε átmérőjű cső alá, és különböző áramlási sebessége esetében vizsgálta a sebességprofileket. Két különböző viselkedésmintát tapasztalt, melyet az egyenetlenségre vonatkozó Reynolds-szám fejez ki, $\varepsilon u_* / v$. Ha pl. $\varepsilon u_* / v < 5$, $y_0 = v / 9 u_*$, a

jellemző egyenetlenség NEM függvénye a valós egyenetlenség mértékének, azaz egyszerűen mondva, a sebességprofil logaritmikus része ezen feltételek mellett független a felszín egyenetlenségének mértékétől. Ennek megértéshez fel kell idéznünk a (10) egyenletben taglaltakat, a lamináris alréteggel kapcsolatban: $\delta_s = 5 \nu / u_*$. Nikuradse tehát azt az egyszerű ténnyt fedezte fel, hogy ha a felület textúrája vékonyabb, mint a lamináris alréteg ($\epsilon < 5 \nu / u_*$), akkor a lamináris alréteg fölött áramlás nem fogja érzékelni a felület textúráját. Ezt a jelenséget nevezzük Zavartalan Turbulens Áramlásnak. Ha az egyenetlenség mértéke nagyobb lesz, mint a lamináris alréteg vastagsága, különösen ha $\epsilon > (70 \text{ és } 100 \text{ között}) \nu / u_* = 14 \text{ és } 20 \delta_s$ között, a lamináris alréteg feletti áramlásra hatással lesz a felület egyenetlensége. Ezen feltételek mellett $y_0 = \epsilon / 30$, azaz a jellemző egyenetlenség függvénye lesz a valós egyenetlenségnek, és a logaritmikus profilt megváltoztatja a felszín textúrája. Ilyenkor beszélünk Egyetlen Turbulens Áramlásról

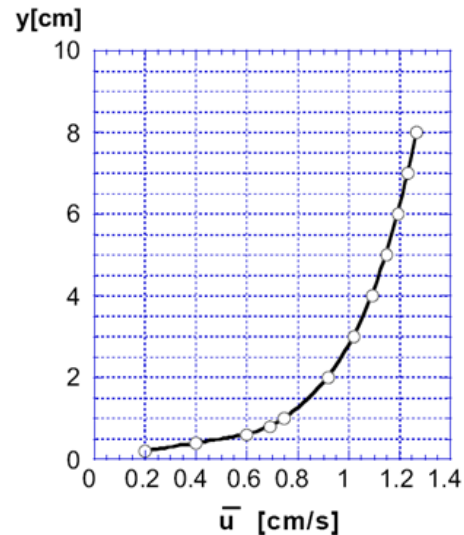
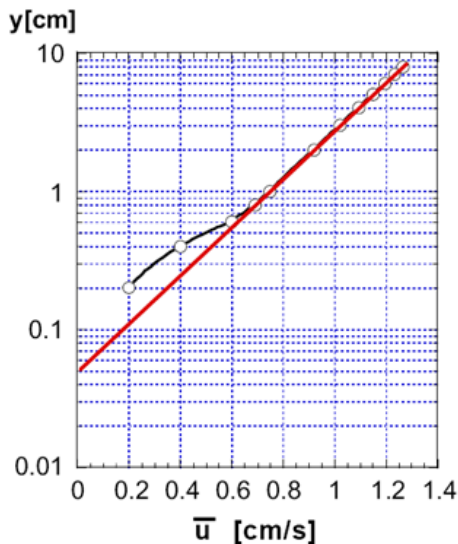


A logaritmikus profil alkalmazása.

Az átlagsebesség profil egy példájának két formáját szemléltetjük a következő oldalon, logaritmikus és lineáris tengelyekkel. A lineáris tengelyek egy ismerősebb határreteg profilt szemléltetnek. A profil logaritmikus része lineárisnak tűnik a logaritmikus tengelyeken. A profil logaritmikus résznek alkalmazásával megbecsülhető a jellemző egyenetlenség, y_0 , és a súrlódási sebesség, u_* . A piros vonal a sebességprofil log lineáris alkalmazása. A mederfenékhez legközelebb eső két pontot elhanyagoljuk, mivel ezek nem követik azt a log lineáris trendet, mint a profil többi része, és feltételezzük (majd később ellenőrizzük is), hogy ezek a lamináris alrétegben helyezkednek el. A (12) egyenlet piros görbéjének lejtése alapján megbecsülhető az u_* . Ez esetben kiválasztjuk a piros vonal két pontját, $y_1 = 6 \text{ cm}$ and $y_2 = 0.05 \text{ cm}$, ahol a sebesség $u_1 = 1.2 \text{ cm}^{-1}$ and $u_2 = 0 \text{ cm}^{-1}$ lesz. Ezután,

$$u_* = \frac{\kappa}{2.3} \frac{u_2 - u_1}{\log_{10}(y_1) - \log_{10}(y_2)} = \frac{\kappa}{2.3} \frac{1.2 - 0 \text{ cm/s}}{\log_{10}(6/0.05)} = 0.1 \text{ cm/s}$$

A jellemző egyenetlenség, y_0 , a piros vonal y-ordinátatengelyének metszete lesz. Ez, a (12) egyenlet alapján, $u = 0$ ha $y = y_0$. A függvény alapján, $y_0 = 0.05 \text{ cm}$. Mivel $y_0 > \nu / 9u_* = 0.01$, az áramlás nem Zavartalan Turbulens Áramlás lesz. A (10) egyenlet alapján a lamináris alréteg vastagsága $0,5 \text{ cm}$. Ez megerősíti előző feltételezésünket, hogy a határhoz legközelebb eső két pont a lamináris alrétegben található. Végül, ha feltételezzük, hogy az áramlás teljes mértékben egyetlen turbulens áramlás, $\epsilon = 30 y_0 = 1.5 \text{ cm}$. Ekkor az egyenetlenségre jellemző Reynolds-szám: $\epsilon u_* / \nu = 15$. Mivel $\epsilon u_* / \nu < 70$, arra következtethetünk, hogy az áramlás nem egyetlen turbulens áramlás lesz, hanem átmenet a zavartalan és egyetlen turbulencia között.



Turbulens Transzport a Tömegmegmaradás Egyenletben.

A turbulencia jelenléte koncentrációingadozást okoz. Ahogyan a sebesség esetében is tettük az előzőekben (ld. 1. egyenlet), a koncentrációt időbeli átlagra és az ehhez tartozó turbulencia ingadozásokra bontjuk. Mint az előzőekben is, a vízszintes ékezet a T időben

$$(13) \quad C(t) = \bar{C} + C'(t)$$

Az egyszerűség kedvéért a tömegmegmaradás-egyenlet (transzportegyenlet) egydimenziós modelljével kezdjük a számítást,

$$(14) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial (uC)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial C}{\partial x}$$

melybe behelyettesítjük a sebesség és koncentráció szétválasztott értékeit.

$$(15) \quad \frac{\partial (\bar{C} + C')}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u} + u')(\bar{C} + C')}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial (\bar{C} + C')}{\partial x}$$

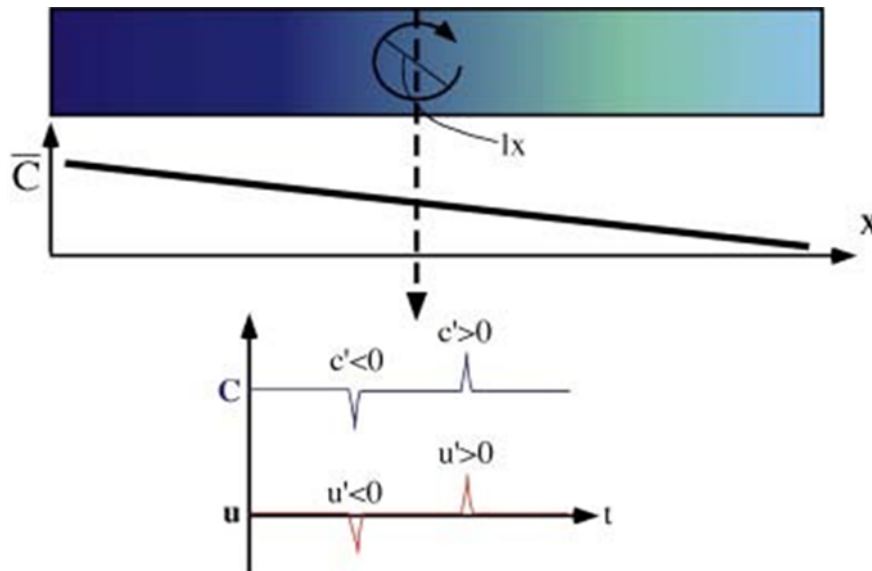
Ezután időbeli átlagot vonunk mindkét tagból. Definíció szerint $\overline{a'} = 0$, és $\overline{\bar{a}} = \bar{a}$.
Then (15) becomes,

$$(16) \quad \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{C} + \overline{u'C'})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}$$

Az $\overline{u'C'}$ a turbulens advekciónál okozott nettó tömegáramlást jelöli. Ha kiszámolható lenne a teljes turbulencia mező, abból ki lehetne kalkulálni a turbulencia fluxust, és a (16) egyenlet megoldását. Sajnos azonban ez a számítás túlságosan összetett, túl sok számolást követel, és a legtöbb áramlás esetében túlságosan korlátozó jellegű is. Ehelyett azonban lehetőség van arra, hogy az átlagsebesség és a koncentráció segítségével felállítsuk a turbulens fluxus modelljét, ami lényegesen egyszerűbb feladat. A (16) egyenlet ezáltal is megoldhatóvá válik. Az alábbiakban bemutatásra kerül egy keveredési hossz alapján felállított modell, melynek alapfeltételezése, hogy a turbulens mozgások jellemezhetőek az örvények hosszanti értékével.

A turbulens fluxus keveredési hossz modellje

Az ábrán egy hosszú, keskeny cső látható, melynek lineáris koncentráció gradiense $\partial \bar{c} / \partial x < 0$. A csőben nincs jelen középérték, $\bar{u} = 0$. Vizsgáljuk meg, milyen transzport folyamatot hoz létre a csőben egyetlen, l_x hosszal rendelkező örvény. Az örvény tetején $u' > 0$, és a z örvény a folyadékot a magasabb koncentráció felé fogja sodorni, olyannyira, hogy a szaggatott vonalnál végzett próbamérés során adott pillanatban a helyi átlagkoncentráción is magasabb koncentráció értéket mérhetnénk, amikor az örvény épp ott tartózkodik. Ez a szaggatott vonalnál $C' > 0$, ahol $u' > 0$. Hasonlóképpen, az örvény esetében ahol $u' < 0$, ott $C' < 0$.



A koncentrációingadozás nagyságának mérésének módja $|C'| \sim l_x \partial \bar{c} / \partial x$. A koncentráció ingadozás előjele függ egyrészt a koncentráció gradiens jelétől, másrészt a sebesség ingadozás előjelétől. Ismét a fenti képet vesszük alapul, ahol $\partial C / \partial x$ negatív előjelű. Az örvény azon része, ahol u' pozitív, C' is pozitív lesz. A pozitív gradiens környékén, $\partial C / \partial x > 0$, pozitív u' negatív C' értéket eredményez, míg negatív u' eredménye pozitív C' lesz. Általánosságban, ha $\partial C / \partial x$ és u' azonos előjelűek $C' < 0$, és $\partial C / \partial x$ ellentétes előjelűek, $C' > 0$. Ezért, C' előjele negatív előjel ($u' \partial C / \partial x$). Ha ezt a definíciót alkalmazzuk C' előjelölésére, felírhatjuk az izolált sebesség ingadozás, u' által generált turbulencia advekción.

$$u' C' = -u' l_x \partial \bar{C} / \partial x$$

A turbulencia rendszerben jelen lévő nagyszámú örvény által okozott véletlenszerű ingadozásokból átlagot vonva felírhatjuk:

$$(17) \quad \overline{u' C'} \sim u' C' = -u' l_x \partial \bar{C} / \partial x$$

A relációból kiderül, hogy a turbulens fluxus Fick-i diffúzióként viselkedik. A fluxus arányos a koncentráció gradiens középértékével. Ennek analógiájára meghatározható a turbulencia diffúziós együtthatója, a turbulencia diffuzitás,

$$(18) \quad D_{t,x} \sim u' l_x$$

A turbulens fluxus modellje felírható egy újabb diffúziós tagként,

$$(19) \quad \overline{u' C'} = -D_{t,x} \partial \bar{C} / \partial x$$

Egyszerűen szólva, a modell azt mutatja, hogy a turbulens fluxus függ a turbulencia erősségétől (u') és a turbulencia méretétől (l_x). Az előzőek alapján tudjuk, hogy a turbulencia erősségét a súrlódási sebesség, azaz $u' \sim u_*$ határozza meg. Egy turbulens áramlatban valójában több hosszanti turbulencia van jelen egyszerre, ezért, hogy alkalmazni tudjuk a (18) egyenletet, ki kell választanunk a turbulens fluxus szempontjából legfontosabbat. Általában ez a leghosszabb elem lesz, hiszen a (18) egyenlet azt mutatja, hogy a tényleges diffúziós az örvény méretével együtt növekszik. Ezért a turbulens transzport domináns hossza a tartomány geometriai szerkezetétől függ, ami meghatározza, hogy a tartományban mekkora a legnagyobb hosszúság. Visszatérve a (16) egyenlethez, és behelyettesítve a (19) turbulens korrelációt, az eredmény

$$(20) \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{c})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (D_x + D_{t,x}) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy a turbulencia transzportegyenletre gyakorolt hatását a legegyszerűbben úgy modellezhetjük, ha a diffúziós együtthatót a turbulencia erőssége és intenzitása által diktált együtthatóval növeljük. A turbulens diffúziós, $D_{t,x}$ általában annyal nagyobb a molekuláris diffúziósnál, hogy az utóbbit egyszerűen el is hanyagolhatjuk. Ezután a transzportegyenlet korábban már megállapított, megoldásai alkalmazhatóak lesznek a turbulens áramlás esetében is, olya módon, hogy a molekuláris diffúziót a turbulens diffúzióval helyettesítjük.

$$(21) \quad \begin{aligned} D_{t,y} &\sim v' l_y \\ D_{t,z} &\sim w' l_z \end{aligned}$$

Mivel a turbulencia gyakran hosszában ($l_x \neq l_y \neq l_z$) és intenzitásában ($u' \neq v' \neq w'$) is anizotropikus jelleget mutat, azt várjuk, hogy a turbulens diffúziós is anizotropikus lesz,

$$(D_{t,x} \neq D_{t,y} \neq D_{t,z})$$

Turbulens diffúziós csatornában.

Egy csatornában a turbulencia meghatározható a medernél mért súrlódási sebesség, u_* , és a jellemző hossz segítségével. A hosszérték kiválasztásánál a legegyszerűbb választás az áramlás mélysége, h . Ezzel, a (18) egyenletből kiindulva a turbulens diffúziós a folyóban a következőképpen alakul: $D_t \sim u_* h$. A mérés állandóját jelölőanyagokkal folytatott tanulmányok alapján lehet megállapítani. Az alábbi táblázat több tanulmány eredményeképp kapott együtthatók sorát tartalmazza.

Turbulens diffúziós csatornában
(x,y,z)=(áramlás irányában, laterális, vertikális)
$D_{t,x} = (0.3-0.45) u_* h$
0.45 $u_* h$ egyenes csatorna
$D_{t,y} = 0.6 u_* h$ enyhén kanyarodó
0.45 $u_* h$ meredeken kanyarodó
$D_{t,z} = 1/15 u_* h$

Az együtthatók gyakorlati tapasztalat alapján lettek megállapítva, $D_{t,z}$ kivételével, amely elméleti modellen alapul.

A legtöbb csatorna méretaránya $l_x \gg l_y > l_z$, ezért a (18) és (21) egyenletből arra következtethetünk, hogy $D_x > D_y > D_z$. Egyenes csatornák esetében valóban ez a helyzet. A kanyarodó vagy hajlatokkal rendelkező csatornáknál azonban másodlagos cirkulációk (laterális áramlatok) is keletkeznek, melyek erősítik a vízszintes irányú keveredést. Élesebb hajlatok esetén a hatás akár olyan erős is lehet, hogy $D_{t,y} \gg D_{t,x}$ lehet.

Típusos értékek: $D_{t,x}=10 - 8000 \text{ cm}^2/\text{s}$, $D_{t,y}=10 - 10000 \text{ cm}^2/\text{s}$, $D_{t,z}=1 - 3000 \text{ cm}^2/\text{s}$.

A fenti táblázat alapján megállapíthatjuk, hogy egy folyó diffúziójának megbecsüléséhez szükség van a meder mélységének és a súrlódási sebességének adataira. A súrlódási sebesség megbecsüléséhez szükséges részletes sebességprofilok azonban nehezen mérhetőek pontosan, ezért egy sokkal egyszerűbb módszert szokás alkalmazni.

Tételezzünk fel egyenletes áramlást egy széles, b szélességű csatornában, melynek mélysége $h \ll b$, és melyben a meder lejtése, $S = \sin \theta$, ahol θ a vízszinthez képest megállapított szög. A pillanatnyi egyensúly a folyadék súlyának áramlás közben a fenékre gyakorolt nyomásából adódik. tegyük fel, hogy a csatorna hossza dx . Mivel széles csatornáról van szó, a csatorna falánál jelenlévő nyomás elhanyagolható.

$$(22) \quad \rho g dx h b S - \tau_{bed} dx b = 0$$

A súrlódási sebesség definícióját használva, $\tau_{bed} = \rho u_*^2$, a (21) egyenlet megadja u_* értékét.

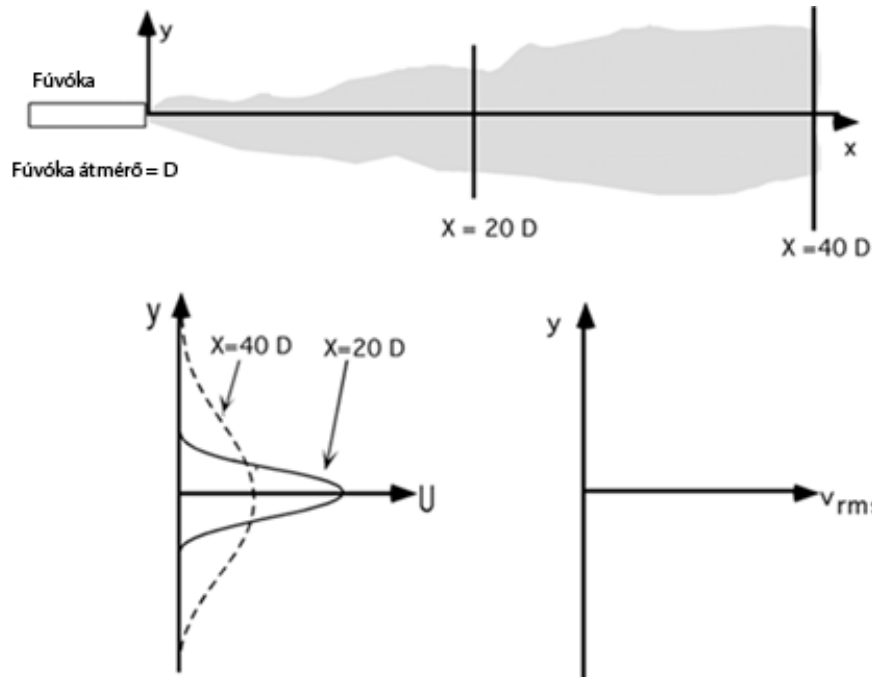
$$(23) \quad u_* = \sqrt{ghS}$$

28.2. Feladatsor

28.2.1. Feladat

Egy lefelé irányuló áramlat D átmérőjű csőbe torkollik. Az áramlat két pontján mérjük a sebesség profilokat. A mérés helyei: $X=20 D$ és $40 D$.

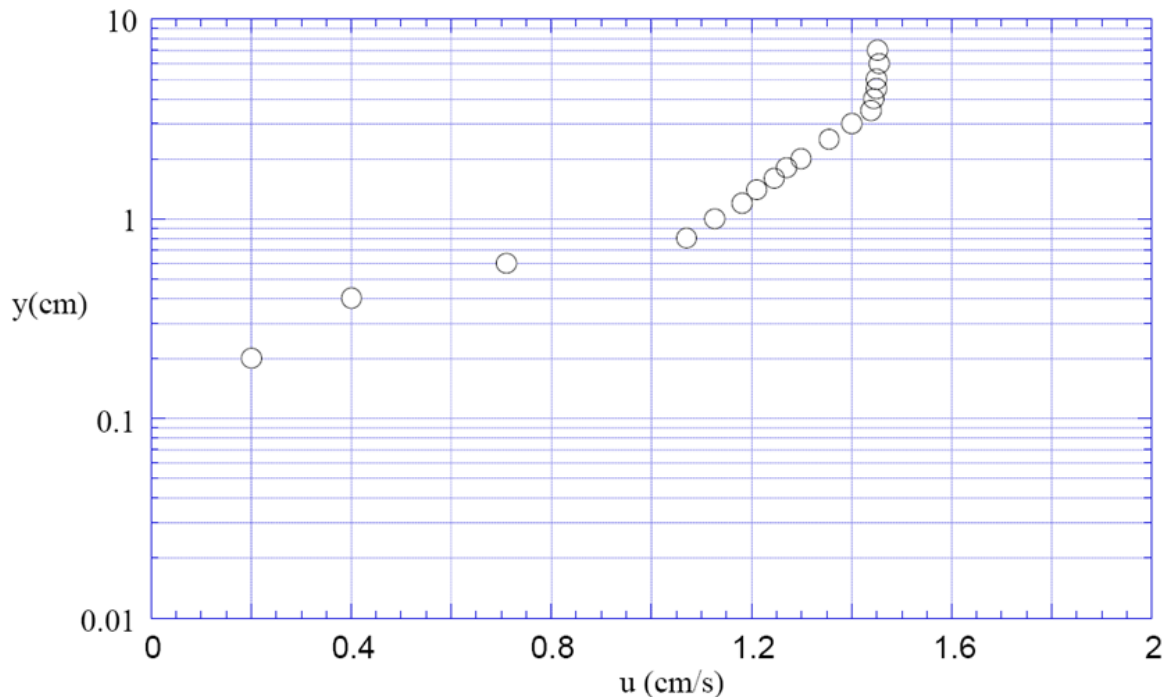
1. Vázolja fel a profilokat, $v_{rms}(y)$, mindkét vizsgálati ponton. Indokolja válaszát.
2. Mekkora hosszúságú örvények dominálják az áramlatban a keveredést?
Váolja fel az adott hosszúsági skálát és a hozzá tartozó örvényt.



28.2.2. Feladat

Az alábbi ábrán látható sebességprofil egy homokos meder fölött lett mérve, ahol a homokszemcsék átlagos átmérője $d=1$ mm volt. Az ábra alapján válaszolja meg az alábbi kérdéseket:

- a. A profil logaritmikus szakaszának segítségével állapítsa meg a súrlódási sebesség, u_* , mértékét.
- b. Az a) válasz alapján mekkora a fenék nyomás, τ_w ?
- c. Mekkora lamináris alréteg vastagsága?
- d. A lamináris alrétegben mért sebesség segítségével becsülje meg a fenéknyomást.
- e. Az áramlás jellege zavartalan turbulens vagy egyenetlen turbulens?
- f. Képzeld el, hogy az áramlatba két helyen jelölőanyagot eresztünk. A bebocsátási pontok: $y=3$ mm és $y=3$ cm. Váolja fel a jelölőanyag által húzott festékvonalat és írja le a két pontban észlelhető különbségeket.

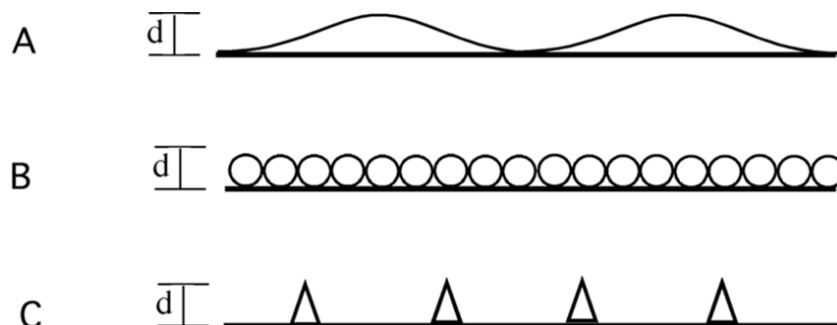


28.2.3. Feladat

Nikuradse egyenlő méretű, ϵ átmérőjű homokszemcséket használt a felületi textúra sebességprofilokra gyakorolt hatásának vizsgálatokor. kísérletei alapján az ϵ , hosszúság, azaz a ma ekvivalens homokszemcse átmérőnek nevezett érték lett bármely formájú egyenetlenség leírásának alapegysége. "Egyenlőség" alatt ugyanakkora mértékű zavar okozását értjük.

Az ekvivalens egyenetlenség becsült értéke a sebességprofil méréséből adódik, melyet egy logaritmikus profilhoz illesztve meghatározzuk y_0 értékét. Ha az áramlat egyenetlen turbulens jellegű, $y_0 = \epsilon/30$. Ez azt jelzi, hogy az egyenetlenség ugyanolyan mértékben zavarja az áramlást, mint az egyformán $30 y_0$ átmérőjű homokszemcsék tennék.

Figyelje meg a lent felsorolt egyenetlenségeket. Bár az alakzatok ugyanolyan méretűek, d , nem feltétlenül fognak ugyanakkora zavart okozni az áramlásban, azaz nem feltétlenül okoznak egyforma mértékű y_0 értéket. Vizsgáljon meg két esetet: $d \ll \delta_s$, and $d \gg \delta_s$, és rangsorolja a három alakzatot a legmagasabb y_0 értéktől az alacsonyabb felé haladva.

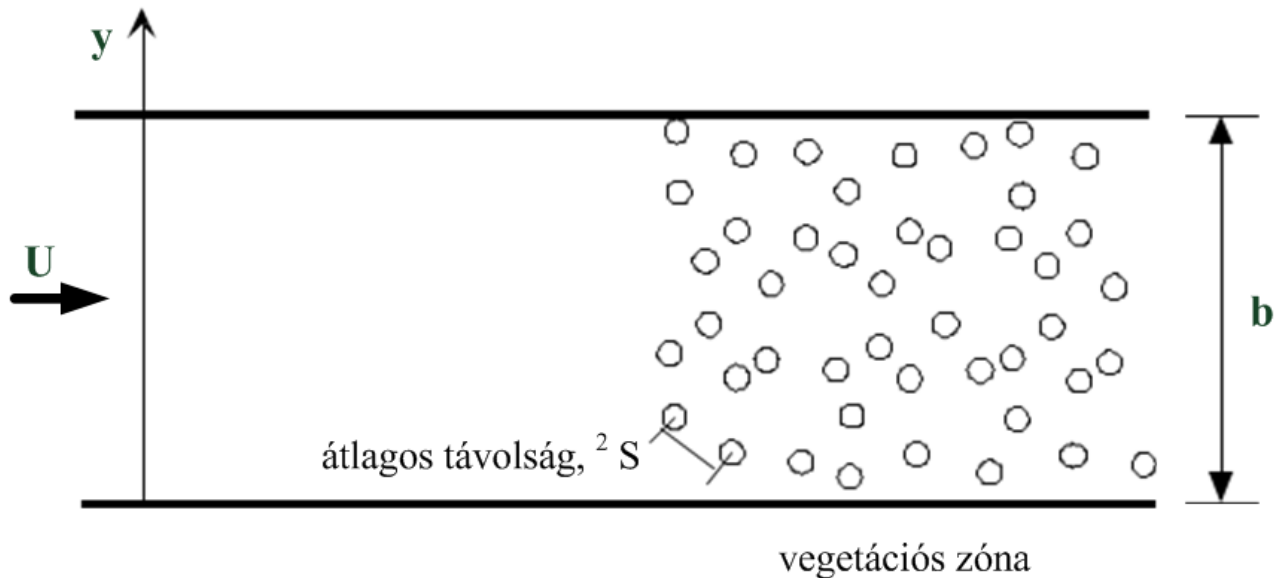


28.2.4. Feladat

Az alábbi ábrán egy b szélességű csatorna látható. A csatorna keresztmetszete állandó, ezért a sebesség, U , is állandó lesz a csatorna teljes hosszán. A csatorna egy része növényzettel borított.

A növények azonos alakúak, és a fenékről kiindulva a víz felszíne fölé érnek. A száruk átlagos átmérője d , a növények közti átlagos távolság pedig ΔS . A $D_{t,y} \sim v' l_y$ modell alapján határozza meg a laterális diffuzitást.

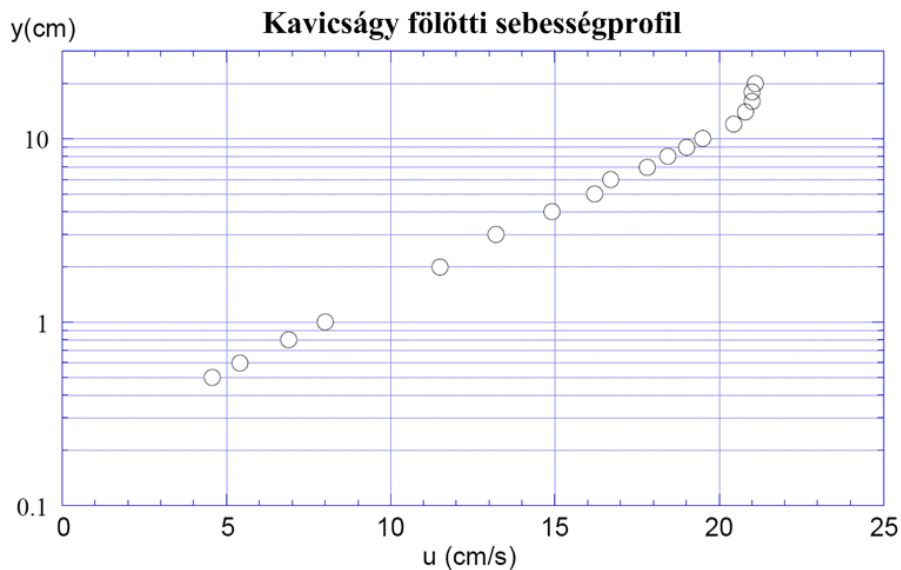
- Hogyan változik a laterális diffuzitás, ahogy az áramlat a növényzettel rendelkező zónába ér?
- Hasonlítsa össze a vegetáció zóna diffuzitását $Ud/v = 1$ versus $Ud/v = 1000$ esetében.
- Feltételezve, hogy az áramlás nem körülhatárolt, de a vegetációval rendelkező zóna laterális kiterjedése változatlan marad, hogyan változik a turbulencia mértéke, turbulencia intenzitása és a diffuzitás a vegetációval rendelkező és nem rendelkező zónákban?



28.2.5. Feladat

Az alábbi sebességprofil egy kavicságy fölött haladó áramlatban került mérésre, ahol a kavicsok átlagos átmérője 1 cm volt.

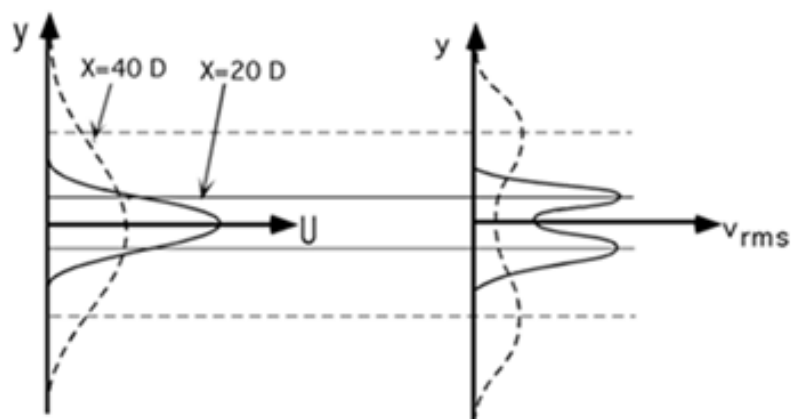
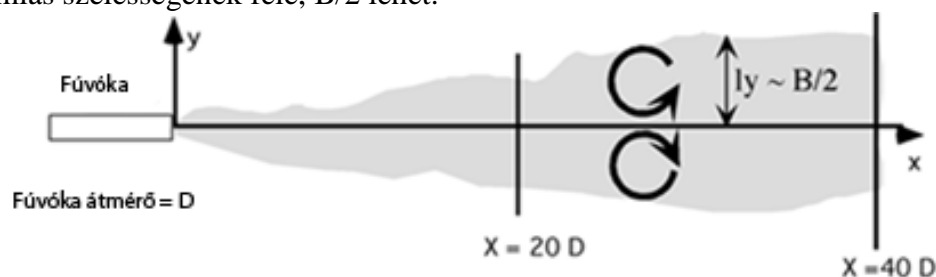
- Határozza meg a súrlódási sebességet, u_* .
- Mekkora a lamináris alréteg vastagsága?
- Hozzájárul-e a kavicsok egyenetlensége a mederágy ellenálláshoz?
- Mekkora átmérőjű homokszemcsék okoznának azonos mértékű áramlási ellenállást?



28.3. Megoldások

28.3.1. Megoldás

1. A v_{rms} profilok vázlata a lenti ábrán látható. A vastag vonal mutatja $x=20D$ értékét, $x=40D$ pedig szaggatott vonallal lett jelölve. A legerősebb turbulencia ingadozás a maximum nyírás pontjainál tapasztalható. Mivel a maximum nyírás gyengébb a lefelé áramlásnál, ezen a részen az ingadozás is kisebb mértékű lesz.
2. Először legyen x pozícióban az áramlás szélessége $B(x)$. Bár egy turbulens áramlásban számos örvény létezik egymás mellett, mindig a legnagyobbak befolyásolják leginkább a keveredést. The biggest eddies have the scale of the flow, which for a jet is B . Az örvények rotációs mozgását úgy szemléltethetjük, ha elképzeljük, hogy egy szilárd botot helyezünk az áramlatba. Mivel a nyírás előjele az áramlat közepén ellentétes előjelűvé vált, egyetlen örvény sem lehet nagyobb, mint az áramlás szélességének a fele. Ebből következik, hogy az áramlatokban jelen lévő örvények legnagyobbika maximum az áramlás szélességének fele, $B/2$ lehet.

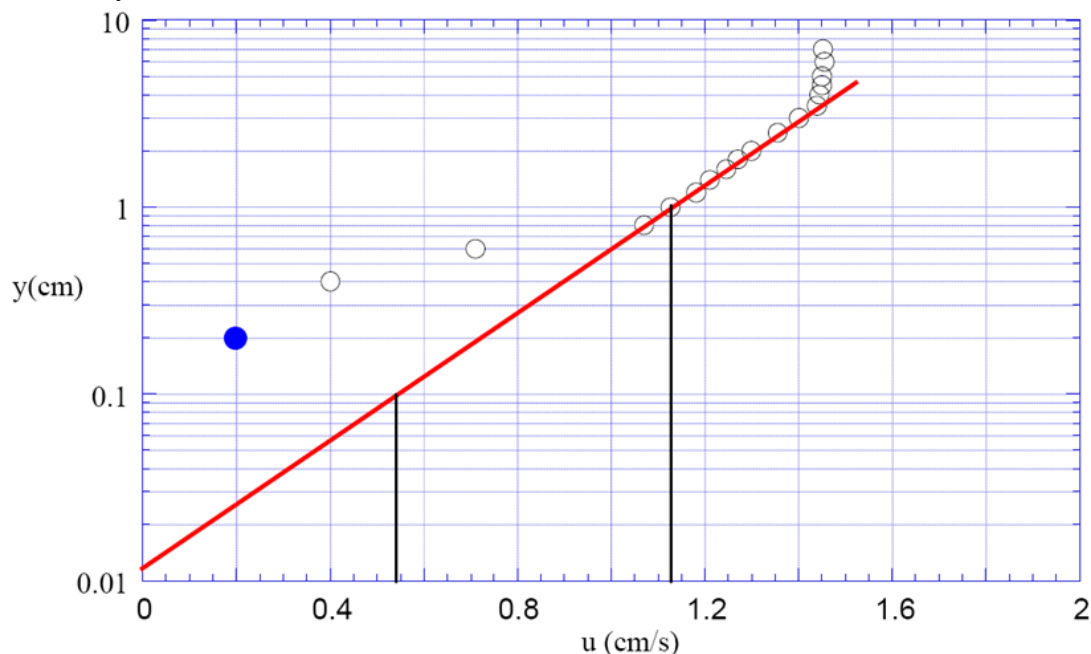


28.3.2. Megoldás

- a. A logaritmikus régiót piros vonal jelöli. Ez alapján megbecsülhetjük u_* értékét.

$$u_* = \frac{0.4 \cdot 1.13 - 0.54 \text{ cm/s}}{2.3 \log_{10}(1/0.1)} = 0.1 \text{ cm/s}$$

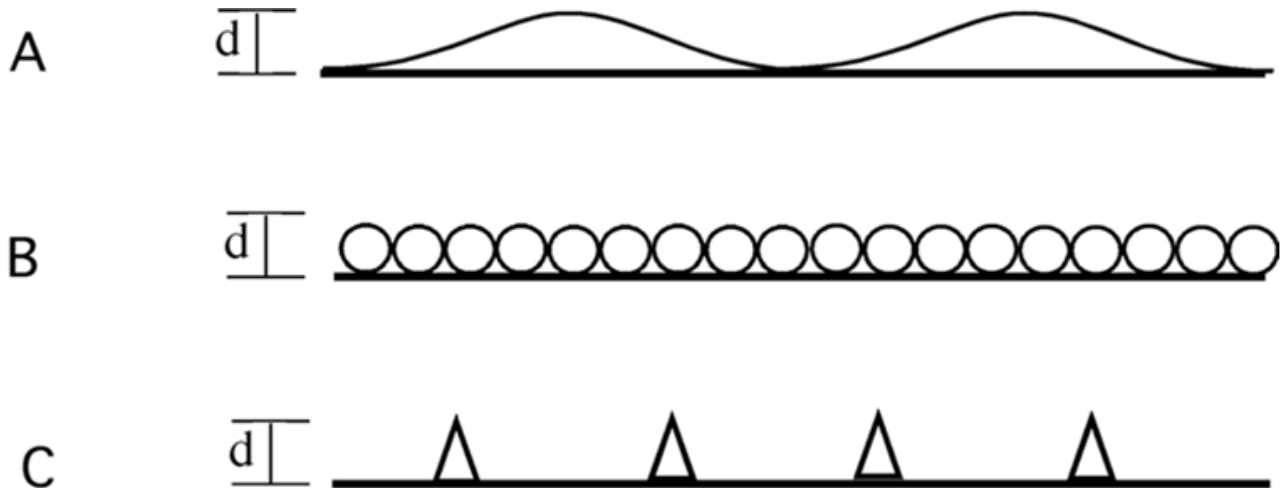
- b. A fenéknomás $\tau_w = \rho u_*^2 = 0.001 \text{ Pa} (= \text{Nm}^{-2})$
 c. A lamináris alréteg vastagsága $\delta_s = 5 \nu/u_* = 5 (0.01 \text{ cm}^2\text{s}^{-1})/0.1 \text{ cm/s} = 0.5 \text{ cm}$
 d. A kék pont ($u = 0.2 \text{ cm/s}$, $y = 0.2 \text{ cm}$) a lamináris alrétegben helyezkedik el. Mivel a lamináris alrétegben nem érvényesül a turbulencia, a fal nyomása kiszámítható a molekuláris viszkozitás és nyírás alapján, $\tau_w = \mu \partial u / \partial y = \mu u / y = (0.001 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1})(0.2 \text{ cm/s}) / (0.2 \text{ cm}) = 0.001 \text{ Pa}$, az u_* becsült értékével összhangban.
 e. Az ábra alapján $y_o = 0.011 \text{ cm}$. Zavartalan turbulens áramlás esetén y_o értéke $\nu/9u_* = 0.011 \text{ cm}$ lenne. Mivel ez az érték megegyezik a vizsgált y_o értékkel, az áramlat zavartalan turbulens jellegű. Más esetben, egy homokszem Nikuradse-féle egyenetlenségét a homokszem átmérője adja, $\varepsilon = d = 0.1 \text{ cm}$. Ezért az egyenetlenség Reynolds-száma $\varepsilon u_* / \nu = (0.1 \text{ cm})(0.1 \text{ cm/s}) / (0.01 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}) = 1 < 5$, ami szintén arra utal, hogy az áramlás zavartalan turbulens jellegű.
 f. A festéket $y=3 \text{ mm}$ -nél a lamináris alrétegbe engedjük. A festék egyenes vonalú nyomot fog kijelölni, azaz egyetlen, eltérések nélküli vonalat húz majd. Az $y=3 \text{ cm}$ -nél az áramlatba eresztett festék már a lamináris alréteg fölött helyezkedik majd el, azaz hatni fog rá a turbulencia. A jelölőanyag kavarni látszik majd, a rá ható számos kisebb örvény hatása miatt.



28.3.3. Megoldás

Ha $d \ll \delta_s$, minden alakzat a lamináris alrétegben belül fog elhelyezkedni. Az alrétegben kívüli áramlás nem fogja érzékelni az alakzatokat, és az áramlás zavartalan turbulens jellegű marad. Ezen feltételek érvényesülése mellett minden esetben $y_o = \nu/9u_*$.

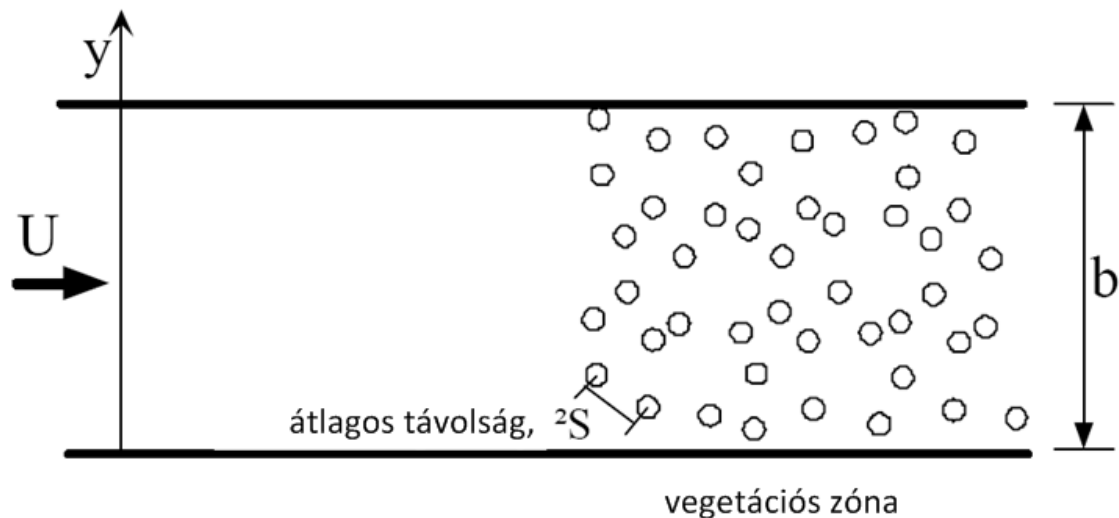
Ha $d \gg \delta_s$, az áramlat egyenetlen turbulens jellegű lesz, és az összes alakzat hatása érződik az áramláson. Az áramlatot leginkább zavaró alakzat (azaz amelyik a legnagyobb mértékben módosítja az áramlás haladását) okozza majd a legnagyobb pillanatnyi süllyedést, és az fog a legegényetlenebbnek érződni. Ez a C alakzat. A alakzat alakja hasonlít leginkább az áramlás természetes alakjához, így ez fogja a legkisebb zavart okozni. Ennek alapján a várható eredmény: $y_{oC} > y_{oB} > y_{oA}$.



28.3.4. Megoldás

- A növényzet nélküli zónában a laterális örvények méretét a csatorna szélessége határozza meg, $l_y \sim b$. A növényzettel rendelkező zónában azonban a b skálát megzavarják a növények. Ebben a zónában a laterális örvények méretét a növények távolsága és átmérője határozza meg, $l_y \sim d$ vagy ΔS . A határoló falak miatt a csatorna mindkét régiójában nagyjából ugyanakkora lesz az átlagsebesség. Mivel az örvények mérete jelentősen csökken a növényzettel rendelkező zónákban, ($\Delta S, d \ll b$), várhatóan itt a laterális diffúzió is ennek arányában fog csökkenni.
- Ha $Ud/v = 1$, az egyes növények nem hoznak létre további örvényeket az áramlatban. Ha $Ud/v = 1000$, az egyes növények méretükkel arányos újabb örvényeket hoznak majd létre, a szeparáció és a Kelvin-Helmholtz féle hullámok által. Az utóbbi esetben tehát várhatóan a v' értékét a további örvények is gyarapítani fogják, és $D_{t,y}$ értéke magasabb lesz, mint a legmagasabb Reynolds-szám.
- Ha az áramlat nincsen körülhatárolva, í növényzettel rendelkező zónákban csökkenni fog az áramlás sebessége, mivel a növényzettel ellátott részekben az áramlás iránya is megváltozik az egyes növények körül. Ezért a vegetációval rendelkező zónákban az áramlás sebessége, U_v , alacsonyabb lesz, mint a szabad áramlás zónáiban, U . Ha $U_v < U$, és az egyes növények nem okoznak további turbulenciát ($U_v d / v < \approx 100$), azt várhatjuk, hogy a turbulencia intenzitása a növényzettel rendelkező zónákban még alacsonyabb lesz, $v'_v < v'$. Ráadásul, a turbulencia mértéke is kisebb lesz a növényzettel rendelkező zónákban, mint azt az a) pontban is tárgyaltuk. Miután a növényzettel rendelkező zónában v' és l_y is alacsonyabb lesz, $D_{t,y}$ értéke is hasonlóan alacsonyabb lesz a növényzettel rendelkező zónában. Még ha az adott növény Reynolds-száma, $U_v d / v$, viszonylag magas is, annyira, hogy a növény körül újabb örvények alakulnak ki, ezek mértéke ($l_y \sim d$) túl kicsi lesz a szabad áramlásban létrejövő örvényekhez képest,

és így a növényzettel rendelkező zónák diffúzitása mindig jelentősen kisebb lesz, mint a növényzettel nem rendelkező zónáké.

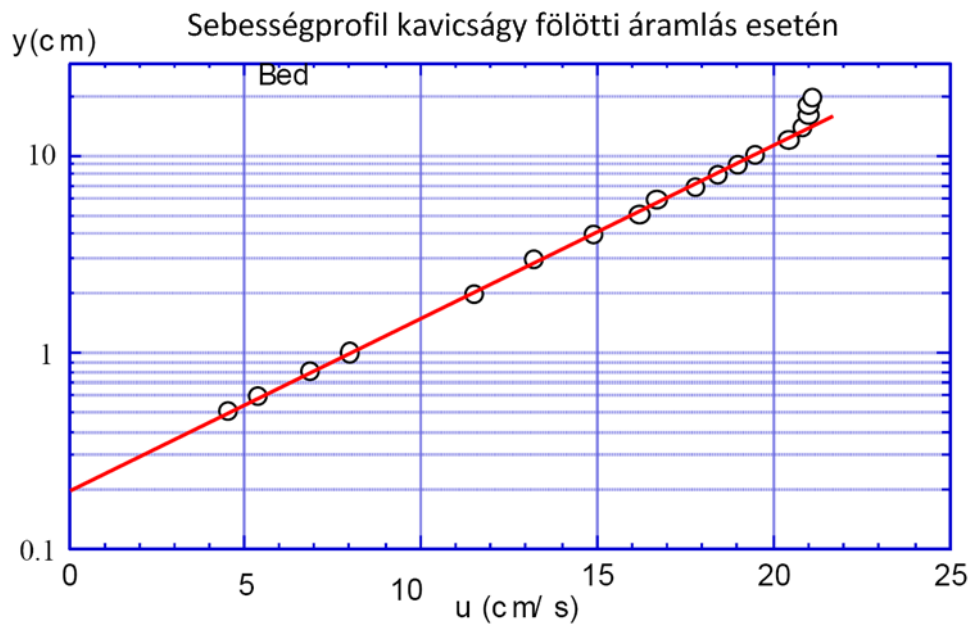


28.3.5. Megoldás

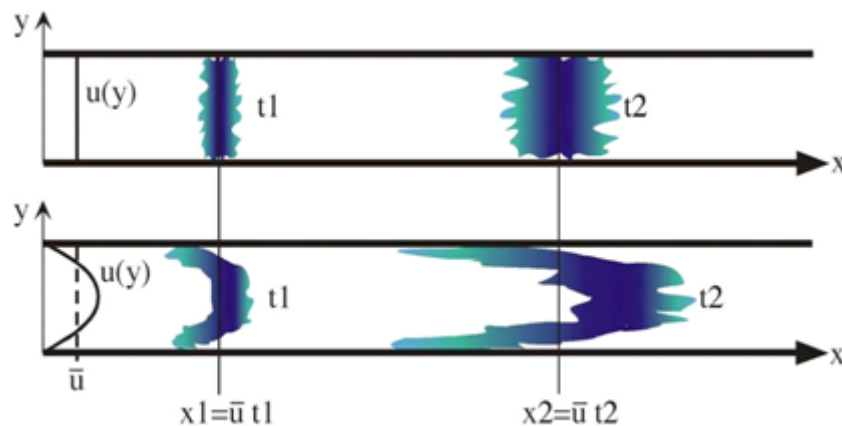
- a. A logaritmusos régiót piros vonal jelöli. A vonalból megbecsülhető u^* értéke.

$$u_* = \frac{0.4 (15 - 0 \text{ cm/s})}{2.3 \log_{10}(4/0.2)} = 2.0 \text{ cm/s}$$

- b. A lamináris alréteg vastagsága $5\nu/u_* = 5 (0.01 \text{ cm}^2\text{s}^{-1})/(2.0 \text{ cm s}^{-1}) = 0.025 \text{ cm}$.
- c. Figyelembe véve, hogy a kavics átmérője (1cm) jóval nagyobb, mint a lamináris alréteg vastagsága, nagyon valószínű, hogy a kavics hozzájárul majd a fenék ellenállásához, azaz az áramlatban érezhető lesz a kavics zavaró hatása. Meg kell tehát állapítanunk, hogy az áramlat zavartalan, vagy egyenetlen turbulens jelleget mutat-e majd. Az ábra alapján $y_0 = 0.2 \text{ cm}$. Zavartalan turbulens áramlás esetén $y_0 = \nu/9u_* = 5.6 \times 10^{-4} \text{ cm}$, ami kisebb, mint a vizsgált y_0 , ezért az áramlás nem lesz zavartalan. Ha az áramlás egyenetlen turbulens jellegű lenne, az ekvivalens egyenetlenség $\varepsilon = 30y_0 = 6 \text{ cm}$, és az egyenetlenség Reynolds-száma $\varepsilon u_*/\nu = 1200$ lenne, ami jóval magasabb, mint az egyenetlen turbulens áramlás határértéke (70-100). Így a következtetésünk szerint az áramlás egyenetlen turbulens jellegű lesz, és a kavics hozzájárul a turbulencia egyenetlenségéhez.
- d. Azonos áramlási ellenálláshoz 6 cm átmérőjű homokszemcsék által alkotott egyenetlen rétegre lenne szükség.



29. Diszperziós folyamatok



Ez a fejezet a felhők olyan diszperziós folyamatokon keresztül történő hosszanti áramlását tekinti át, amelyek a diffúziós folyamatoktól megkülönböztetett folyamatok. Diszperzió alatt a felhők olyan fajta áramlását értjük, amely különféle kémiai részecskéket eltérő sebességű mozgásra készítet. A részecskesebesség egyenletlensége lehetővé teszi néhány részecske számára, hogy azok gyorsabban mozogjanak, mialatt a többi részecske visszamarad, amit a peremhatárok, holtzónák és abszorpciós reakciók (pl. porózus közegben) okozhatnak (melyek vágásokat képeznek az áramlásban). Környezeti rendszerekben a diszperzió általában sokkal fontosabb, mint a kémiai felhők hosszabbodásában jelenlévő diffúziós folyamatok.

Ebben a fejezetben megtudjuk, hogy a diszperziós felhők Fick-féle határértékének és a Gauss-féle koncentrációs profil elérése mely pontokban történik hosszanti irányban. Arra is fény derül, hogy a hosszanti irányú diszperzió akkor éri el a maximum értéket, amikor az oldalirányú diffúzió a legalacsonyabb értéket veszi fel.

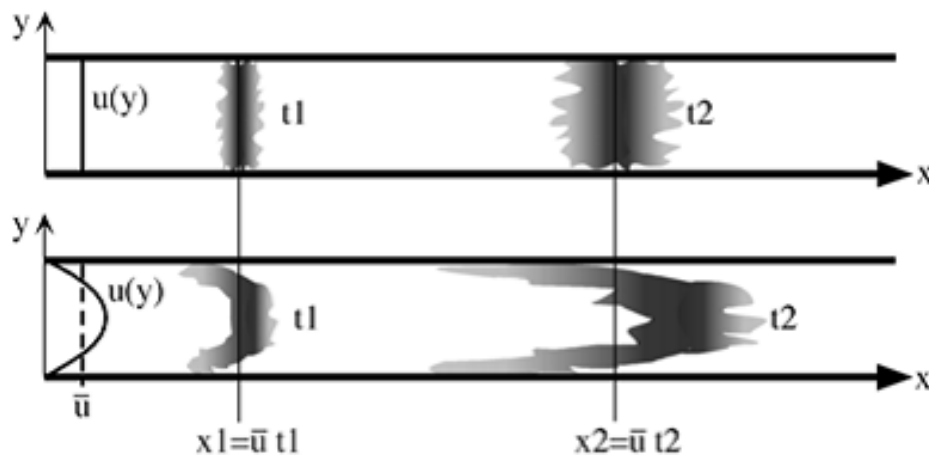
A példákban szereplő problémák arra ösztönöznek, hogy a diszperziós folyamatokat mennyiségi számításokkal becsüljük meg, kikövetkeztetve ezekből a diszperziós felhő alakját.

29.1. Nyírási diszperzió.

Az előző szekciókban a transzport modellekről és koncentrációs mezőkről kialakított megoldások azt feltételezik, hogy az áramlatok térben egyenletesen oszlanak meg, pl. $u \neq f(x,y,z)$. Bár a sebesség térbeli gradiensei, az ún. nyírási gradiensek a határvonalhoz közel helyezkednek el, mivel a csúszásmentes állapot azt kívánja meg, hogy a folyadék relatív sebessége zéró értéket vegyen fel a határvonalon. Amikor a nyírási gradiens jelen van, a jelölőanyag különböző részei eltérő sebességű légmozgással közelítenek. Ez a fajta „kiegyenlítő advekción” szétnyújtja a jelölőanyag ködfelhőt, ezáltal egy gyorsabb hosszanti irányú terjedést idéz elő, mint amikor a köd egyenletes folyamba áramlik (**254. ábra**). Továbbá, a kiegyenlítő advekción oldalirányú gradiensek eredményez a koncentrációban ($\partial C/\partial y$ az (**254. ábra**)) amely egy hosszanti irányú diffúziót követően felerősíti a köd hígulását.

A **254. ábra** lévő alsó csatorna alján torzulás észlelhető, ami a teljes transzport egyenletből következik, ha a sebesség térbeli változóit is belefoglaljuk:

$$(1) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial C}{\partial z}$$



254. ábra: Két áramlási csatorna felülnézetből. A felső csatorna esetében az oldalsó fal határvonala hibalehetőségre adhat okot, a sebesség egyenletesen oszlik el y környezetben. Az alsó csatornában nincs hibalehetőség az oldalsó fal határvonala mentén, ezáltal egy hosszanti nyírás eredményezve $\partial u/\partial y$. Mindkét csatorna ugyanakkora köztes átlagsebességgel rendelkezik (\bar{u}). A jelölőanyagot $t = 0$ és $x = 0$ pontoknál bocsátjuk ki. Minden egyes köd térbeli eloszlását t_1 és t_2 időegységeknél jelöltük. Figyeljük meg, hogy a tömeg középpontja körül mindkét esetben \bar{u} sebességnél figyelhető meg légmozgás. A csatorna alján keletkező nyírási sebesség elnyújtja a jelölőanyag ködfelhőt, ami azt eredményezi, hogy a ködfelhő hosszanti irányban sokkal gyorsabban áramlik, mint a kiegyenlített csatornában található ködfelhő.

Viszont az $u = f(x,y,z)$ egyenlőséggel nehéz egyszerű analitikai megoldást találni az (1) egyenletre. Sok esetben az is elég, ha a területet integráljuk y és z pontokban, és feltételezzük, hogy csak transzport van az áramlási irányokban. Az integrációt követően a kiegyenlítő advekción és a laterális diffúzió együttes hatását egy pótlólagos folyamatban tudjuk kifejezni, ami hosszanti irányú áramlást eredményez. Ezt nevezük nyírás diszperciónak, amit más néven Taylor-diszperzióként is emlegetünk (G.I. Taylor után, aki elsőként írta le a folyamatot 1953-ban). Meghatározott feltételek mellett a nyírás diszperzió a Fick-féle diffúziós folyamatokhoz hasonlóan viselkedik. Így ennek a hatását ábrázoljuk a keresztmetszeti átlagos (egydimenziós) transzport egyenletben úgy, hogy egy további diszperziós koefficiens (K_x) is hozzáadunk. Az (1) egyenletet integráljuk y és z eredményekkel az egydimenziós egyenlet a következőképpen alakul

$$(2) \quad \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 \langle C \rangle}{\partial x^2} + K_x \frac{\partial^2 \langle C \rangle}{\partial x^2}$$

Zárójelben jelöltük a keresztmetszeti átlagokat és az egyszerűség kedvéért homogén diffúziót feltételezünk, $D_x \neq f(x)$. Általánosságban $D_x \ll K_x$, és az előzőeket figyelmen kívül hagyjuk, megkapjuk az egydimenziós advekción-diszperziós egyenletet.

$$(3) \quad \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 \langle C \rangle}{\partial x^2}$$

Továbbá a Fick-féle határérték esetében a keresztmetszeti átlagköd kialakulást úgy jellemezzük, hogy ugyanazt a statisztikai leírást vesszük alapul, amit az előző fejezetekben a diffúziónál használtunk. A hosszanti irányú skála a köd esetében ott van, ahol

$$(4) \quad \sigma_x = \sqrt{2K_x t}$$

A (4) egyenletből megbecsülhetjük K_x értékét a mezőben úgy, hogy a variancia kialakulását fenntartjuk a jelölőköd esetében. Megfigyelhető, hogy a variancia időbeni alakulása

$$(5) \quad K_x = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x^2}{\partial t}$$

K_x esetében határozottan kivitelezhető az integráció, ami a (3) egyenlethez vezet, felhasználva a skálával kapcsolatos érveléseket, amelyek a matematikai kérdéseket leegyszerűsítik. Nagyon fontos megérteni a deriváció lépéseit, hogy megértsük, milyen feltételeket tartalmazhat a (3) egyenlet. Leegyszerűsítve a folyamatot, nagyon széles csatornát feltételezünk, ahol az oldalirányú nyírás viszonylag alacsony $\partial u / \partial y$, a vertikális nyíráshoz képest, $\partial u / \partial z$. Ez a megállapítás lehetővé teszi, hogy kétdimenziós csatornát feltételezzünk, ahol $\partial / \partial y = 0$. Továbbá feltételezzük, hogy az áramlás szigorúan x irányban történik ($w = v = 0$), és $(\partial u / \partial x = 0)$ ponton egyenletesen oszlik el. Ezzel a feltételezéssel az (1) egyenlet a következő alakra redukálható:

$$(6) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial c}{\partial z}$$

Ezt követően u és C együttthatókat átlagolt mélységű értékekre bontjuk, amit egy külső korlát jelöl, pl. $\bar{u} = (1/h) \int_0^h u dz$.

$$(7) \quad u(z) = \bar{u} + u'(z)$$

$$c(x,z) = \bar{c}(x) + c'(x,z)$$

Az átrendezett változókat behelyettesítve a (6) egyenletbe, akkor a definíció szerint: $\partial c / \partial z = 0$.

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\bar{c} + c') + (\bar{u} + u') \frac{\partial (\bar{c} + c')}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial (\bar{c} + c')}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial (c')}{\partial z}$$

Vegyük minden egyes feltételezés átlagmélységét, így a definíció értelmében: $\bar{c}' = 0$ és $\bar{u}' = 0$.

$$(9) \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \overline{u' \frac{\partial c'}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}$$

Az eredeti egyenletet figyelembe véve (6) a vertikális gradiens terminusokat kihagyjuk úgy, hogy integráljuk azt a vertikális tartományon túl. Ezen felül egy új terminus lép életbe $u' \partial c' / \partial x$, ami a sebesség fluktuációja és a koncentráció közötti korrelációval kapcsolatos áramlást ábrázolja, az átlagmélység értékeire tekintettel. A következőkben megoldást keresünk c' -re, így egy újabb áramlási terminust kell értékelnünk. Mivel mind (8) egyenlethez és (9) igaz, a (9) egyenletet kivonva (8) egyenletből, a következő egyenletet kapjuk:

$$(10) \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + u' \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + u' \frac{\partial c'}{\partial x} - \overline{u' \frac{\partial c'}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial c'}{\partial z}$$

Ezt követően egy fontos feltételt kell állítanunk a térbeli fluktuáció (c') terjedelmében. Feltételezzük, hogy $c' \ll \bar{c}$. Amennyiben ez a feltételezés igaz, úgy mind a harmadik és a negyedik terminus terjedelme alacsony lesz a második terminushoz képest, így a (10) egyenletet leredukálva a következőt kapjuk:

$$(11) \quad \frac{\partial c'}{\partial t} + u' \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial c'}{\partial z}$$

differenciál áramlás függőleges diffúzió

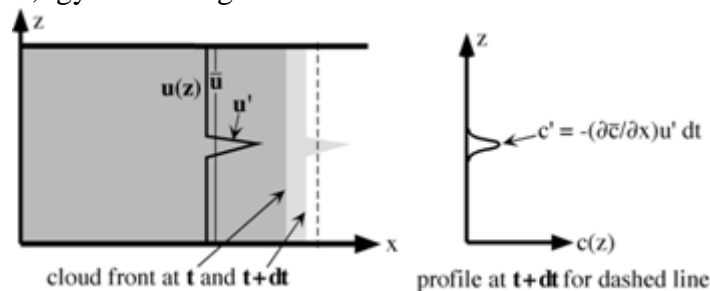
Ez az egyenlet kifejezi, hogy a koncentrációban lévő vertikális fluktuációk c' különböző advektiók révén alakul ki és vertikális diffúzió hatására megszűnnek. Kezdetben $\partial\bar{c}/\partial x$ értéke nagyobb, ekkor differenciális advektió érvényesül és c' gyorsabb, mint a vertikális diffúzió. De valójában $\partial\bar{c}/\partial x$ elég kicsi lesz ahhoz, hogy az érték, amelynél c' létrejön differenciált advektió révén kiegyenlítődik annál az értéknél, ahol ugyanennyel az értéknél a vertikális diffúzió által megszűnik. Amikor ez a két folyamat kiegyenlítődik, akkor $\partial c'/\partial t$ zero értéket vesz fel és a (11) egyenlet a következőképpen alakul:

$$(12) \quad u' \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial c'}{\partial z}$$

A (12) egyenletben a vízfelszínen áramlásmentes közeget feltételezve, a megoldás a következőképpen alakul: $\partial c'/\partial z = 0$, ahol $z = 0$. Emlékezzünk vissza, hogy a definíció alapján $\bar{c} \neq f(z)$. Ezt követően

$$(13) \quad c'(z) = \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \int_0^z \frac{1}{D_z} \int_0^z u' dz dz + c'(z = 0)$$

Mivel a szóródás (D_z) a turbulens és molekuláris diffúziók összege, így ez lehet a vertikális pozíció függvénye is, így az az integrálon belül marad:



255. ábra: Feltételezzük, hogy a jelölőanyag-felhő, melynek vezető pereme egyeneses t időben. A differenciált advektió eltorzítja a csóvát, egy új formát adva annak $t + dt$ időben. A sebességben jelenlévő térbeli eltérés u' zavart kelt a $t + dt$ koncentrációban. Ebből adódóan a (11) egyenlet első két terminusában $c' = -(\partial\bar{c}/\partial x) u' dt$.

Visszatérve a (9) egyenlethez, az új terminust kiértékelve: $\overline{u' \partial c' / \partial x}$. Mivel azt feltételezzük, hogy $u \neq f(x)$, majd pedig hogy $u' \neq f(x)$, ezek alapján az új terminus felírható a következő módon: $\overline{\partial u' c' / \partial x}$. Az $\overline{u' c'}$ korrelációt értékeljük a (13) egyenlettel, miközben tudjuk, hogy $\overline{u' c' (z = 0)} = \overline{u' c' (z = 0)} = 0$, mivel $u' = 0$.

$$(14) \quad \overline{u' c'} = \frac{1}{h} \int_0^h u' \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \int_0^z \frac{1}{D_h} \int_0^z u' dz dz dz = \frac{1}{h} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \int_0^h u' \int_0^z \frac{1}{D_z} \int_0^z u' dz dz dz$$

Ez a korreláció a légáramlat térbeli fluktuációjával kapcsolható össze a gyorsulási mezőben. Ez az áramlat a koncentrációs gradienssel arányos, és Fick-féle diffúzióként viselkedik. Így a transzport koefficiens használjuk az áramlat modellezéséhez, úgy mint ezt tettük a turbulens diffúzióval is az előző fejezetben. A transzport koefficiens hosszirányú diszperziós koefficiensnek is nevezzük, és K_x -val jelöljük. A negatív jel azt jelzi, hogy az áramlás ellentétes gradienssel rendelkezik.

$$(15) \quad \overline{u' c'} = -K_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}$$

A második kifejezés a (16) egyenletben akkor érvényesül, ha $D_z \neq f(z)$. Ez a kifejezés ábrázolja a hosszirányú diszperzió vertikális vágáshoz történő hozzájárulását. Egy hasonló terminus leírja az oldalirányú vágás hozzájárulást is.

Az új kifejezés a (9) egyenletből így írható fel

$$(17) \quad \overline{u' \frac{\partial c'}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x} \overline{u' c'} = -K_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2}$$

A (17) kifejezést a (9) egyenletbe helyettesítve megkapjuk az egydimenziós egyenlőséget,

$$(18) \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + K_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2}$$

ahol D_x a (18) egyenletben és D_z a (16) egyenletben a molekuláris és turbulens diffúzió összegét adják, ami jelenleg praktikus okokból kizárólag turbulens diffúzió. Korábban kiértékelt (16) egyenlet a $D_z = f(z)$ logaritmikus profillal és azt látjuk, hogy

$$(19) \quad K_x = 5.93 u_* h$$

Vegyük észre, hogy a (19) egyenlet csak a gyorsulási vágásra igaz, $(\partial u / \partial z)$ sebességnél, ugyanakkor ez nem igaz az oldalirányú gyorsulási vágásra $(\partial u / \partial y)$. Ez egy elfogadható becslés széles és egyenes medrekre. A (19) egyenletet a hosszirányú diffúzió empirikus becslésével összehasonlítva, $D_x = 0.45 u_* h$, látható, hogy K_x nagyobb terjedelemben érvényesül. Ebből az következik, hogy a diffúzió a (18) egyenletben elhanyagolható, és visszatérve a (3) egyenlőséghez a megfelelőség érdekében:

$$(20) \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2}$$

Erre az egydimenziós egyenlőségre a megoldás, hogy D_x -t felcseréli K_x , ahogy azt már említettük a pontforrásokkal kapcsolatban. Ezek a megoldások hosszirányú diffúziók diszperziós rendszereire is használható (a (20) alapján).

Várhatóan a (16) egyenlet megmutatja, hogy a diszperzió koefficiens megnövekedik a vágás nagy terjedelme következtében, ami kifejezi a térbeli szórás (u') terjedelmét. A $K_x \sim h$ függés kevésbé igaz. Bár azt figyelembe kell venni, hogy minden egyes integrál a h hányada és ha $D_z \sim h$, akkor a (16) egyenlet a $K_x \sim h$ feltételezést eredményezi, ami a (19) egyenlettel következetes. Végül a (16) egyenlet azt jelzi, hogy K_x is fordítottan arányos a keresztáramlat terjedésével (D_z). Vagyis K_x értéke akkor a legnagyobb, amikor D_z a legkisebb. Ahhoz hogy ezt megértsük ezt a fajta ösztönnélküli függést, ne felejtsük el, hogy a nyírási diszperzió alakul ki azért, mert a sima áramlások gyorsulása eltérőek, tehát a részecskék különböző sebesség melletti légmozgása hosszanti irányban elválik egymástól (diszperzál). Ez a tényező a nyírási diszperzió komponensének differenciál advekcíója.

Ha a keresztmetszeti diffúzió magas, akkor a részecskék olyan gyorsan választanak sebességet a szelvényekben, hogy valójában középsebességgel haladnak át. Ha minden részecske középsebességgel áramlik, akkor nem osztódnak szét hosszanti irányban és a nyírási diszperzió értéke 0 lesz még akkor is, ha a nyírás maga nem 0. Amint a keresztmetszeti diffúzió lecsökken, a részecskék több differenciált advekcíót halmoznak fel, ahogy egy hosszabb periódusban tennék ezt egyenként áramolva.

Fontos, hogy felidézzük azokat a feltételezéseket, melyek alapján elértük az advekcíó-diszperzió egyenlőséget a (20) egyenletben. Korábban azt is feltételeztük, hogy $c' \ll \bar{c}$. Továbbá, a (12)

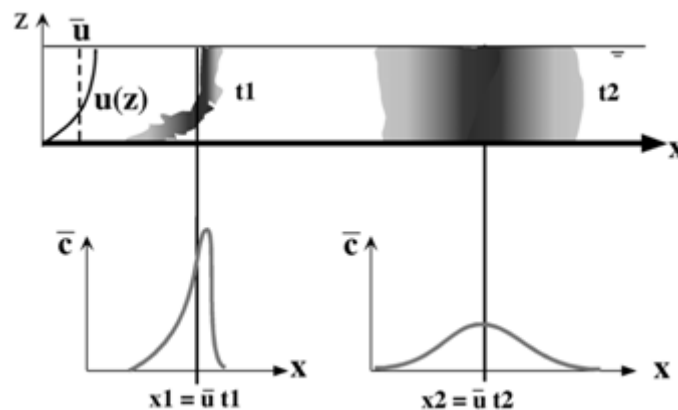
egyenlet csak akkor lép érvénybe, ha az érték, ahol c' létrejön tökéletes egyensúlyban van azzal az értékkel, ahol c' megsemmisült, tehát a majdnem egyenletes koncentrációs szelvény keresztmetszeti irányban jön létre.

Vegyük figyelembe, hogy egy majdnem egyenletes profil automatikusan teljesíti a $c' \ll \bar{c}$ egyenlőtlenséget, úgy hogy a két feltételezés szorosan összekapcsolható. Ahhoz, hogy megértsük mikor teljesülnek ezek a feltételezések, a jelölőanyag alakulását az eredeti kibocsátás esetében vesszük figyelembe (256. ábra). A jelölőanyag vonalként oszlik el a teljes mélység fölött $t=0$ időben. Differenciált advekción (u') zavart kelt a koncentrációs profilban (c') $\partial c'/\partial t = u' \partial \bar{c}/\partial x$ értéknél. Amikor a köd először megjelenik, az átlagos koncentrációjú gradiensek elég nagyok, tehát a c' kialakulása is nagyon gyors és jellegzetes. Ez az alakulás a ködfelhő alakjának geometriai torzulásában nyilvánul meg (256. ábra).

A koncentrációs zavar széteszik a laterális diffúzió hatására, $\partial c'/\partial t = D_z \partial^2 c'/\partial z^2$ értéknél. Ahogy a ködfelhő terjed, a középkoncentráció hosszanti gradiensei ($\partial \bar{c}/\partial x$) csökkennek, és a gyorsasági érték, amelynél a koncentrációs zavar kialakult lelassul. Végül az érték, ahol a zavar kialakult egyensúlyba kerül azzal az értékkel, ahol a diffúzió által megsemmisült (a 12. egyenlet lép érvénybe). Ez a jelenség a következő időpontban jön létre:

$$(21) \quad T_{\text{Diszperzió}} = 0.4 L_z^2/D_z$$

Miután a jelölőanyagot kibocsátottuk, a keresztmetszeti irányú (szélesség és mélység) hosszanti skálája L_z és $L_z = h$, a vízmélység. Ezt követően a koncentráció közel kerül a kiegyenlítődéshez, tehát $c' \ll \bar{c}$. A nyírási diszperzió folyamata a Fick-féle határértéket ekkor eléri, valamint az átlagmélységű koncentráció hosszanti irányú eloszlása Gauss-féle eloszlású. Ne felejtjük el, hogy ez az időskála a keresztmetszeti diffúzióval fordítottan arányos (D_z). A (16) egyenletből tudjuk, hogy K_x is fordítottan arányos D_z -vel. Ez azt jelenti, hogy azok a feltételek, amelyek a legnagyobb értékkel rendelkező K_x -w-t eredményezi, ugyanúgy a leghosszabb időtávra lesz szüksége, hogy a nyírási diszperzió létrejöjjön és a (20) egyenletet alkalmazni tudjuk.



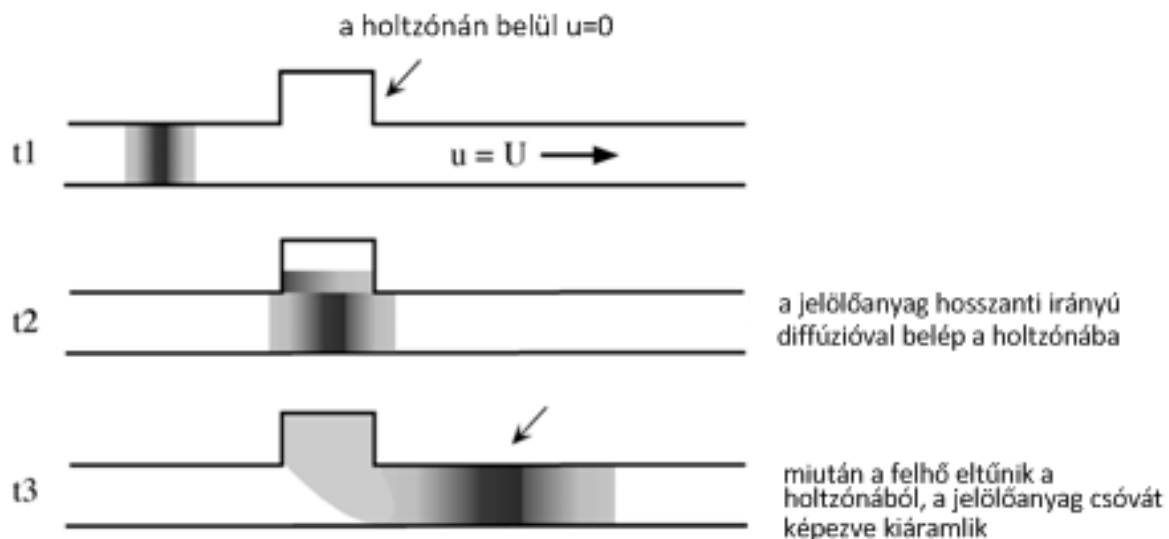
256. ábra: A jelölőanyag kifejlődése $t=0$ pontban történik, ahol a vonal a mélységet felosztja. Eleinte differenciált advekción dominál (t_1), láthatóan eltorzítva a csóva alakját. Ekkor az átlagmélység koncentrációjának hosszanti eloszlása (\bar{c}) aszimmetrikus. Végül a differenciált advekción és diffúzió egyensúlyba kerülnek, és a csóva eléri az egyenletes mélységi koncentrációt. Ezt követően az átlagmélység koncentrációjának hosszanti eloszlása Gauss-féle eloszlású (t_2) és a diszperziós folyamat eléri a Fick-féle határértéket.

A diszperzió további mechanizmusai.

A diszperzió egy olyan tág fogalom, ami minden folyamatot jellemez kivéve a diffúziót, amely esetében csak egy adag jelölőanyag eloszlásával csökken a koncentráció. Jellemzően, a diszperziós koefficiens olyan advekción és diffúziós folyamatok kombinációját mutatja meg,

melyeket külön-külön nehéz modellezni. Például, differenciált oldalirányú advekción és keresztirányú diffúzió együttes hatása nyírási diszperziót eredményez.

Porózus közegbeli áramlatokban a többszörös áramlási útvonalak meglehetősen ugyanúgy differenciált advekción eredményez, amely később diszperzióhoz vezet. Ezek az áramlatok korlátozottan különálló együttesen összefonódott póruscsatornákra, ahol bármely két pont között többszörös áramlási útvonalak léteznek. Egy adott áramlási útvonal keresztesítéséhez szükséges idő a pórusok geometriájától függ. Keskenyebb pórusok közti áramlás lassabb, mint a szélesebb pórusok esetében. Valamint pár áramlási útvonal majdnem lineáris, és éppen ezért rövid vagy mások nagyon tekervényes (görbe) és ebből kifolyólag hosszú is. Továbbá, minden egyes póruscsatorna kis csöként viselkedik, vagyis a pórus középpontjában nagyobb a sebesség, mint a felszínen. A pórus skálán lévő vágás ugyanolyan diszperzióhoz vezet, mint a mederskálán lévő vágás esetében, amint azt a fentiekben taglaltuk. Ezek a folyamatok összességében a jelölőanyag szemcséinek oldalirányú áramlásához vezetnek. Vagyis a jelölőanyag szemcséi együttesen eltérő útvonalakon áramlanak és mind hosszanti irányban, mind oldalirányban szétválnak (diszperzálódnak). Ezt a folyamatot mechanikai diszperzióknak nevezzük. A diszperzió e fajtája elérheti a Fick-féle határértéket miután minden egyes részecske elegendő számú mederpórusból vesz mintát.



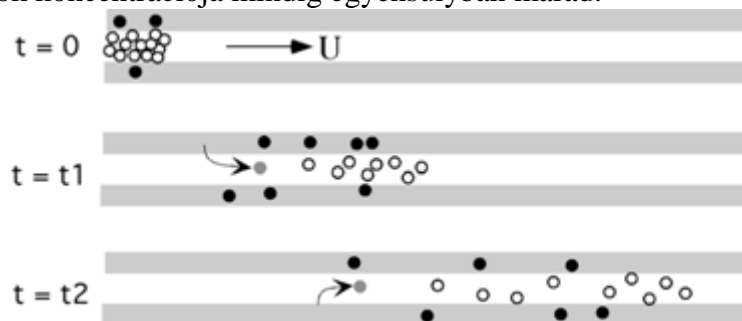
257. ábra: Holtzónás diszperzió. A részecskék oldalirányú diffúziója egy zero-sebességű régióba (holtzóna) oldalirányú diszperziót eredményez. A holtzónába érkező jelölőanyag háttérben marad a holtzónát el nem érő jelölőanyaggal szemben. Amikor a jelölőanyag a holtzónát elhagyja, szétválik a légtérben (eloszlik) a maradék porfelhőről

A diszperzió másik formája akkor lép érvénybe, amikor az áramlási mezőben zero-sebességű zóna is van, ez az ún. holtzóna. A jelölőanyag részecskéi turbulens vagy molekuláris diffúzióval jutnak ezekbe a zónákba. Egy bizonyos rezidens idő elteltével a holtzónán belül újabb adag jelölőanyag kerül az advekcións térbe. A holtzónába érkező jelölőanyag háttérben marad a holtzónát el nem érő jelölőanyaggal szemben. Amikor a jelölőanyag a holtzónát elhagyja, leválik a légtérben a maradék porfelhőről (eloszlik). A diszperzióhoz vezető holtzóna rezidens idejének hosszabbnak kell lennie az eredeti jelölőanyag behatolási időskálájához viszonyítva. Máskülönben a holtzónába hatolással kapcsolatban nem történik késés, így diszperzió sem jön létre. Lehetséges holtzónák lehetnek: kibocsátás nélküli pórustér, folyók oldalága, egy eltömődés nyomvonala. Amennyiben a holtzónák eloszlása nem áramlási mezőn keresztül történik, a holtzónás diszperzió elérheti a Fick határértéket, miután a jelölőanyag jelentős számú holtzónából már mintát vett. Hasonlóan történik ez a porózus szerkezetű zártvégű pórusok esetében is, valamint egy vizes területen keletkezett nyomdokvonalak egyedi barázdáinál is. Ha csupán néhány holtzónát észlelünk, pl. egy folyó mentén lévő kisebb folyások és fodrozódások

esetében, akkor a Fick határérték nem elérhető. Egyetlen vagy kisszámú holtzónával (**257. ábra**) kapcsolatos megszakítás vagy késleltetés nem produkál Gauss-féle (Fick-féle) diszperziót, és a koncentráció oldalirányú eloszlása ($C(x)$) harántirányban tér ki egy hosszanti csőva ellentétes irányú végén, amely a jelölőanyag holtzónában történő átmeneti megszakításával köthető össze. A haránt irányú eloszlást a 258. ábra t_1 pontja szemlélteti, amely szintén jelöli azt a helyzetet, ahol a diszperziós folyamat nem még nem éri el a Fick-féle határértéket

Egy harmadik típusú diszperziós folyamat egy állandó közegben történő kémiai reakcióból ered, pl. porózus közegben vagy csatornában található szemcsés szerkezetű fal esetében. Vegyük például a **258. ábra** szemléltetett jelölőanyagot, ami az állandósult közeg felületén megköt. Amikor a vegyszer (fehér körök) a csatornába ér, az anyag adszorpciója (fekete körök) k reakciós értéknél kezdődik el. A közeggel érintkező vegyszer állandósulttá válik, és ezáltal késleltetve éri el az oldott fázist, ami a tovább mozdul az áramlás irányában U sebességgel. Amint a helyben oldott koncentráció értéke nullára esik, az adszorpciós vegyszer visszakerül az áramló folyadékba ugyancsak k reakciós értéknél (szürke körök, t_1 és t_2 pontok a **258. ábra**). A felhőképződmény oldalirányban oszlik szét, mert a tömeg egy hányada az adszorpció által késleltetett. A holtzónás diszperzióval kapcsolatos szilárd felületen végbemenő adszorpció csak akkor eredményezhet diszperziót, ha az adszorpciós folyamat időskálája ($1/k$) elég hosszú a felhő transzportjának időskálájához viszonyítva – tehát minden egyes adszorpciós esemény késleltetve megy végbe.

A **30.1** olyan adszorpciós hatásokkal foglalkozunk, ahol az adszorpciós/deszorpciós reakciók időskálája nagyon rövid a transzport időskálához viszonyítva. Tehát az oldódási és adszorpciós fázisok koncentrációja mindig egyensúlyban marad.



258. ábra: Néhány oldott vegyszer frakció (fehér körök) megkötött a szilárd, állandó közeg felületén (fekete körök). A megkötött vegyszer a mezgyéről leválik miután az oldott porfelhő továbbhalad. A vegyszer adszorpciója és deszorpciója késleltetett transzportot eredményez, ami a jelölő felhőt eloszlatja.

29.2. Feladatsor

29.2.1. Feladat

Jellemezd a következő folyamatokat: diffúzió, advekcio és diszperzió

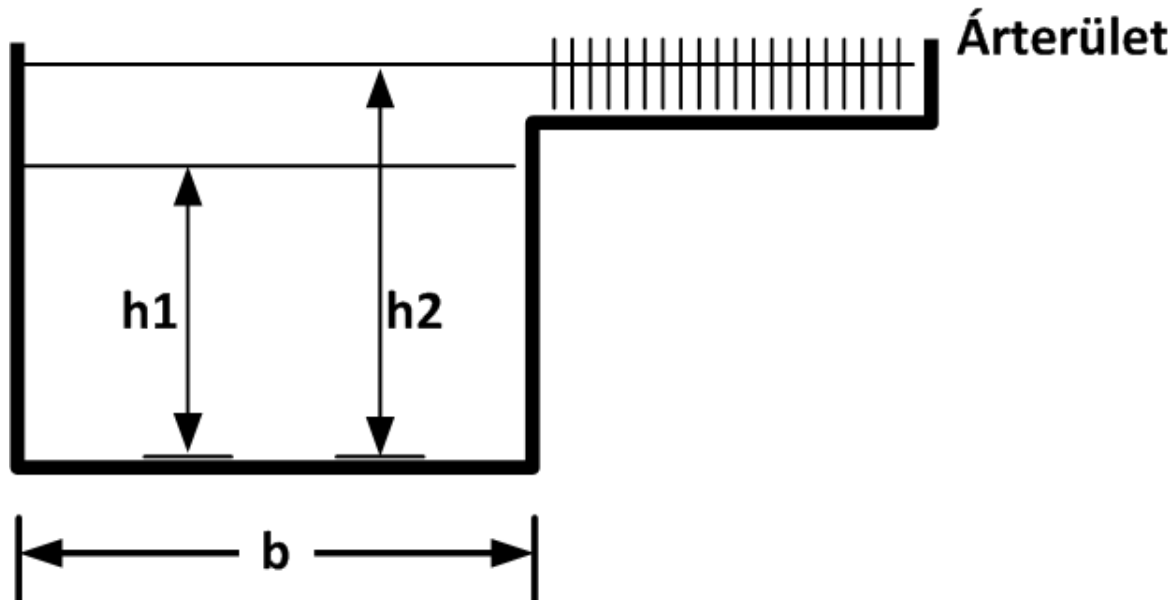
29.2.2. Feladat

Egy szélesebb medrű folyó mederdőlése S_1 -ről S_2 -re változik, ahol $S_2 < S_1$. Feltételezzük, hogy a mederfenék mindkét szakaszban ugyanakkora. Állandó és egyenletes áramlás érdekében határozd meg melyik résznek nagyobb a hosszirányú diszperziója. Két eset lehetséges:

- a medermélység állandó
- a mederszélesség állandó

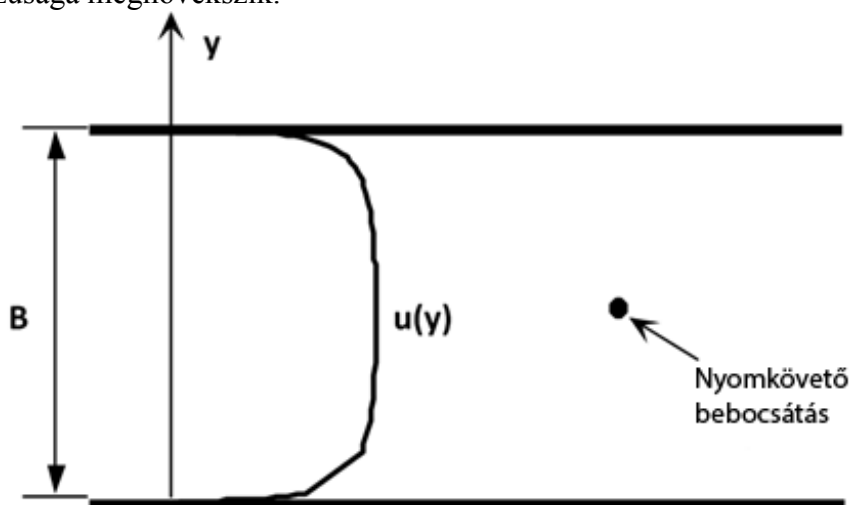
29.2.3. Feladat

Az alábbi ábra egy hosszú, egyenes folyó keresztmetszetét ábrázolja, ami ugyanakkora az egész folyó mentén. Amikor az áramlási mélység h_1 , akkor a meder keresztmetszete derékszögű. Amikor az áramlási mélység h_2 , az árterület a meder része lesz. Feltételezzük, hogy ugyanaz az áramlási sebesség (Q) áll fenn mindkét esetben. A kérdés: megváltozik-e a hosszirányú diszperzió ahogyan az áramlási mélység h_1 -ről h_2 -re változik. Indokold és ábrázold a megoldást



29.2.4. Feladat

Egy kis mennyiségű jelölőanyagot a meder középső részén bocsátunk ki. A meder nagyon mély, tehát a vertikális vágás és a vertikális terület határértékeit figyelmen kívül hagyhatjuk. A meder szélessége B és az izotróp diffúzió D . Mutasd be a felhő alakulását $t_1 \ll B^2/4D$ and $t_2 \gg 0.4 B^2/D$ pontban. Jellemezd minden időegységénél a felhő alakját és azt a mértéket, amely mellett a felhő hosszúsága megnövekszik.



29.3. Megoldások

29.3.1. Megoldás

Diffúzió. Egy olyan speciális kifejezés, ami a nettó áramlásra vonatkozik, és zéró átlagból indul ki random mozgásokkal. A random mozgások lehetnek Brown-féle mozgások, amelyek molekuláris diffúziót eredményeznek turbulens örvényeknek köszönhetően. Az örvények mérete szigorúan kicsi a részecskefoltokhoz képest azért, hogy az örvény valóban random jellegű és a nettó áramlás teljesen zavaros legyen.

Advekción. A koncentrációs részecskék átlagos áramlással végbemenő transzportja.

Diszperzió. Egy olyan tág fogalom, amit minden olyan folyamat leírására használunk, amelyek részecskék áramlására és a koncentráció csökkentésére irányulnak. Tipikusan egy olyan szóródási együttható, amely olyan advekción és diffúziós folyamatok kombinációját fejezi ki, ahol külön-külön nehéz lenne az értelmezés. Például a differenciált hosszanti irányú advekción és a keresztmetszeti diffúzió együttesen nyírás diszperziót eredményez. A különálló, többszörösen összetett áramlati útvonalak jelenléte (pl. porózus tömegben keresztül) szintén részecskék diszperzióját eredményezi, mivel a minden egyes útvonal keresztesítéséhez szükséges időt és a hajlasi szöveget együttesen gyakran görbületnek nevezzük. Tehát sok olyan részecske, ami együttesen szabadul fel, de különféle pórusú útvonalakra téved, hosszanti irányban végül szétválik (diszperzió). Végül a részecskék zérósebességű területre történő oldalirányú diffúziója (kimenettel nem rendelkező póruster, egy folyó oldalmedre, egy dugulás miatt létrejött nyomdokvíz) hosszanti irányú d, a diszperziót eredményez. Azok a részecskék, amelyek a zérósebességű zónákba jutnak, háttérbe szorulnak azokhoz a részecskékhez képest, amelyek nem esnek csapdába. Amikor a részecskék ténylegesen kikerülnek a „holtzónából”, a térben osztódnak (diszperzió) és leválnak a gomoly maradék részéről.

29.3.2. Megoldás

Egy széles mederben létrejött hosszanti irányú diszperzió képlete $K_x = 5.93u_* h$, ahol u_* jelöli a nyírás sebességet és h a vízmélységet. Hasonlítsuk össze a két lehetőséget:

$$(1) \quad \frac{K_{X1}}{K_{X2}} = \frac{u_{*1} h_1}{u_{*2} h_2}$$

Először azt kell meghatározni, hogyan alakul u_* az 1. és 2. számú tartományok között. 2. A meder által irányított állandó, egyenletes áramlat érdekében a lendületi egyensúlyt figyelembe véve a következőképpen alakul:

$$u_* = \sqrt{ghS}$$

23. egyenlet a 28.1
Vagyis

$$(2) \quad u_{*1} / u_{*2} = \sqrt{(h_1 S_1) / (h_2 S_2)}$$

Amennyiben a meder mélysége állandó, akkor az (1) egyenletből következik, hogy

$$\frac{K_{X1}}{K_{X2}} = \frac{u_*1}{u_*2} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} > 1$$

A diszperzió a meredekebb mederben jóval magasabb értéket ér el.

Amennyiben a meder szélessége állandó, akkor a meder mélységének fordított arányban kell változni a átlagmélység sebességével (U). Vagyis,

$$(3) \quad h_1/h_2 = U_2/U_1$$

Amennyiben az alsó réteg ugyanaz mindkét esetben, akkor arra következtethetünk, hogy U/u_* állandó. Formailag, a C_b , meder ellenállási együtthatót használva elmondhatjuk, hogy

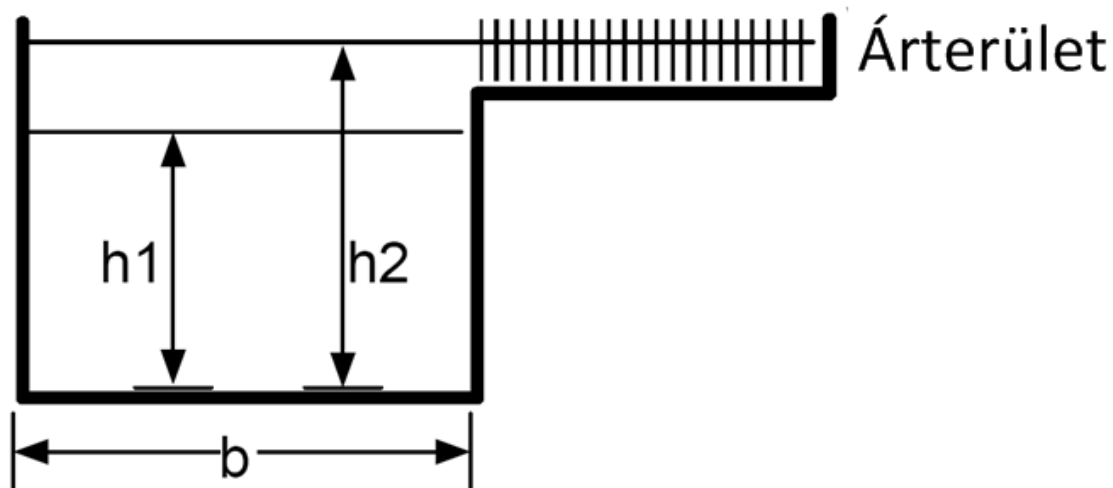
$$\tau_{bed} = \rho C_b U^2 = \rho u_*^2$$

ami azt is mutatja, hogy állandó C_b mellett az U/u_* hányados is állandó, *pl.*

$$(4) \quad U_1/u_*1 = U_2/u_*2$$

A (3) és (4) egyenletek összevonásával $h_1/h_2 = u_*2/u_*1$. Ezt a hányadost az (1) egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $K_{X1}/K_{X2} = 1$. Vagyis állandó mederszélességnél a hosszanti irányú diszperzió ugyanakkora mindkét tartományban.

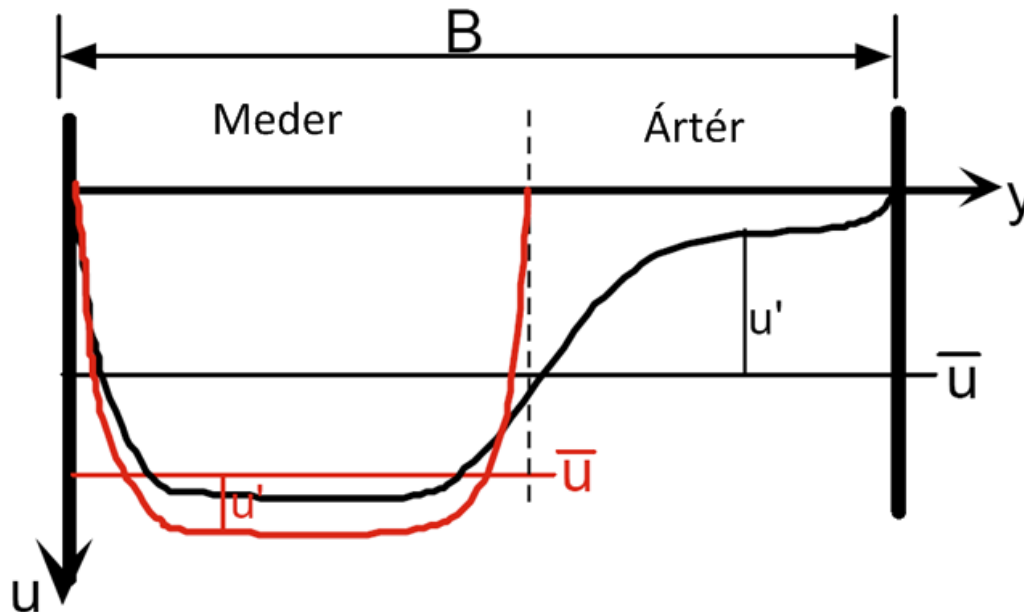
29.3.3. Megoldás



Amikor a vízmélység h_1 -ről h_2 -re emelkedik, az áramlat az árterbe kerül. A vegetatív ellenállás és a sekély mélység együttesen lelassítják az áramlást az árterületen a mederben lévő áramláshoz képest. Ez egy erős oldalirányú nyírást eredményez, ami meghosszabbítja a diszperziós folyamatot. A átlagmélységű sebesség oldalirányú szelvénye az alábbi ábrán látható, ahol az áramlat mélysége h_1 (piros vonal) and h_2 (fekete vonal). A fluktuációk sebességeit u' jelöli és a meder középsebességéből adódó szórások $\bar{u} = Q/A_{total}$ lesznek. A nyírási diszperzió (16. egyenlet, **29.1**) kifejezést használjuk az oldalirányú nyírásra,

$$K_x = \frac{1}{BD_y} \int_0^B u' \int_0^y \int_y^y u' dy dy dy$$

ahol az u' az ártér teljes szélességét jelöli. Az alábbi vázlatból kiderül, hogy a térbeli fluktuációk összege u' akkor nagyobb, amikor a vízmélység lehetővé teszi az ártérre történő áramlást, ebből az következik, hogy K_x értéke nagyobb vízmélységnél emelkedni fog. Ez egy sokkal nagyobb hatás, mint a hosszanti irányú szóródás növekedése, ami létrejöhet emelkedő szélességnél, ami a fenti egyenletből kifolyólag K_x értékét növelné. Különösképpen a hosszirányú szórás nem tud jelentős mértékben növekedni az ártéren keresztül a vegetatív ellenállás következtében.



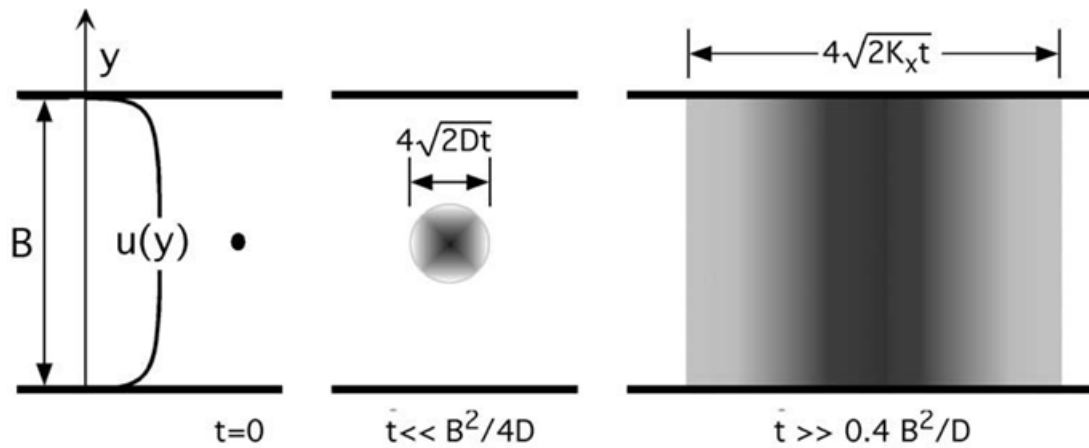
29.3.4. Megoldás

$t_1 \ll B^2/4Dy$ idő esetében: Amikor a jelölőanyag eleinte kiáramlik, az a meder szélességéhez viszonyítva jelentősen kisebb. A meder középső részén történő kibocsátás, valamint a sebesség szóródása (nyírás) a csóva mentén elhanyagolható, és a teljes csóva ugyanakkora sebességgel áramlik. Mivel a csóva esetében nem lép fel differenciált advekciónak, a felhő terjedése hosszanti irányban történik a hosszanti irányú diffúzióknak köszönhetően.

$$4\sqrt{2Dt}$$

Pontosabban, ha a kibocsátási pont $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, akkor a koncentrációs mező a következőképpen alakul:

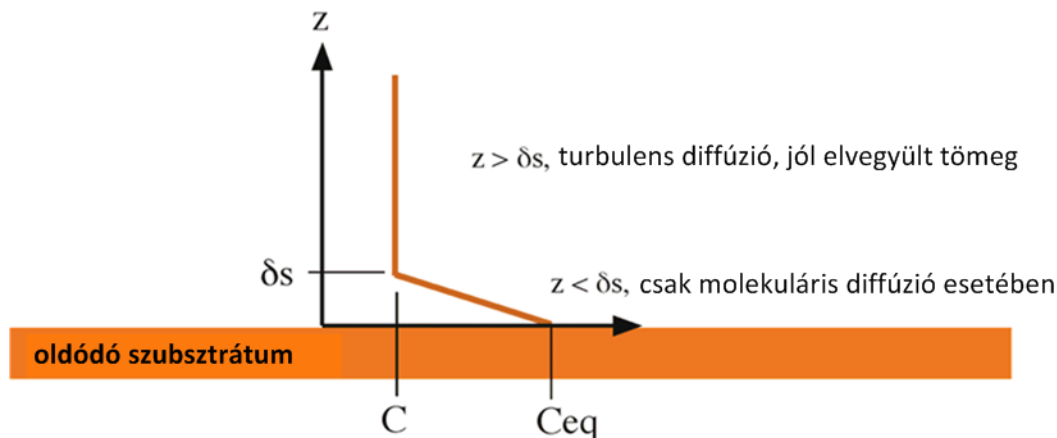
$$C(x, y, z, t) = \frac{M}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x-ut)^2}{4Dt} - \frac{y^2}{4Dt} - \frac{z^2}{4Dt}\right)$$



$t \gg 0.4 B^2/Dy$ idő esetében: Eddig az időintervallumig a csóva egyenesen növekszik úgy, hogy a medret oldalirányban kitölti. Továbbá, elegendő idő telt el a hosszanti irányú diszperzió létrejöttéhez is, és ahhoz, hogy az oldalsó nyírásnak köszönhetően Fick-féle magatartást mutasson. A csóva hosszirányú skálája így $4\sqrt{2K_x t}$, A csóva növekedési rátáját a diszperziós együttható (K_x .) határozza meg. Vertikális irányban a felhő tovább növekszik a vertikális diffúzió keresztül, így a koncentrációs mező a következőképpen alakul:

$$C(x, z, t) = \frac{M}{B4\pi\sqrt{DK_x t}} \exp\left(-\frac{(x - ut)^2}{4K_x t} - \frac{z^2}{4Dt}\right)$$

30. Reakció és határfelület váltakozása



Korábban azt feltételeztük, hogy a kémiai anyagok konzervatívak. Most bemutatjuk a diffúziós, diszperziós és advekciós vegyi anyagok kémiai reakcióba lépésének lehetőségeit. Azt a módszert ismertetjük, melyben elsőrendű reakciók a tömegmérleg egyenletbe kerülnek egy-, kettő- és háromdimenziós rendszerekben. Három fontos környezeti reakciót is megvizsgálunk részleteiben, név szerint (i) a réteg-oldódás folyamata, (ii) a víz-levegő cserefolyamatok (iii) és a partíciónálás folyamata.

Típushibák áttekintése során a felhasználó képes lesz arra, hogy a reakciókat értelmezze, pl. a felhő-koncentrációk megoldásaiban történő egységesítés, és hogy megbecsülje több vegyi anyag levegő-víz cserefolyamatait az áramlatok sokaságában.

30.1. Reakciók és cserefolyamatok

30.1.1. Reakció-Advekció-Diffúzió megoldások

Ebben a fejezetben megtudjuk, hogy a kémiai reakciók hogyan kerülnek a tömegmérleg egyenletbe mint felosztott pontforrások és elnyelési pontok, $\pm S$.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial C}{\partial z} \pm S$$

Több reakciót elsőrendű folyamatként kezelünk, melyeknél a kibocsátás és elnyelés gyorsasága arányos a már meglévő koncentrációval, pl. $S = kC$, ahol $k[T^{-1}]$ a sebességi állandó.

A radioaktív bomlás egy elsőrendű folyamat, melynek állandó sebessége $k = \ln 2/Z$, ahol Z a felezési idő. Biokémiai lebomlás (elsődlegesen szerves anyagok bomlási folyamata) is elsőrendű folyamatként kezelhető, csak úgy mint az UV sugárzás általi fotokémiai lebomlás. n. Miközben a z említett folyamatok egy folyékony halmazállapotú tartományban reagálnak, olyan folyamatok, melyek a tartományi felülethez vagy hozzáadnak, vagy elvesznek egy kémiai anyagot, is pontforrások vagy elnyelési pontok. Például, egy szilárd felület bomlása egy likvid tartomány forrása lehet, míg szorpciós folyamat a szilárd felszínen elnyelési pontot képezhet.. Ehhez hasonlóan, víz-levegő cserefolyamatok vagy pontforrásként, vagy elnyelési pontként funkcionálnak egy folyékony halmazállapotú közegben.

Ha a folyadék jól elvegyült, ezek a cserefolyamatok a felosztott forrás/elnyelési ponton keresztül modellezhetőek (S). Ha a tartomány nincs jól elkeverve, akkor a cserefolyamatok speciális felületi feltételeken keresztül kerülnek modellezésre, C vagy $\partial C/\partial n$, ahol n a

határfelületre merőleges dimenziót jelöli. Mindkét esetet – amikor a folyadék jól vagy kevésbé jól vegyült – ebben a fejezetben fogjuk kifejteni. De mielőtt rátérünk a felületi cserefolyamatok taglalására, először nézzük meg egy általános elsőrendű reakció pillanatnyi és folyamatos pontforrásokon kifejtett hatását.

Advekciónak és diffúzió jelenléte nélkül a tömegmérleg egyenlet a következő formára redukálódik:

$$(1) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \pm kC$$

ahol a + vagy – előjel, forrás vagy elnyelési pontot jelöl. Adott egy kezdeti koncentráció, C_0 , amelyik később növekszik vagy csökken.

$$(2) \quad C(t) = C_0 \exp(\pm kt)$$

Mivel a reakció elsőrendű, pl. lineáris C -ben, így az (1) egyenletet integrálhatjuk a folyadéktartományra, és így a következőt kapjuk:

$$(3) \quad \frac{\partial M}{\partial t} = \pm kM$$

és

$$(4) \quad M(t) = M_0 \exp(\pm kt)$$

Amennyiben a reakció magasabb szintű, pl. $\partial C / \partial t = K_2 C^2$, úgy az (1) egyenlet integráltjából nem következve a (3) egyenlet. Ami a lineáris reakcióval kapcsolatban egyértelmű, hogy (3) és (4) egyenletek egy rendszerben jelenlévő teljes tömegre vonatkoznak, még akkor is, ha a tömeg eloszlik vagy széteszik. Például, vegyünk egy pillanatnyi tömegkibocsátást (M) (x_0, y_0, z_0) pontban, egy határtalan közegben, egyenletes áramlásokkal (u, v, w), és homogén diffúziós együtthatókkal (D_x, D_y, D_z). A reakció nélküli koncentrációs mezőt a 26.1 (6) egyenletében taglaltuk, és itt újból említésre kerül.

3-D, Reakció nélküli pillanatnyi pontforrás (x_0, y_0, z_0)

$$(5) \quad C(x, y, z, t) = \frac{M}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{D_x D_y D_z}} \exp\left(-\frac{(x-x_0-ut)^2}{4D_x t} - \frac{(y-y_0-vt)^2}{4D_y t} - \frac{(z-z_0-wt)^2}{4D_z t}\right)$$

Ha a kémiai vegyület elsőrendű kémiai reakción megy keresztül, akkor a teljes tömeg (M) a (4) egyenletbe helyettesíthető be. A (4) egyenletet (5) egyenletbe helyettesítve megkapjuk az elsőrendű reakció koncentrációs mezőjét:

3-D, Pillanatnyi pontkibocsátás (x_0, y_0, z_0) elsőrendű reakcióval, kC

$$(6) \quad C(x, y, z, t) = \frac{M_0 \exp(\pm kt)}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{D_x D_y D_z}} \exp\left(-\frac{(x-x_0-ut)^2}{4D_x t} - \frac{(y-y_0-vt)^2}{4D_y t} - \frac{(z-z_0-wt)^2}{4D_z t}\right)$$

Haonlóképpen, L_y és L_z hosszarányok egy- és kétdimenziós rendszerei esetében:

2-D, Pillanatnyi pontkibocsátás (x_0, y_0) elsőrendű reakcióval, kC

$$(7) \quad C(x, y, t) = \frac{M_0 \exp(\pm kt)}{L_z 4\pi \sqrt{D_x D_y}} \exp\left(-\frac{(x-x_0-ut)^2}{4D_x t} - \frac{(y-y_0-vt)^2}{4D_y t}\right)$$

1-D, Pillanatnyi pontkibocsátás (x_0) elsőrendű reakcióval, kC

$$(8) \quad C(x, t) = \frac{M_0 \exp(\pm kt)}{L_z L_y \sqrt{4\pi D_x t}} \exp\left(-\frac{(x-x_0-ut)^2}{4D_x t}\right)$$

Ahhoz, hogy megtaláljuk egy folyással megegyező irányban áramló rektív, folytonos pontforrás koncentrációját, a 27.1 található reakció nélküli csóva levezetését követjük és egyesítjük a (7) és (8) egyenleteket. Miután az állandósult állapot bekövetkezik és $Pe \gg 1$,
3-D, Állandósult, folyamatos kibocsátás (x_0, y_0, z_0) elsőrendű reakcióval, kC

$$(9) \quad C(x, y, z) = \frac{\dot{m}}{4\pi \sqrt{D_x D_y (x-x_0)}} \exp\left(-\frac{u(y-y_0)^2}{4D_y (x-x_0)} - \frac{u(z-z_0)^2}{4D_z (x-x_0)}\right) \exp\left(\pm \frac{k(x-x_0)}{u}\right)$$

2-D, Állandósult, folyamatos kibocsátás (x_0, y_0) elsőrendű reakcióval, kC

$$(10) \quad C(x, y, z) = \frac{\dot{m}/u}{L_z \sqrt{4\pi D_y (x-x_0)/u}} \exp\left(-\frac{u(y-y_0)^2}{4D_y (x-x_0)}\right) \exp\left(\pm \frac{k(x-x_0)}{u}\right)$$

1-D, Állandósult, folyamatos kibocsátás (x_0) elsőrendű reakcióval, kC

$$(11) \quad C(x, y, z) = \frac{\dot{m}}{u L_y L_z} \exp\left(\pm \frac{k(x-x_0)}{u}\right)$$

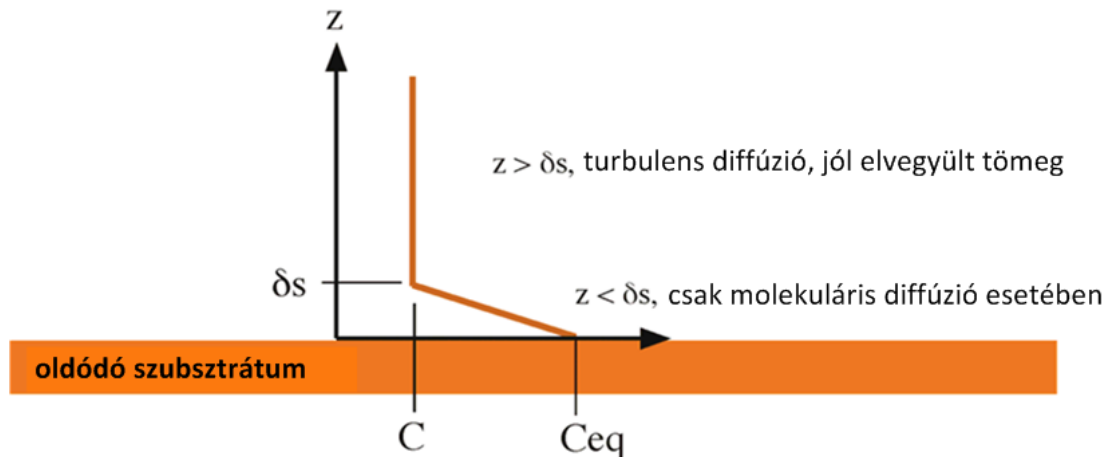
30.1.2. Oldódó

Turbulens áramlással vagy rapid rendszerkeveréssel végbemenő felületi disszolváció.

Ha egy folyadékrendszer felületén található kémiai anyag oldható, akkor a felület a kémiai anyag számára egy bomlási forráspont. Turbulencia által felkavart rendszerekben a bomlási áramlást a transzport sebesség irányítja a szilárd felületen található lamináris rétegen keresztül. Emlékezzünk vissza, a rétegen keresztüli transzport a molekuláris diffúzió sebessége mellett következik be, ami lassabb, mint a turbulens diffúzió. Az alábbi ábra azt a koncentrációs profilt szemlélteti, ami egy jól elvegyült rendszer felületén képződik. A koncentráció közvetlenül a felületen $C(z=0) = C_{eq}$, a kémiai egyenlőség miatt. Tehát azt feltételezzük, hogy a felületen oldott fázis egyensúlyban van a szilárd fázissal. Azt a sebességet, ahol a tömeg a felületről a folyadékba áramlik, a lamináris rétegen keresztül áramló tömeg diffúziós sebessége adja. Tehát a lamináris rétegen keresztüli transzport egy határértéket ad, és ezt az áramlást Fick-törvénye írja le.

$$(12) \quad \dot{m} [MT^{-1}] = Fluxus \delta s - ben = -D_m A \frac{\partial C}{\partial z} = -D_m A \frac{C - C_{eq}}{\delta s}$$

Az ábrán A-val jelöljük a bomló felület területét, és D_m az oldódó szubsztancia molekuláris diffúziós együtthatója. Hogy pontosan le tudjuk írni, hogyan hat az áramlat a folyadékon belüli koncentrációra (C), megadjuk a tömegmegmaradás egyenletét.



259. ábra: Koncentrációs profil oldódó felületnél, transzport által limitált áramlás lamináris alsó rétegen keresztül (δ_s)

$$(13) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial C}{\partial z} \pm S$$

Itt C -vel jelöljük a nagy terjedelmű folyadék koncentrációját, ahol $z > \delta_s$. Határozzuk meg a tömeg egy zárt rendszerét V , ahol az alsó rétegben oldódó kémiai anyagok találhatóak. A rendszer felkavart állapotú, de nincs jelen fő áramlat, tehát $u = v = w = 0$. Feltételezzük, hogy a rendszer eléggé felkavart ahhoz, hogy a koncentráció egyenletes legyen, kivéve a lamináris alsó rétegen belül. pl. $\partial/\partial y = \partial/\partial x = \partial/\partial z = 0$ a folyadéktartomány teljes terjedelmében. A tömegmegmaradás a nagyterjedelmű folyadéktartományban,

$$(14) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = +S$$

Ha a (14) egyenletet a rendszertömeggel (V) szorozzuk, akkor a forrásterminust felcserélhetjük a (12) egyenletben lévő diffúziós áramlattal

$$(15) \quad V \frac{\partial C}{\partial t} = -D_m A \frac{C - C_{eq}}{\delta_s}$$

Az egyenletet átrendezve, megtaláljuk a megoldást a nagyterjedelmű folyadék kialakulására,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = - \left[\frac{D_m A}{V \delta_s} \right] (C - C_{eq}) = -k(C - C_{eq})$$

ahol $k = D_m A / V \delta_s$ az oldódási hányados állandó. Tehát, jól elvegyült folyadékközeg esetében a felületi forrást úgy kell kezelni, mintja a teljes tömegre lenne felosztva, pl. S -en keresztül, ahol

$$(16) \quad S = - \left[\frac{D_m A}{V \delta_s} \right] (C - C_{eq}) = -k(C - C_{eq})$$

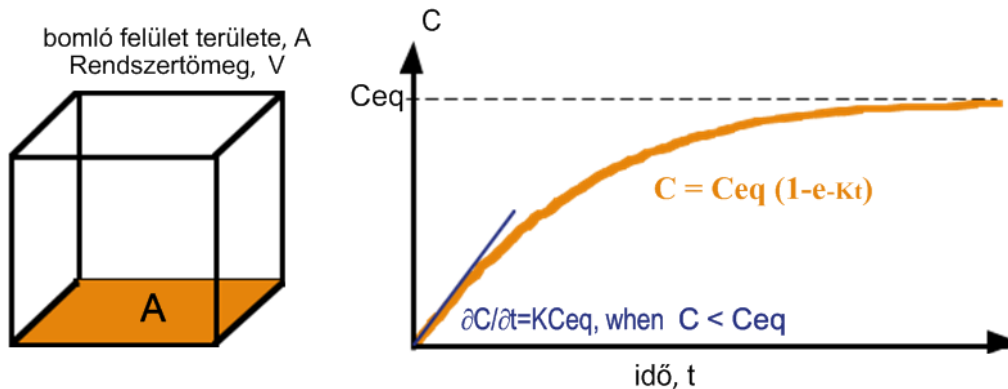
Az eredeti feltételezés szerint, $C(t=0) = 0$,

$$(17) \quad C = C_{eq} (1 - e^{-kt})$$

Ha $C \ll C_{eq}$, a (16) egyenletben található forrás állandó, és C értéke lineárisan növekszik,

$$(18) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = k C_{eq}$$

Vagylagosan, ha $C_{eq} = 0$, pl. egy bomló felület, akkor C exponenciálisan csökken, ahogyan azt az (1) és (2) egyenletek meghatározzák.



260. ábra: Felületi forrással kialakult koncentráció

Példa: Gipszrétegből való kioldódás.

Adott egy patak 100 méteres gipsz alapú folyamágó szekciója, amelyből kalcium szivárog a vízbe. Az áramlási sebesség $U = 20$ cm/s, a meder mélysége $h = 50$ cm, és a meder szélessége $b = 100$ cm. Becsüljük meg a kalcium koncentrációt a vízben, a gipszkiterjedés végén. Feltételezzük, hogy a patakban nincs kalcium a gipszszivárgás előtt. A víz kalciumkoncentrációja 600 gm^{-3} a szilárd fázissal való egyensúlyakor. Molekuláris diffúziót feltételezünk a kalcium esetében, ami $D = 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

Megoldás.

Először ellenőrizzük, le hogy az áramlás turbulens vagy sem. A **28.1** tudjuk, hogy egy áramlás akkor turbulens, ha a Reynold-szám a hidraulikus sugáron alapszik, $R_H = hb/(2h+b) = 25$ cm. Tehát, $Re = (20 \text{ cm s}^{-1} \times 25 \text{ cm}) / (0.01 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}) = 50,000$. Vagyis a mederáramlás turbulens, és azt feltételezzük, hogy a koncentráció jól elvegyült a keresztmetszeten keresztül, pl. $\partial C / \partial z = \partial C / \partial y = 0$. Ha a Peclet-szám (Pe) nagyobb, mint 1, akkor a hosszirányú diszperziót figyelmen kívül hagyjuk, az advekcióna tekintettel. Megbecsüljük a hosszirányú diszperziót, $K_x = 5.9u_*h$, a következő relációt használva $u_* = 0.1U$. Minden egyes hosszúságra igaz, hogy $L = 100$ m, a Peclet-szám $Pe = UL/K_x = UL/(0.59Uh) \approx 330 \gg 1$. Végül állandósult állapotot feltételezünk, $\partial C / \partial t = 0$. A tömegmegmaradás ezután leegyszerűsíti a képletet, $u \partial C / \partial x = S$. Ha a szivárgás során $C \ll C_{eq}$, használhatjuk a (18) egyenletet, hogy a kalciumforrást meghatározzuk, pl. $S = kC_{eq}$

$$(19) \quad u \frac{\partial C}{\partial x} = kC_{eq}$$

Tegyük fel, hogy $x = 0$ a gipszszivárgás kezdetén, és $C(x=0) = 0$ adott, akkor

$$(20) \quad C(x) = (k C_{eq} / U) x$$

A sebességi állandó értékelve $k = D_m A / (V \delta s)$, meg kell becsülnünk δs értékét. Mivel $u_* \approx 0.1U$, δ_s m, a tömegsebesség V , a mederágy területe A amélység $h = 5v/u_* = 0.025$ cm = 2.5×10^{-4} m.

$$k = D_m / h \delta s = (10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}) / (0.5 \text{ m} \times 2.5 \times 10^{-4} \text{ m}) = 8 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

A (20) egyenlet alapján a koncentráció mértéke $x = 100\text{m}$ pontban $(8 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1})(600 \text{ gm}^3)(100\text{m})/(0.2\text{ms}^{-1}) = 2.4 \text{ gm}^{-3} \ll 600$, confirming our assumption $C \gg C_{eq}$.

Felületi oldódás lamináris áramlással vagy lassú keveredéssel.

Ha vegyülési feltételek gyengék, a lamináris alsó rétegen kívüli koncentrációs mező nem lesz egyenletes, és a gradiens terminus (pl. $\partial C/\partial z$), nem esik ki a transzport egyenletből úgy, mint ahogy az történt a fent leírt jól vegyülő rendszerben. Továbbá, ha a folyadéktartomány nem lamináris, akkor nincs diszkrét lamináris alsó réteg.

Ilyen esetekben az áramlatot a diffúziós sebesség irányítja a tartományon belül. A felületi forrást a diffúziós áramlási terminus határozza meg, pl. $D_z \partial^2 C/\partial z^2$,

Határozzuk meg újra a folyadék diszkrét tömegét (V), az oldó felületi területtel (A) kontaktusban. A felületnél a koncentrációt a kémiai egyensúly határozza meg, $C(z=0) = C_{eq}$. Ha a forrás sosem merül ki, C_{eq} értéke állandó az időben. Továbbá, ha a medernek egyenletes kémiai összetétele van, akkor $C_{eq} \neq f(x,y)$, and we expect $C \neq f(x,y)$ a folyadékon keresztül. Az egyszerűség kedvéért az advekciót figyelmen kívül hagyjuk ($u = v = w = 0$). A mederágyban lévő forrást a felületi feltételek indokolják, $C(z=0) = C_{eq}$. A tömegmegmaradás egyenlete a következő lesz:

$$(21) \quad \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

a felületi kondíciókkal ;

$$C = 0, \text{ for all } z, \text{ at } t < 0$$

$$C = C_{eq} \text{ at } z = 0 \text{ for } t \geq 0;$$

a megoldás

$$(22) \quad C(z, t) = C_{eq} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

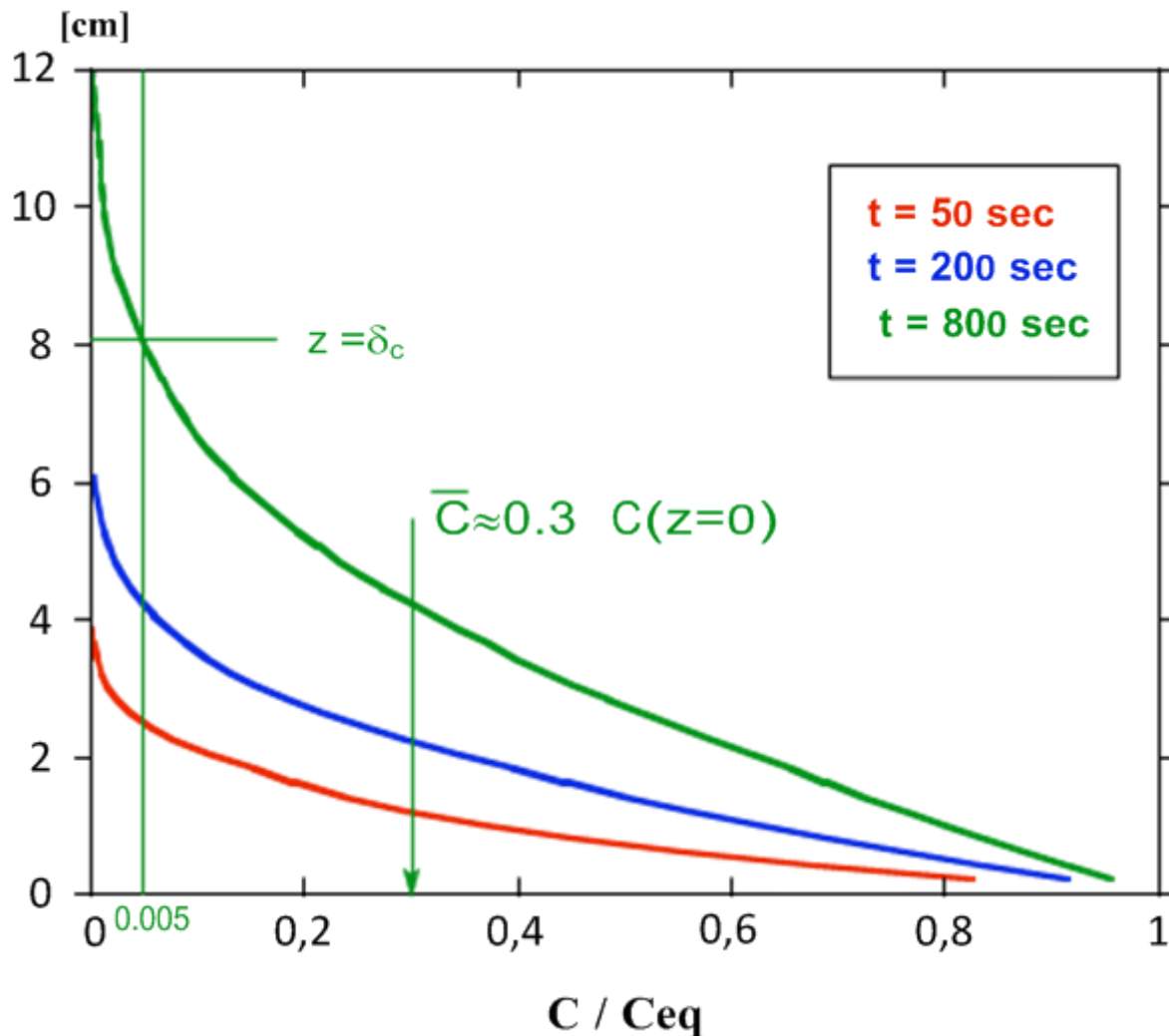
A kiegészítő hibafüggvényt (erfc) a **27.1** taglaltuk. A $C(z)$ alakulását a (22) egyenlet adja, és a **261. ábra** szemlélteti. Az idő múlásával a határfelület közelében lévő régió mérete növekszik. Megegyezés szerint meghatározzuk a koncentrációs felületi réteg határait, $z = \delta_c$, abban a magasságban, ahol $C/C_{eq} = 0.005$. A (22) egyenletből és hibafüggvény táblázatból látszik, hogy ez a $z/(2\sqrt{Dt}) = 2$ pontban lesz, vagy

Koncentrációs Felületi réteg az állandó koncentrációs forrás felett

$$(23) \quad \delta_c = 4\sqrt{Dt}$$

Az alábbi koordinátarendszerben a határfelületi réteg magasságát a $t = 800\text{s}$ pontban határozzuk meg, és érdemes megjegyezni, hogy a határfelületi rétegen belüli átlagkoncentráció

$$(24) \quad C = \frac{C_{eq}}{\delta_c} \int_{z=0}^{z=\delta_c} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right) dz \approx 0.3 C_{eq}$$



261. ábra: A koncentráció kialakulása az állandó koncentrációs határfelület felett. A határfelületi koncentráció egyensúlyban van a szilárd fázissal, $C(z=0) = C_{eq}$.

Az oldódási modell kiválasztása.

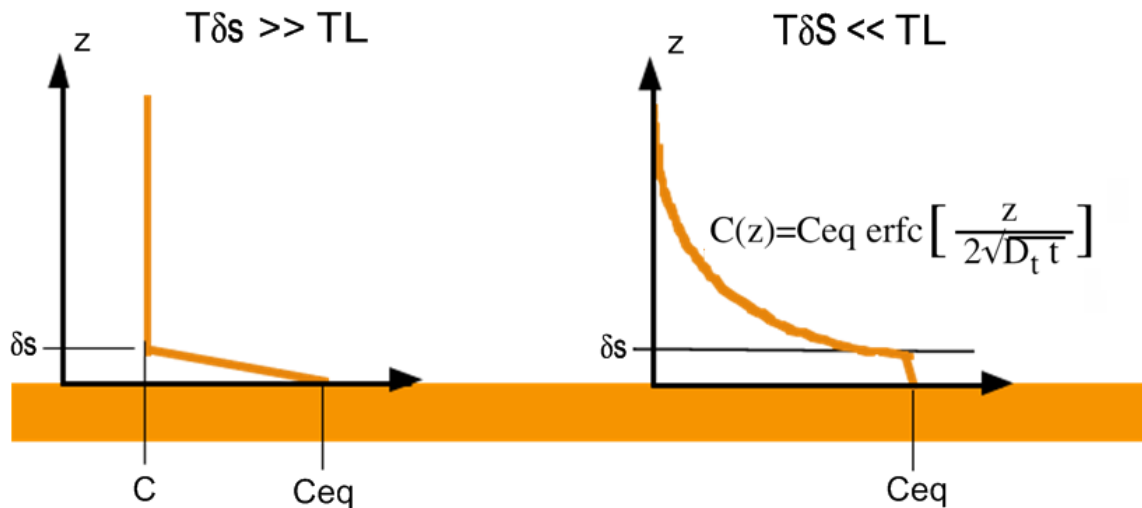
Amennyiben az áramlási mező lamináris, akkor nincs lamináris alsó réteg és csak a 2-es számú modell jöhet számításba. Ha az áramlás nem lamináris, úgy a mérték analízis határozza meg, hogy melyik modell illik legjobban az adott rendszerre. Össze kell vetni a lamináris alsó rétegbeli transzport mérték skálát T_{δ_s} , a folyadéktartományon kívüli lamináris réteg folyadéktartományában lévő transzport mértékskálájával T_L , ahol L a tartomány hosszanti mértéke, ami merőleges a határfelületre (h). A lamináris alsó rétegben a transzportot a molekuláris diffúzió irányítja, D . A fentiekben a lamináris rétegtranszportot a turbulens diffúzió kontrollálja, D_t . Ha $h \gg \delta_s$, akkor a hányados T_{δ_s}/T_L

$$(25) \quad \frac{T_{\delta_s}}{T_L} = \frac{\delta_s^2/D}{h^2/D_t} = \frac{\text{diffúzió ideje } \delta_s\text{-en át}}{\text{keveredés ideje } h\text{-n át}}$$

Ha $T_{\delta_s}/T_L \gg 1$, a kémiai anyag nagyon lassan jut el a nagy terjedelmű víztömegbe, ha ahhoz a sebességhez viszonyítjuk, amellyel összekeveredik, hogy a víztömegben egyenletes koncentrációt képezzen. A feltétel értelmében a koncentráció egyenletes a lamináris alrétegen kívül, és az 1-es számú modell lép érvénybe (259. ábra). Vagyis ha $T_{\delta_s}/T_L \ll 1$, a kémiai anyag

viszonylag gyorsan jut el az oldó szubsztrátumból és a lamináris alrétegen keresztül, de amint a nagyterjedelmű víztömegben van, sokáig tart, hogy elvegyüljön.

Ebben az esetben a víztömeg koncentrációja nem egyenletes, de a hibafüggvény eloszlását követi, ahogyan az a **261. ábra**.



262. ábra: A koncentráció megoszlása a határfelületen, lassú transzportot feltételezve lamináris alsó rétegben ($T\delta_s \gg TL$), és rapid transzportot feltételezve a lamináris alsó rétegben ($T\delta_s \ll TL$).

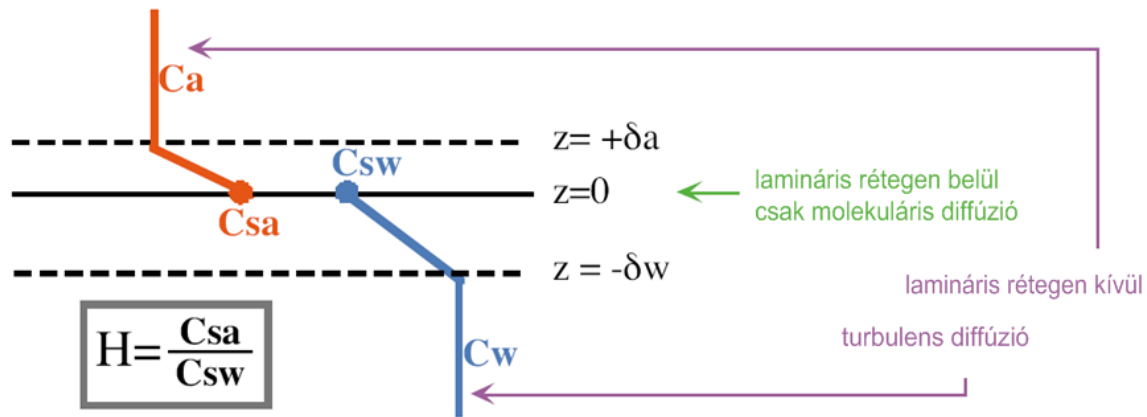
30.1.3. Levegő-víz cserefolyamatok

Volatilis kémiai anyagok partícionálhatnak a vízfázis és a levegőfázis között. Az egyensúlyi pontban, ezeknek a fázisoknak a sebességét a megoszlási együttható fejezi ki, amit más néven Henry együtthatónak is nevezünk és a következőképpen számítjuk ki:

$$(26) \quad H = \frac{\text{egyensúlyi koncentráció levegőben [tömeg/levegő térfogat]}}{\text{egyensúlyi koncentráció vízben [tömeg/víz térfogat]}}$$

Vékonyréteg modell levegő-víz cserefolyamatra.

A vékonyréteg modell azon a feltételezésen alapul, hogy lamináris alréteg van jelen a levegő-víz határfelület mindkét oldalán. A feltételezés a következő fizikai feltételezéseken és becsléseken alapul. Mivel a levegő-víz határfelületen jelenlévő sűrűségkülönbségek annyira nagyok, hogy a turbulencia struktúrák a folyadék mindkét oldalán nagyon merev felületként észlelik a határfelületet, nem úgy, mint egy rugalmas membránt. Ez azt jelenti, hogy mind a levegő oldalon és mind a folyadékkoldalon a turbulencia mértéke annyira lecsökken, miközben eléri a határfelületet, olyannyira, mintha egy szilárd felülethez érkezne. A határfelülettől számított kis távolságokon belül van egy olyan tartomány, amelynél a megengedhető turbulencia mértéke túl gyenge ahhoz, hogy viszkózus rétegeken áthatoljon, mivel nincs turbulencia ebben a tartományi részben és az áramlás is lamináris. A lamináris alréteg a határfelület mindkét oldalán jelen van. Ahhoz, hogy egy kémiai anyag eljusson a levegőből a vízbe vagy fordítva, át kell hatolnia mind a levegőoldali és a vízoldali lamináris alrétegeken. Ha azt feltételezzük, hogy a rétegek közti transzport irányítja a teljes áramlást, akkora a nettó tömeg megváltozik.



263. ábra: A vékonyréteg modell a volatilis anyagok cserefolyamatait írja le, a levegő-víz határfelületen keresztül olyan kondíciók mellett, mely szerint a transzportot a diffúziós folyamatok limitálják a lamináris alrétegeken keresztül. A felületen ($z = 0$) és a vízfázis (C_{sw}) egyensúlyban van a levegő koncentrációjával (C_{sa}), tehát $C_{sw} = C_{sa}/H$, ahol H a Henry hányados.

Vegyünk egy víz és egy levegő tömeget, amelyek kontaktusban vannak az A területen. Ahogyan az a **263. ábra** is látható, a lamináris alréteg jelen van mind a vízdalán (δ_w) és a levegőoldalán (δ_a) a határfelületnek. OA lamináris alrétegen kívül lévő turbulens diffúzió elég ahhoz, hogy kiegyenlítse a vízben (C_w) és a levegőben (C_a) lévő koncentrációt. WIa lamináris rétegek között csak molekuláris diffúzió van jelen, tehát állandó feltételek mellett a koncentrációs profil lineáris (mint ahogy minden diffúziós folyamat esetében). Végül, tegyük fel, hogy kémiai egyensúly van jelen a határfelület ($z = 0$) pontjában, tehát az oldott fázis koncentráció a felületen (C_{sw}) egyensúlyban van a levegőfázis koncentrációval a felületen (C_{sa}). Specifikusan, $C_{sw} = C_{sa}/H$, ahol H a Henry hányados. Utolsó kikötésként feltételezzük, hogy nincs forrás vagy elnyelési pont a lamináris alrétegeken belül, így a tömegmegmaradásból megtudjuk, hogy vízdalali felületi rétegen keresztüli áramlatnak egyensúlyban kell lenni a levegőoldali felületi réteggel. A kikötésnek megfelelően,

$$(27) \quad \dot{m} = -D_a A \left(\frac{\partial C}{\partial z} \Big|_{z=0} \right)_a = -D_w A \left(\frac{\partial C}{\partial z} \Big|_{z=0} \right)_w$$

fluxus δ_a -n át fluxus δ_w -n át

ahol D_a és D_w a levegőben és a vízben lévő molekuláris diffúziót jelenti. A végpont koncentrációt használva meghatározzuk a gradienseket a (27) egyenletben,

$$(28) \quad -D_a A \frac{(C_a - C_{sa})}{\delta_a} = -D_w A \frac{(C_{sw} - C_w)}{\delta_w}$$

Vegyük észre, hogy $C_{sw} = C_{sa}/H$, a (28) egyenletet megoldva megkapjuk C_{sa} értékét és behelyettesítjük a (27) egyenletbe,

Vékonyréteg modellen alapuló levegő-víz határfelületen történő áramlása

$$(29) \quad \dot{m} = \frac{(C_w - C_a/H)A}{\frac{\delta_w}{D_w} + \frac{\delta_a}{H D_a}}$$

Kettő határértéket határozhatunk meg a (29) egyenletben. Ha $\delta_w/D_w \gg \delta_a/(H D_a)$, a második hányados nevezőjét elhagyhatjuk és a következőt kapjuk:

Vízdalali kontroll [tipikusan, $H \gg 0.01$]:

$$(30) \quad \dot{m} = D_w A \frac{(C_w - C_a/H)}{\delta_w}$$

Ezt a határt vízföldi kontrollnak nevezik, mivel a vízföldi felületréteg D_w és δ_w értékeken keresztül irányítja az áramlást. A levegőoldali feltételeknek megfelelően, δ_a és D_a , nincs hatással az áramlásra a (30) egyenletben. A másik határértéknél, $\delta_w/D_w \ll \delta_a/(H D_a)$, a (29) egyenlet első hányadosában a nevezőt elhagyhatjuk, és a következőt kapjuk, Levegőoldali kontroll [tipikusan, $H \ll 0.01$]:

$$(31) \quad \dot{m} = D_a A \frac{(H C_w - C_a)}{\delta_a}$$

Ebben a határértékben az áramlás a levegőoldali feltételektől függ, δ_a és D_a , értékeken keresztül, függetlenül a vízföldi kondícióktól, különösen D_w and δ_w . A következő táblázat azt jelzi, hogy δ_w/D_w tipikusan nagyobb, mint δ_a/D_a . Ezután $\delta_w/D_w \gg \delta_a/(H D_a)$, $H \gg (\delta_a/D_a)/(\delta_w/D_w) = 0.01$. Tehát egy kémiai anyag áramlása úgy, hogy $H \gg 0.01$ mindenképpen vízföldi irányítású. Egy kémiai anyag áramlása úgy, hogy $H \ll 0.01$ levegőoldali irányítású.

12. táblázat: Tipikus nagyságrendek molekuláris diffúzióra és alréteg vastagságra :

	$D[\text{cm}^2\text{s}^{-1}]$	δ [cm] no wind	δ [cm] high wind	δ/D [s cm ⁻¹] no wind	δ/D [s cm ⁻¹] high wind
vízföldal	10^{-5}	10^{-2}	10^{-3}	1000	100
levegő oldal	10^{-1}	1	0.1	10	1

Példa. .

TCE áramlás egy tóból az atmoszférába.

Egy tó mélysége $h = 10\text{m}$ és felülete A . A tóba egyenletes koncentrációjú $C_w = 1\text{ ppb}$ [$\mu\text{g/l}$] TCE vegyszer került. A TCE illékony, tehát lassan áramlik az atmoszférába. A Henry szám $H = 0.4$.

Feltételezzük, hogy az erős, állandó szél a tavat felkavarva tartja és ez által gyorsan az atmoszférába juttatja a TCE vegyszert a tóból. Becsüljük meg azt az időintervallumot, mely alatt a tóban lévő TCE koncentráció 0.05 ppb értékre csökken.

Válasz. .

Mivel azt feltételezzük, hogy a tó felkavart állapotban van, így $\partial C/\partial x = \partial C/\partial y = \partial C/\partial z = 0$. Azt is feltételezzük, hogy nincsenek áramlások a tóban, ($u = v = w = 0$). Amennyiben nincsenek ki- és beáramlások a víztömegben, akkor az egyetlen elnyelési pont a TCE számára az atmoszféra. Ha $H = 0.4 \gg 0.01$, a TCE áramlatot a vízföldi lamináris alréteg kontrollálja és az egyenlettel tudjuk ábrázolni. A vegyi anyag kifejlődését a tóban a következő tömegmegmaradás egyenlet írja le

$$(32) \quad \frac{\partial M}{\partial t} = Ah \frac{\partial C_w}{\partial t} = -D_w A \frac{(C_w - C_a/H)}{\delta_w}$$

Vegyük észre, hogy bár a tóból az atmoszférába történő áramlás pozitív irányú, pl közvetlen felfelé, az áramlás tömegvesztést eredményez a tóban, és elnyelési pontként jelentkezik a (32)

egyenletben. Ha a szél az összes TCE anyagot elhordja ami az atmoszférában lép, akkor a légköri koncentráció 0 marad, $C_a = 0$. Ezután a (32) egyenlet a következő formára redukálható,

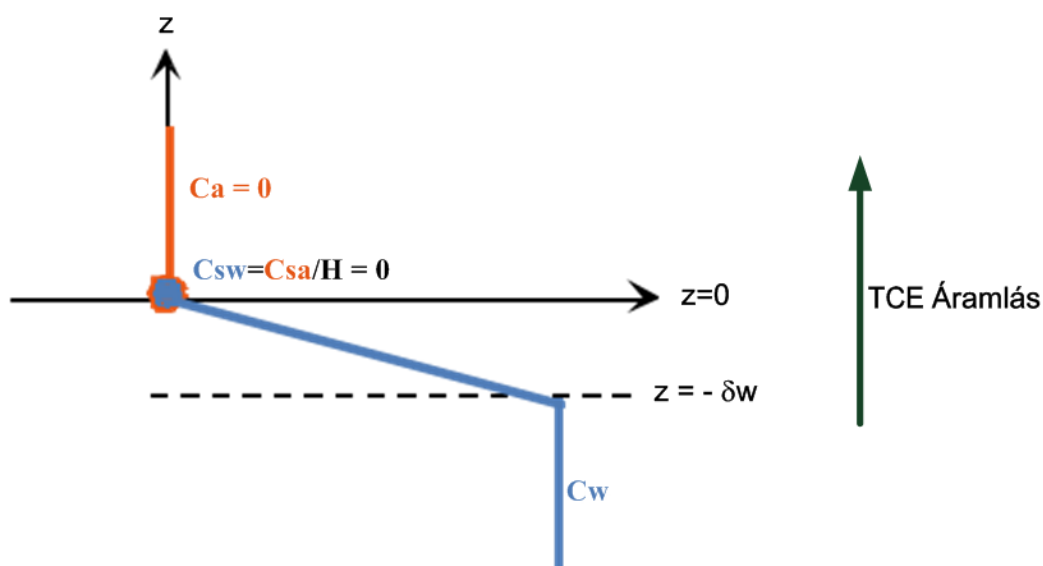
$$(33) \quad \frac{\partial C_w}{\partial t} = -\frac{D_w}{h \delta_w} C_w$$

Ez egy elsőrendű reakció, ahol a sebességi állandó

$$(34) \quad k = (D_w / h \delta_w)$$

A kezdeti koncentrációval $C_w = C_{w0}$, a tóban lévő koncentráció alakulása a következő,

$$(35) \quad C_w(t) = C_{w0} \exp\left(-\frac{D_w}{h \delta_w} t\right) = C_{w0} \exp(-kt)$$



264. ábra: A tóból a légkörbe távozó TCE áramlatot a vízdali lamináris alréteg szabályozza. A levegőoldali alréteg figyelmen kívül hagyható, tehát $C_{sa} = C_a$. Továbbá, mivel $C_{sw} = C_{sa}/H$, így $C_{sw} = 0$

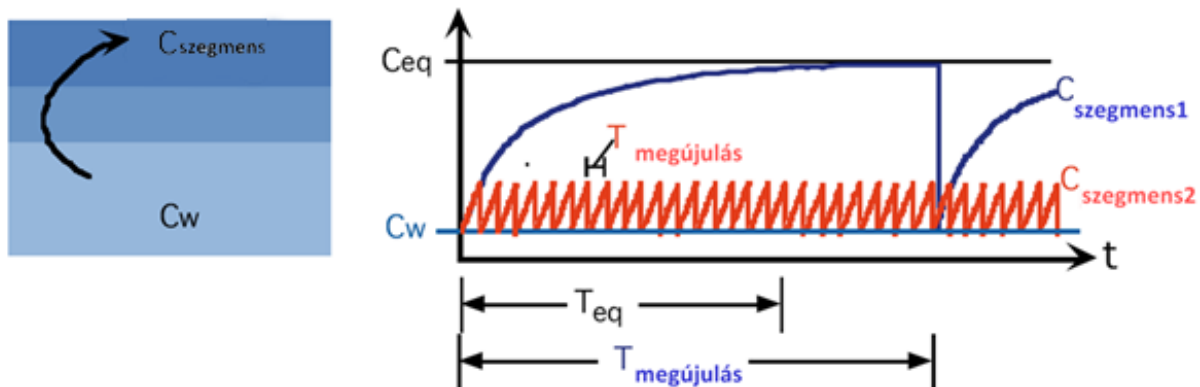
Szeles időjárási viszonyok mellett (**12. táblázat**), $k = (10^{-5} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}) / (0.001 \text{cm} \times 1000 \text{cm}) = 10^{-5} \text{s}^{-1}$. A $C_{w0} = 0.05$ ppb érték eléréséhez szükséges idő $t = 3/k = 3 \times 10^5 \text{s} = 3.4$ nap. Adott az időmérték, tehát megállapíthatjuk azt a feltételezést, miszerint a tóban lévő koncentráció egyenletes marad. Ahhoz, hogy ez bekövetkezzen, a tóban lévő vertikális transzportfolyamatoknak sokkal rövidebbnek kell lenni, mint az áramlás időmértékének, ($T_{\text{flux}} = 3.4$ nap). Amennyiben ez nem így van, a TCE sokkal gyorsabban távozik a vízfelszínről, mint ahogyan az alsó rétegekből feláramlik, és így vertikális gradiensek keletkeznek a tó koncentrációjában.

Valójában, a vertikális keveredési időmértéknek, T_{mix} , nagyságrendekkel kisebbnek kell lenni, mint a tóban lévő vertikális transzport áramlása, T_{flux} hogy az atmoszférában történő áramlást ne gátolja. Nem valószínű, hogy a 10 m mély tó egyenletesen elkeveredik $T_{\text{mix}} \leq 0.34$ nap időmértéken belül. Tehát azt várjuk, hogy a légkörbe távozó TCE veszteségnek a vertikális transzportsebesség valamilyen mértékben gátat szab a tóban. Ezt figyelembe véve, a becslült $T_{\text{flux}} = 3.4$ nap időmérték egy alacsonyabb határérték annál az időnél, ami a TCE 95%-ának tóból való eltávozásához kell.

Felületmegújító modell levegő-víz cserefolyamatokra.

A vékonyréteg modell esetében a levegőben és a vízben lévő lamináris alrétegek az idő során megtartják folyadék identitásukat, pl. ezekben a rétegekben lévő folyadék mozdulatlan, a folyadéktartomány többi részéhez képest. Annak ellenére, hogy ez a modell mérsékeltnek mondható, amikor a nagyterjedelmű víztömegben a turbulencia gyenge, a mozdulatlan réteg erőteljesebb turbulencia hatására leválik. Először, ahogyan a turbulencia erősödik, a lamináris alréteg csökkenni kezd, majd egy bizonyos pontot elérve elhanyagolható. Másodszor, erőteljes turbulens örvények nagyobb folyadékszegmenseket képesek hordani közvetlenül a határfelülethez, a lamináris alrétegeken áttörve. Amikor új folyadékszegmensek érkeznek a levegő-víz határfelülethez, koncentrációjuk a nagyterjedelmű víztömeg koncentrációjával megegyezik. A határfelülethez való érkezést követően a szegmens azonnal a határfelület másik oldalával együttes egyensúly irányába mozdul el. Amint a folyadékszegmens eléri az egyensúlyi állapotot, a határfelületen keresztüli áramlás a szegmensen belül megszűnik. Ezzel a modellel a határfelület nettó áramlása attól a gyakoriságtól függ, amivel a határfelület mellett közvetlenül elhelyezkedő réteg megújul.

Példaképpen megfigyeljük az oxigént, melynek vízdoldali áramlása korlátozott ($H_{O_2} = 26$), tehát kizárólag vízdoldali felület megújulást kell figyelembe venni. Tegyük fel, hogy átlagosan a felülettel szomszédos vízréteg teljes mértékben megújul egy időskálán belül, $T_{\text{megújulás}}$. Tovább, amikor az újabb folyadékszegmens a felszínre ér, olyan időmértékre T_{eq} van szüksége, ami alatt egyensúlyba kerülhet a léggörrel. Két eset lehetséges. Az egyik esetben $T_{\text{megújulás}} < T_{\text{egyensúly}}$, ekkor a felülettel szomszédos folyadékréteg soha nem éri el az egyensúlyi helyzetet. A másik amikor $T_{\text{megújulás}} > T_{\text{eq}}$, ebben az esetben a felülettel határos folyadék rendszeresen egyensúlyba kerül, és amikor így történik, a határfelületen keresztüli áramlás megszűnik. Ezt a két eshetőséget a **265. ábra** vizsgáljuk. Mivel az áramlás a koncentráció különbséggel lineárisan növekszik, $(C_{\text{szegmens}} - C_{\text{eq}})$, a legerőteljesebb áramlás akkor következik be, amikor ennek a különbségnek az átlagértéke a maximum értéket eléri. Ahogy azt a **265. ábra** is szemlélteti, rövid $T_{\text{megújulás}}$, erőteljes turbulenciával párosul, és a legnagyobb koncentrációkülönbséget és legerőteljesebb áramlást fenntartva

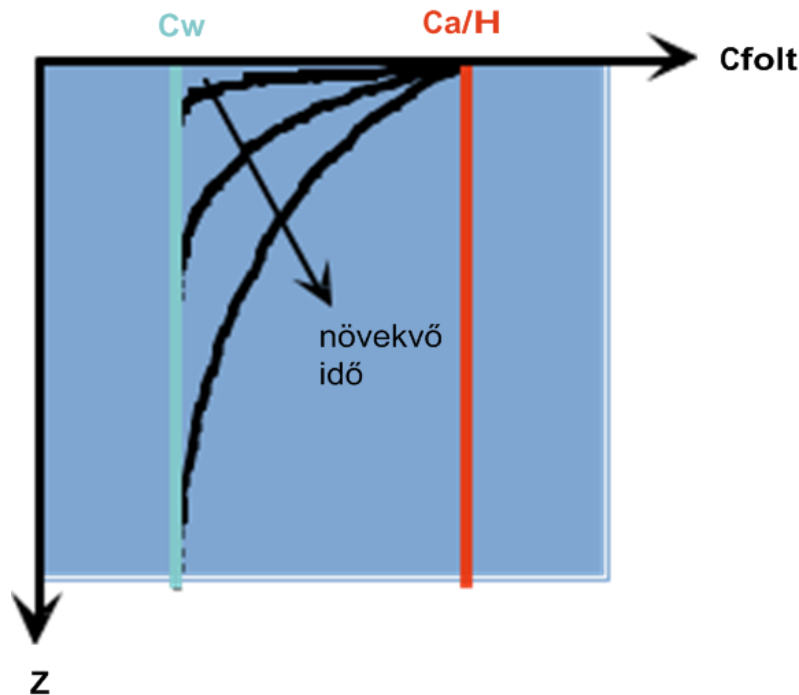


265. ábra: Az első esetben (kék görbe) a megújuláshoz szükséges időmérték hosszabb, mint az egyensúlyi időmérték. A második esetben (narancsszínű görbe) a megújuláshoz szükséges idő sokkal rövidebb, mint az egyensúlyi időmérték. A második esetben erőteljesebb áramlás jön létre, mivel a határfelületen jelenlévő átlagos koncentrációs gradiensek nagyobbak, $(C_{\text{szegmens}} - C_{\text{eq}})$.

Ahhoz, hogy a felületmegújuló modellen alapuló áramlást megbecsüljük, olyan folyadékszegmenst feltételezünk, ami $t = 0$ időben éri el a felszínt és kerül kölcsönhatásba a határfelület A területével. Mielőtt érintkezne a felszínnel ($t < 0$), a szegmensen belüli koncentráció mértéke C_w . Amint a szegmens eléri a felszínt, közvetlenül a felszínnél lévő folyadéktömeg ($z = 0$) azonnal egyensúlyba kerül a léggörrel, tehát $t \geq 0$, $C(z = 0) = C_{\text{eq}} =$

C_{sa}/H . Ez az állandósult állapot nagyon hasonló az alábbi (21) egyenlethez. A (22) egyenlet megoldását így átvesszük, úgy z a pozitív lefelé irányuló áramlás, $C_{sa} = C_a$ a szegmens koncentrációja és vízoldali szabályozást feltételezünk

$$(36) \quad C(z, t) = \left[\frac{C_a}{H} - C_w \right] \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{D_w t}} \right)$$



266. ábra: Egy új szegmensbe történő tömegdiffúzió $t = 0$ időpontban éri el a felszínt. Mielőtt a szegmens a felszínhez ér, ($t < 0$), $C = C_w$ a szegmens keresztüli. Mivel $t \geq 0$, a szegmens levegő határfelületén lévő koncentráció ($z = 0$) egyensúlyba kerül a levegővel, C_a/H .

A szegmensbe irányuló folyadék addig áramlik, amíg az új szegmens felcserélődik $t = T_{\text{megújulás}}$ időpontban. Ebben az időpontban a koncentrációs front már elérte a közeget $z = \delta_c = 4\sqrt{D_w T_{\text{megújulás}}}$. A szegmenst elérő tömeget meg tudjuk becsülni a (23) és (24) egyenletek alapján.

$$(37) \quad M \approx \bar{C} A \delta_c = 0.3 \left[\frac{C_a}{H} - C_w \right] A 4 \sqrt{D_w T_{\text{megújulás}}}$$

A nettó áramlás $\dot{m} = M / T_{\text{megújulás}}$, vagy

$$(38) \quad \dot{m} \approx A \left[\frac{C_a}{H} - C_w \right] \sqrt{\frac{D_w}{T_{\text{megújulás}}}}$$

Felületmegújító modell, vízoldali kontroll

A 266. ábra, az áramlás megnövekszik, amikor $T_{\text{megújulás}}$ csökken.

Érdeemes összehasonlítani ezt az áramlást a korábban becsülttel, a vékonyréteg modell alkalmazásával.

$$\dot{m} \approx D_w A \frac{(C_w - C_a/H)}{\delta_w}$$

Vékonyréteg modell , vízdoldali kontroll

Mindkét modell azt feltételezi, hogy az áramlás lineáris mértékben függ vízkoncentráció (C_w) és az egyensúlyi koncentráció (C_a/H). különbségétől. A modellek szerint az áramlás a paramétereken $T_{\text{megújulás}}$ és δ_w keresztül áramló folyadék feltételein múlik.

Ezek a paraméterek csökkennek a növekvő turbulencia szintjével, tehát mindkét modell egy lehetséges növekedést feltételez a növekvő turbulencia erősségével összhangban. Az is igaz, hogy a modellek a molekuláris diffúziótól eltérő függőséget feltételeznek. A megfigyelések függést feltételeznek, D_w^n , ahol $n = 0.5$ to 1 . Tehát az empirikus exponens az értékeken belül lesz, ebből az következik, hogy az áramlás a két modell kombinációjától függ. Általánosságban megállapítható, hogy a felületmegújító modell sokkal megfelelőbb gyorsfolyású vizek esetében (turbulens áramlások), mint pl. folyók, és a vékonyréteg modell az állóvizek elemzésére alkalmasabb, mint pl. tavak.

Végül, ha a légköri koncentráció elhanyagolható, $C_a \approx 0$, akkor mindkét modell elsőrendű reakciókra csökken le $\partial C_w / \partial t = k C_w$, a következő állandókkal egyetemben,

Vékonyréteg modell, vízdoldali kontroll, $C_a = 0$, $h = \text{vízmélység}$

$$(39) \quad k[s^{-1}] = \frac{D_w}{H \delta_w}$$

Felületmegújító modell, vízdoldali kontroll, $C_a = 0$, $h = \text{vízmélység}$

$$(40) \quad k[s^{-1}] = \frac{\sqrt{D_w / T_{\text{megújulás}}}}{h}$$

Ahhoz, hogy a (39) vagy (40) egyenleteket alkalmazni tudjuk, meg kell becsülni a fizikai paramétereket, δ_w vagy $T_{\text{megújulás}}$. Bármelyik paraméter becslése nehéz lehet a térben, hiszen a turbulens szerkezet olyan fokú jellemzését követeli meg, ami függ az áramlási sebességtől, a mederágy durvaságától, a meder egyenetlenségétől, és az esetlegesen jelenlévő hullámok erősségétől. Mivel ezek a paraméterek az áramlás fizikai aspektusaival állnak kapcsolatban, így minden egyes kémiai anyagnál fennáll ez az állítás. Tehát ha ismerjük egy kémiai anyag cserefolyamat sebességét vízdoldali kontroll mellett, ami függ δ_w vagy $T_{\text{megújulás}}$, értékektől, akkor felhasználhatjuk a (39) vagy (40) egyenleteket, hogy megbecsüljük a különböző kémiai anyagok reakcióját ugyanabban a rendszerben és ugyanolyan áramlási feltételek mellett. Például, ha tudjuk, hogy a cserefolyamat sebessége B anyag esetében, k_B , a molekuláris diffúzió, D_{wB} , akkor meg tudjuk becsülni C kémiai anyag cserefolyamat sebességét is, k_C , ahol a molekuláris diffúzió, D_{wC} .

$$(41) \text{ Vékonyréteg modell, vízdoldali kontroll: } \quad \frac{k_B}{k_C} = \frac{D_{wB}}{D_{wC}}$$

$$(42) \text{ Vékonyréteg modell, levegőoldali kontroll: } \quad \frac{k_B}{k_C} = \sqrt{\frac{D_{wB}}{D_{wC}}}$$

Hasonló analógia merül fel a két kémiai anyaggal kapcsolatban, mivel mindkettő levegőoldali szabályozású olyan fizikai paraméterekkel, amik levegőoldali szabályozásra utalnak, pl. D_a , $T_{\text{megújulás}}$, δ_a .

30.1.4. Particionálási folyamatok

Az előző részben meghatároztuk, hogy kémiai particionálási folyamatok levegő és víz közegek között befolyásolják a transzportot. Ebben a részben meghatározzuk, hogy a particionálás szilárd és folyékony fázisok (szorpció és deszorpció) között is befolyásolja a transzportot. Kétféle szorpció folyamat létezik. Az egyik az *adszorpció*, amikor a kémiai anyag a felszínhez tapad, a másik az *abszorpció*, amikor a kémiai anyag a szilárd szerkezetbe behatol és ott megköt. A kémiai részecske felületen való kötést a partíciós együttható határozza meg, K_d . Mint a HLMint a Henry hányados, a szilárdanyag/víz fázisban létrejött partíciót írja le, ahol a koncentrációs megoszlás minden egyes fázisban *egyensúlyban van*.

$$(43) \quad k_d = \frac{\text{szilárd anyaghoz társuló koncentráció [kémiai tömeg/szilárd tömeg]}}{\text{koncentráció vízben [tömeg/víz térfogat]}}$$

K_d tipikusan jelen van az egységekben, $\frac{mg / mg-solid}{mg / liter}$. Általánosságban, ha egy kémiai anyag particionál egy szilárd fázisba, mint például a talajvíz a talajszerkezetben vagy a felszíni áramlás a mederfalakon egy folyó esetében, a transzport ilyen esetekben lelassul azokhoz az anyagokhoz képest, amelyek nem particionálnak a felszínnel. Ez igaz mind az advekción és mind a diszperziós transzportfolyamatokra is. A szemléltetés érdekében, alrétegen történő áramlás az x koordináta mentén folyik. Az egyszerűség kedvéért egyenletes adottságokat feltételezünk a keresztmetszeti síkban. pl. $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$. Meghatározunk egy referencia-térfogatot, amelynek hossza dx és a keresztmetszeti terület A , ezt a **267. ábra** szemléltetjük. A talaj porózus n , és az átlag pórussebesség u_p . A tömegmaradás erre a referencia-térfogatra K_x diszperziós együtthatóval:

$$(44) \quad \frac{\partial M}{\partial t} = [u_p C_w A n]_1 - [u_p C_w A n]_2 + \left[-K_x \frac{\partial C_w}{\partial x} A n \right]_1 - \left[-K_x \frac{\partial C_w}{\partial x} A n \right]_2$$

áramlás be áramlás ki diszperzió 1-nél diszperzió 2-nél

Vegyük észre, hogy az egyetlen vízfázis koncentráció C_w , a (44) egyenlet áramlási terminusaiban vannak, mivel csak tömeg advektál a vízfázisban és diszperzál a folyadékmozgás hatására. A szilárd fázis koncentráció C_s , nem mobilis. Ha egy kémiai anyag partíciós időmértéke a két fázis között elhanyagolható, akkor feltételezhetjük, hogy a kémiai anyag mindenütt megtalálható és mindig egyensúlyban van, tehát

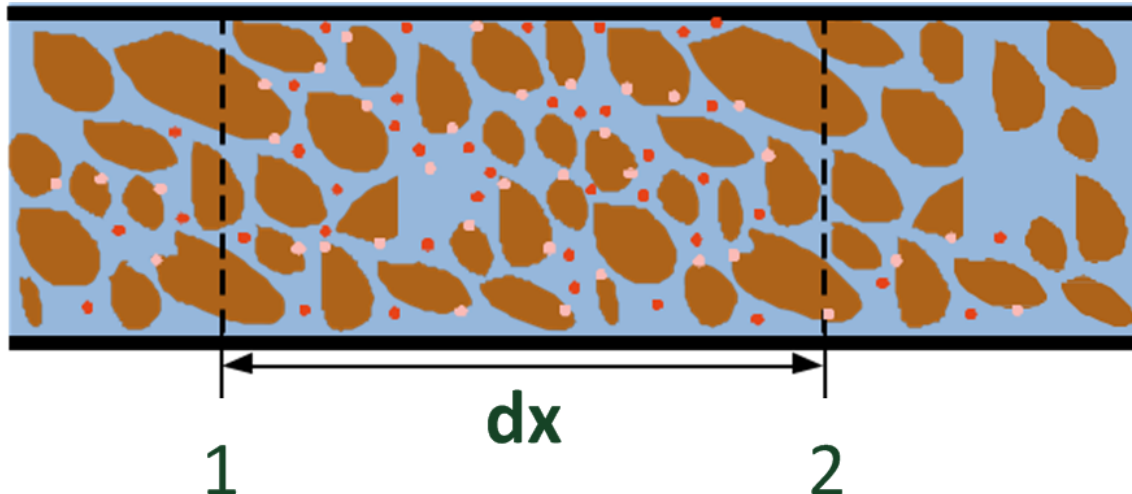
$$(45) \quad k_d \left[\frac{mg / mg-szilárd}{mg / liter} \right] = \frac{C_s}{C_w}$$

$f C_w$ és $\partial C_w / \partial x$ folyamatosak x értéknél, megbecsülhetjük, hogy $C_{w2} = C_{w1} + (\partial C_w / \partial x) dx$, and $\partial C_w / \partial x|_2 = \partial C_w / \partial x|_1 + (\partial^2 C_w / \partial x^2) dx$. Ezután a (44) egyenletről következően,

$$(46) \quad \frac{\partial M}{\partial t} = -u_p A n \frac{\partial C_w}{\partial x} dx + K_x A n \frac{\partial^2 C_w}{\partial x^2} dx$$

A teljes tömeg, M , szilárd és vízfázisú komponenseket is tartalmaz. Először meghatározzuk a talajszerkezet sűrűségét, ami $\rho_B = \text{talajszerkezet tömege} / \text{egységnyi tömeg}$, $V = A dx$, ezt követően felírható a teljes tömeg a referencia-térfogatban:

$$(47) \quad M = C_w n V + \rho_B V C_s$$



267. ábra: Az 1 és 2 számú határfelületek egydimenziós, alréteg által irányított keresztmetszeti tömeget feltételeznek. A talajszerkezetet barna színnel jelöltük az ábrán, a talajvíz pedig kék színű. A kémiai anyag tömege particionál a vízfázis (piros pontok) és a kötött fázis (rózsaszín pontok) között. Egyensúlyi állapotban a kötött fázisban lévő koncentrációs hányados (C_s), valamint a vízfázist (C_w) a particionálási együttható határozza meg, $K_d = C_s/C_w$.

Meghatározzuk a teljes koncentrációt,

$$(48) \quad C = M / V$$

Egyesítjük (45), (47) és (48) egyenleteket, így megkapjuk, hogy

$$(49) \quad C_w = \frac{C}{(n + \rho_B K_d)}$$

A (49) egyenletet alkalmazzuk a (46) egyenletben, és feltételezzük, hogy a porozitás, n , és sűrűség ρ_B , nem függvényei x -nek, akkor

$$(50) \quad \frac{\partial M}{\partial t} = V \frac{\partial C}{\partial t} = -u_p A \left[\frac{n}{(n + \rho_B K_d)} \right] \frac{\partial C}{\partial x} dx + K_x A \left[\frac{n}{(n + \rho_B K_d)} \right] \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} dx$$

Elhagyjuk $V = A$ kifejezést mindkét oldalról, a következőt kapjuk:

$$(51) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = -f u_p \frac{\partial C}{\partial x} + f K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

ahol f a vízfázisban jelenlévő teljes tömeg része. Mivel csak ez az egyetlen mobil tömeg, f a mobil függvény és az (50) egyenletben leírtak alapján számolható ki:

$$(52) \quad f = \frac{n}{n + \rho_B K_d}$$

A mobil faktor inverzét visszatartási faktornak nevezzük, $R = f^{-1}$. Ezt használva, az (51) átalakítva

$$(53) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{u_p}{R} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{K_x}{R} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Akár az (51), akár az (53) egyenletből is kiderül a transzportra irányuló partíciónáló hatás. Pontosabban, a sebességet (u_p) és a diszperziót (K_x) is az $f = R^{-1}$ együttható határozza meg. Ha $f = 1$, minden kémiai anyag a vízfázisban van, és a nem partíciónáló fajtákra vonatkozó egydimenziós transzportegyenletet alkalmazzuk. Ha $f < 1$, pl. a tömeg néhány szegmense a kötött fázissal azonosítható össze, a nettó advekción és a nettó diszperziót az f faktor lecsökkenti. Ezt leginkább úgy tudjuk szemléltetni, ha a két kémiai anyag transzportját összehasonlítjuk (az egyik partíciónál, a másik nem). Egy pillanatnyi tömegkibocsátás M esetében az $x = 0$ pontnál a koncentrációs mező áramlással megegyező irányban a következőképpen alakul

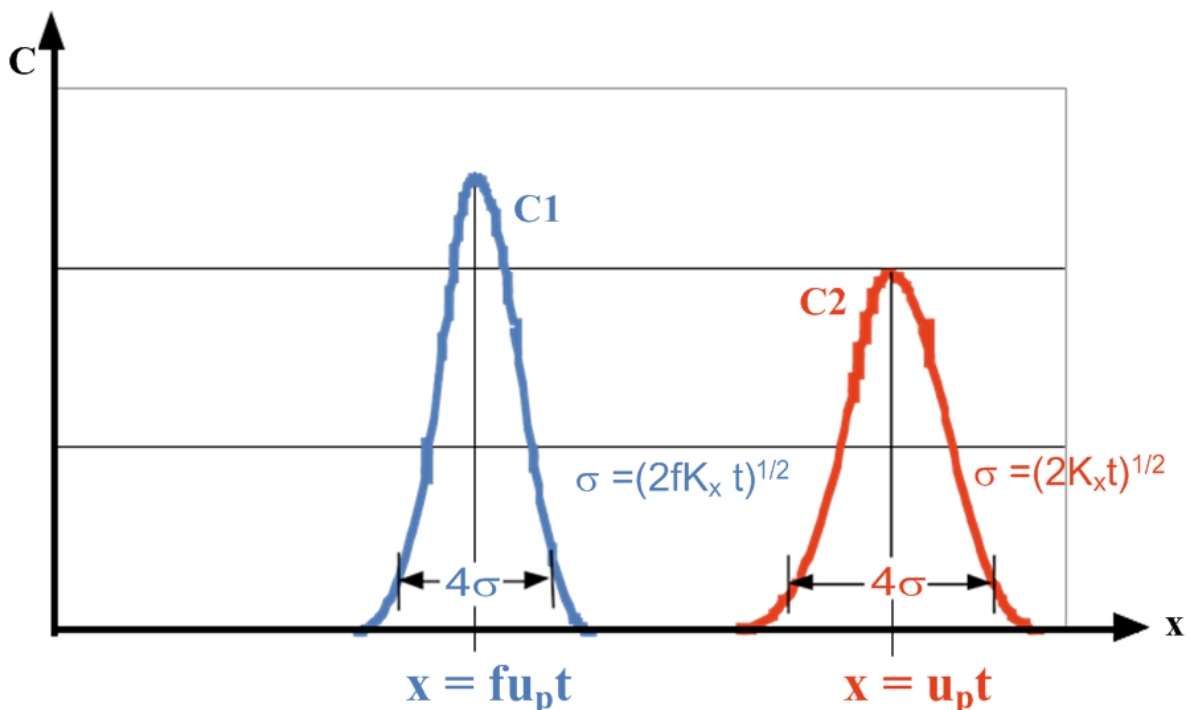
1. sz. kémiai anyag, partíciónál [$f < 1$]

$$C1(x, t) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi f K_x t}} \exp(-(x - f u_p t)^2 / 4f K_x t)$$

2. sz. kémiai anyag, nem partíciónál: [$f = 1$]

$$C2(x, t) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi K_x t}} \exp(-(x - u_p t)^2 / 4K_x t)$$

Ne felejtjük el, hogy $C1$ és $C2$ teljes koncentrációt képviselnek, C , amint azt a (48) egyenletben kifejtettük. Minden egyes esetben a vízfázis koncentrációját a (49) egyenlet megoldása adja, vagy csak egyszerűen $C_w = (f/n) C$. A C térbeli eloszlása a **268. ábra** látható, minden egyes kibocsátás esetében. A kibocsátást követő t időn belül a partíciónáló kémiai anyag, amely rövidebb ideig áramlott, $x_1 < x_2$, és hosszirányú terjedésen ment keresztül, $\sigma_1 < \sigma_2$, ezt követően nem fog partíciónálni.



268. ábra: Két megegyező tömegű, de különböző összetételű anyag egy egydimenziós talajvíz rendszerbe kerül pillanatnyi kibocsátással. A kibocsátási időpont $x = 0$. A talaj porozitás, $n = 0.4$. Az 1. sz. kémiai anyag partíciónál szilárd felületen, a 2. sz. kémiai anyag nem. Az 1. sz. kémiai anyag függvénye $f = 0.5$. Az ábra mutatja a teljes koncentráció-eloszlást, $C1$ and $C2$, t időben a kibocsátást követően. A partíciónáló 1. sz. kémiai anyag ($C2$) kevesebb ideig áramlik és kisebb területen oszlik szét, mint a nem partíciónáló 2. sz. kémiai anyag ($c2$).

Végül vizsgáljuk meg azt a feltevést, miszerint az oldott és kötött fázisok mindig egyensúlyban vannak. Vegyünk például egy kémiai felhőt, ami az alsó felszíni rétegben vándorol. A felhő hossz mértéke áramlással megegyező irányban 4σ , ahogyan az a **268. ábra** is látható. A középpórus sebessége u_p , az egy felhőhossz megtételéhez szükséges időmérték hossza $T_U = 4\sigma/u_p$. T_U annak az időnek a hossza, ami alatt a talajréteg bármely része a kémiai felhővel érintkezik. Tegyük fel, hogy a kémiai anyag felszívódik a talajban $k[s^{-1}]$ reakciós sebességgel. Ezekkel a feltételekkel a késleltető modell fog érvényben lépni, a fentiekben leírtak alapján. Ha $k^{-1} \gg T_U$, akkor a szorpciós/desorpciós időmérték elég hosszúnak tekinthető a felszívódáshoz képest, és a kötött fázis nem kerül egyensúlyba az oldott koncentrációjú fázissal. A kezdetben kötött kémiai anyag kötött és helyhez kötött marad, még azután is, hogy a fázis felhő továbbállt. Mivel a kötött fázis is késleltetett az oldott fázissal szemben ($k^{-1} \gg T_U$), lassú oldódási diszperziós folyamatok mennek végbe, amint azt a **258. ábra** is láthattuk.

**HIBAFÜGGVÉNY ÉRTÉKEK, erf(x),
ÉS KIEGÉSZÍTŐ HIBAFÜGGVÉNY, erfc(x),
X POZITÍV ÉRTÉKEIRE.**

x	erf(x)	erfc(x)	x	erf(x)	erfc(x)
0	0	1.0	1.1	0.880205	0.119795
0.05	0.056372	0.943628	1.2	0.910314	0.089686
0.1	0.112463	0.887537	1.3	0.934008	0.065992
0.15	0.167996	0.832004	1.4	0.952285	0.047715
0.2	0.222703	0.777297	1.5	0.966105	0.033895
0.25	0.276326	0.723674	1.6	0.976348	0.023652
0.3	0.328627	0.671373	1.7	0.983790	0.016210
0.35	0.379382	0.620618	1.8	0.989091	0.010909
0.4	0.428392	0.571608	1.9	0.992790	0.007210
0.45	0.475482	0.524518	2.0	0.995322	0.004678
0.5	0.520500	0.479500	2.1	0.997021	0.002979
0.55	0.563323	0.436677	2.2	0.998137	0.001863
0.6	0.603856	0.396144	2.3	0.998857	0.001143
0.65	0.642029	0.357971	2.4	0.999311	0.000689
0.7	0.677801	0.322199	2.5	0.999593	0.000407
0.75	0.711156	0.288844	2.6	0.999764	0.000236
0.8	0.742101	0.257899	2.7	0.999866	0.000134
0.85	0.770668	0.229332	2.8	0.999925	0.000075
0.9	0.796908	0.203092	2.9	0.999959	0.000041
0.95	0.820891	0.179109	3.0	0.999978	0.000022
0.1	0.842701	0.157299			

30.2. Feladatsor

30.2.1. Feladat

Egy $H = 20$ m magasságú kémény kétfajta gázt bocsát ki: di-klorid fluormetánt (Freon 12) és tri-klór etilént (TCE), mindkettőt 5 kg/min sebességgel. Freon 12 konzervatív gáz, TCE pedig elsőrendű degradáción megy keresztül az atmoszférában $k_{TCE} = 0.1$ nap⁻¹ sebességgel miközben az erősen mérgező foszgrén ($C(=O)Cl_2$, karbonil-klorid) gázt produkálja.

Feltételezzük, hogy a szél egyenletesen és egységesen fúj 5 m/s sebességgel a pozitív x irányban.

Az atmoszféra turbulencia homogén, de nem izotrópikus. A vertikális diffúzió $D_z = 0.1$ m²s⁻¹ és kisebb, mint a horizontális diffúziók $D_x = D_y = 1$ m²s⁻¹.

Mindkét gáz esetében a talaj fluxus-mentes felületként funkcionál. Találd meg a Freon és a TCE gázok maximális koncentrációját a kémény szél elleni oldalától 10 -km távolságban.

30.2.2. Feladat

Egy kis csatorna $h = 5$ cm mély és $b = 10$ cm széles. A benne lévő áramlás $U = 10$ cms⁻¹, a az áramlási irány koordinátája x . A vertikális koordináta z , és $z = 0$ a csatorna alsó peremén és felfelé irányban pozitív. A festékanyag $\dot{m} = 1$ gs⁻¹ sebességgel áramlik a csatornába középszélességnél és középhosszúságnál, ahol $x = 0$. Feltételezzük, hogy a csatornában a befecskendezési pontnál nincs folyásirány elleni festékáramlás. A csatorna alsó üledékrétege tökéletes nedvszívó a festékkel szemben, tehát a festékanyag koncentrációja a réteggel egyensúlyban van és értéke 0 , vagyis $C(z=0) = 0$. A molekuláris diffúzió a festékanyagra $D = 10^{-5}$ cm²s⁻¹. Mekkora a maximum koncentráció a csatornában a befecskendezési ponttól 20 méterre folyásirányban?

30.2.3. Feladat

A sűrű, nem akvatikus fázisú folyadékok olyan folyadékok, amelyek nehezebbek a víznél, nagyon alacsony oldódási fokkal rendelkeznek. Ilyen tipikus folyadékok a klórtartalmú oldószerek, mint pl. a vegytisztítók által használt perklór-etilén (PCE), más néven tetraklór-etilén. Amikor ezek a folyadékok víz közegbe kerülnek, a gravitáció hatására lesüllyednek és alacsony áteresztőképességű réteget képezve, mint pl. az iszap. Ezt követően szétáramlik egy még vékonyabb réteget képezve. Vegyük azt, hogy az [alábbi ábrán](#) egy PCE folyadék medre $t = 0$ időpontban. Ha $t < 0$ akkor a PCE koncentráció az akvifer-ben 0 .

Ha $t > 0$, akkor PCE lassan szétterjed a vízben. A diffúziós együttható $D = 4.4 \times 10^{-9}$ m²s⁻¹. A talajvíz mozdulatlan és az akvifer 2 m vastag a PCE folyadék felett. A PCE vízben oldódása 150 mg/L és a maximális szennyezettség szintje az ivóvízben 5 ppb. Mikor lesz a PCE koncentrációs szintje az akvifer-en keresztül a szennyezettség szintje fölött?



30.2.4. Feladat

Beazonosítottunk egy TCE pontforrást, ami egy kis patakot szennyez. A patak $h=20$ cm mély, $b=80$ cm széles és $U = 10$ cm/s sebességgel áramlik. A pontforrásnál ($x = 0$) a TCE gyorsan elkeveredik a meder mélységében és szélességében, ami a következő kezdeti koncentrációt eredményezi: $C(x=0)=C_0=10$ ppb. Meg kell határozni, mi történik akkor, amikor ha további TCE kerül a vízbe. Mivel a TCE volatilis és az atmoszférában lévő koncentráció elhanyagolható, ebből az következik, hogy a patakából az atmoszférába áramlik a TCE egy része. A TCE-re felírható Henry hányados $H_{TCE} = 0.42$, ami azt jelzi, hogy az áramlás a vízpart mentén kontrollált. Az atmoszférába kerülő TCE áramlás miatt várható, hogy a TCE koncentráció a folyásiránnyal megegyező irányban csökken. Valóban, ez az ismert pontforrástól $C_{2km} = 5$ ppb. 2 km távolságban következik be. Ahhoz, hogy a víz-levegő cserefolyamat sebességét megtudjuk, propánt fecskendezünk a patakba és megmérjük a koncentrációt [$H_{propán} = 0.42$] a folyó mentén. Ebből a tanulmányból kiderül, hogy $K_{propán} = 1.5 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. A molekuláris diffúziós együttható a TCE és a propán esetében $D_{w, TCE} = 0.75 \times 10^{-5} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ and $D_{w, Propán} = 1.3 \times 10^{-5} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$.

Határozzuk meg, hogy további TCE anyag található-e az $x = 0$ ponttól 2 km-es körzetben.

30.2.5. Feladat

Egy kis tó $h = 1$ m mély és felületi területe A . Három kémiai anyagot öntünk a tóba, amikor gyorsan elvegyülnek. Ezek a kémiai anyagok a következők: Lindane növény-védőszer ($w/Henry\text{-hányados } H_L = 2.2 \times 10^{-5}$), Toluol oldószer ($H_T = 0.28$), és Naftalin ($H_N = 0.04$). Feltételezzük, hogy a keveredés elég ahhoz, hogy minden egy kémiai folyadék esetében egyenletes koncentráció jön létre a tó térfogatában.

Molekuláris diffúzió a levegőben, $D_a = 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ mindegyik folyadék esetében

Molekuláris diffúzió a vízben, $D_w = 10^{-9} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ mindegyik folyadék esetében

Turbulens diffúzió a vízben, $D_{tw} = 10^{-3} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$

Lamináris alsóréteg a víz mentén, $\delta_w = 100 \text{ }\mu\text{m}$

Lamináris alsóréteg a levegő mentén, $\delta_a = 10 \text{ mm}$

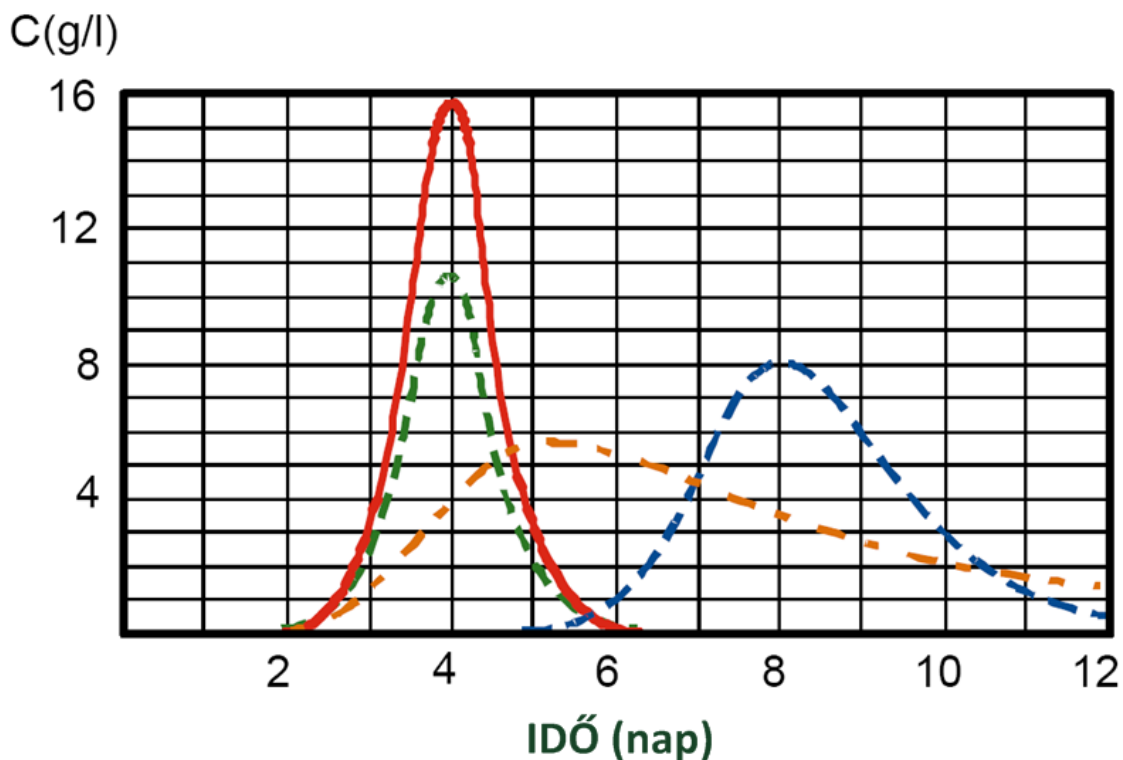
- Vázold fel a $C(z)$ profilt minden egyes vegyszer esetében. Jelöld be a koncentrációt a $z = 0$ pontnál, a levegő-víz felületet $z = -\delta_w$; $z < -\delta_w$; és $z = +\delta_a$ pontokban. Feltételezzük, hogy az atmoszféra tökéletes meder mindegyik vegyszer számára, tehát $C_a = 0$ és $z > +\delta_a$.

- b. Írd fel egyenletben a tömegáramlást minden egyes vegyszer esetében a levegő-víz felületen.
- c. Határozd meg azt az időpontot, ahol minden egyes folyadék csak 5%-át veszíti el az eredetileg megmaradt tömegnek.
- d. Melyik kémiai anyag esetében alkalmazható az egyenletes koncentráció feltétele?

30.2.6. Feladat

Egy 4 vegyszert tartalmazó vegyületet a talajvíz akvifer-be bocsátunk. Minden egyes anyag koncentrációját pórusvízben mérjük egy olyan vizsgáló kútnál, ami 8 méterre van a befecskendezési ponttól. Párosítsa össze a következő leírásokat az ábrán található görbékkel.

1. sz. vegyszer: egy konzervatív jelölőanyag, ami nem lép reakcióba és nem bomlik.
2. sz. vegyszer: a szemcsékkel nem adszorbeál, de mikróbák az akvifer-en belül képesek lebontani. Mekkora a degradáció mértéke, K_d [nap⁻¹]?
3. sz. vegyszer: szerves anyagokkal adszorbeál. Az adszorpció/deszorpció sebesség olyan gyors, hogy a víz/szerves anyag feloszlás mindig egyensúlyban van. Melyik Mekkora hányada ennek a vegyszernek egyeztethető össze a pórusvízzel, pl. a mobil fázisban?
4. sz. vegyszer: szerves anyagokkal adszorbeál, de egy sokkal alacsonyabb sebesség mellett, mint a 3. sz. vegyszer. Tehát a szervesanyag/víz partíció soha nincs egyensúlyban. Mekkora a terjedelme annak az állandó sebességnek, ami az adszorpció/deszorpció reakciót írja le?



30.2.7. Feladat

Éjfél és hajnali 2 óra között egy illegális szemétkerakó 2 db 5 literes, 2 kg Toluol-t tartalmazó hordót ürít egy elhagyatott sekély kútba. 24 órán belül a Toluol vertikálisan oszlik el a sekély (5 m vastag) homokos rétegben. A szemétkerakás 2 nappal később derül ki, és az a feladat, hogy felmérjük a kockázatot az ivóvíz kút 1 km-es körzetében, felételezve, hogy remediációs

beavatkozás nem történt. Előző tesztek az akvifer-rel kapcsolatosan a következő eredményeket adták:

Átlagos pórus sebesség, $u = 1 \text{ m /nap}$

Izotróp, homogén diszperzitás, $K = 0.1 \text{ m}^2/\text{nap}$.

Porozitás, $n = 0.3$

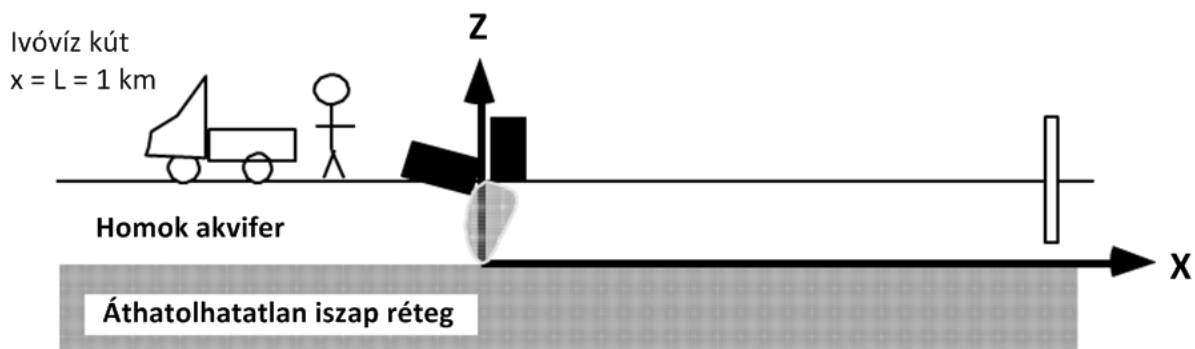
Szilárdtest sűrűség, $\rho_s = 2.6 \text{ g/mL}$.

A Toluol gyorsan particiál a szilárd afvifer-ben és a szilárdtest/víz partíciós együttható a következő lesz:

$$K_d = 0.5 \frac{g_{\text{toluol}}/kg_{\text{szilárdtest}}}{g_{\text{toluol}}/kg_{\text{víz}}}$$

Feltételezzük, hogy a Toluol partíciója mindenhol egyensúlyban van.

- Írj fel egy megfelelő transzport egyenletet.
- Becsüld meg az összes koncentrációt $C(t)$, az ivóvíz kútban.
- Becsüld meg a maximális koncentrációt a kútban lévő pórusvízben és a kitettség ideje alatt.



30.3. Megoldások

30.3.1. Megoldás

Egy folyamatosan működő kémény esetében és állandó klímafeltételekkel feltételezhetünk egy állandó koncentrációs mezőt is, pl. $\partial C/\partial t = 0$. A szél $u = 5 \text{ m/s}$ sebességgel fúj, beleértve $v = w = 0$. Egyenletes szélfúvást kell feltételeznünk, vagyis pl. nincs nyírás, így a nyírási diszperziót kizárhatjuk. A vizsgálódásunk hosszúsági skálája, $L_x = 10,000\text{m}$, a Peclet-szám pedig $(5\text{m/s})(10,000\text{m})/(1\text{m}^2/\text{s}) = 50,000 \gg 1$. A Pe magas értékével a hosszirányú diffúziót is kizárhatjuk a hosszirányú advekcióra vonatkozóan, tehát ezt is elvetjük. A fentiekkel egyetemben a transzport egyenletünk,

$$(a) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial c}{\partial z} \pm S$$

ebből

$$(b) \quad u \frac{\partial c}{\partial x} = D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - S$$

$S = 0$ a Freon esetében és $S = k_{\text{TCE}} C$ a TCE esetében.

Állandó kibocsátás érdekében $\dot{m} = 5 \text{ kg/min} = 83 \text{ gs}^{-1}$ az $(x,y,z) = (0, 0, H)$ pontnál, a megoldás (b)-re

$$(c) \quad C(x, y, z) = \frac{\dot{m}}{4\pi\sqrt{D_y D_z x}} \exp\left(-\frac{uy^2}{4D_y x} - \frac{u(z-H)^2}{4D_z x}\right) \exp\left(-\frac{kx}{u}\right)$$

ahol $k = 0$ a Freon esetében és $k = k_{TCE}$ a TCE esetében. Az áramlásmentes felület miatt egy pozitív pontforrást adunk hozzá a $(x,y,z) = (0, 0, -H)$ pontban.

$$(d) \quad C(x, y, z) = \frac{\dot{m}}{4\pi\sqrt{D_y D_z x}} \left[\exp\left(-\frac{uy^2}{4D_y x} - \frac{u(z-H)^2}{4D_z x}\right) \exp\left(-\frac{kx}{u}\right) + \exp\left(-\frac{uy^2}{4D_y x} - \frac{u(z+H)^2}{4D_z x}\right) \exp\left(-\frac{kx}{u}\right) \right]$$

valós forrás

tükörkép forrás

Bármely keresztmetszeti dimenzióban ahol a csóva nincs behatárolva (ebben az esetben az y irány), a maximális koncentráció a csóva középvonalán keletkezik (ahol $y = 0$). A vertikális koordináta egy áramlásmentes felülettel határolt a talajon, $z = 0$. Amint a csóva eléri a taljat, a koncentráció az áramlásmentes felületen alakul ki. Mivel a csóva felső széle nem határolt, a vertikális koncentrációs mező tulajdonképpen aszimmetrikus lesz a maximális koncentrációval a talaj mentén. Megbecsüljük azt a távolságot, amelynél ez kialakul úgy hogy a csóva szélénél alkalmazzuk az időskálát,

$$(e) \quad T_{2\sigma} = H^2/(8D_z) = (20\text{m})^2 / (8 \times 0.1 \text{ m}^2\text{s}^{-1}) = 500 \text{ s}$$

Tehát ha $x \gg u T_{2\sigma} = 2500 \text{ m}$, azt várjuk, hogy a maximális koncentráció a talajon legyen. Ezért a maximális koncentráció $x = 10,000 \text{ m}$ pontnál lesz $C_{\max} = C(x = 10000 \text{ m}, y = 0, z = 0)$. A (d) egyenletet a Freon-ra és a TCE-re kiértékelve azt látjuk, hogy,
FREON:

$$C_{\max} = \frac{83 \text{ gs}^{-1}}{2\pi\sqrt{(1\text{m}^2\text{s}^{-1})(0.1\text{m}^2\text{s}^{-1})10,000\text{m}}} \exp\left(-\frac{5\text{ms}^{-1}(20\text{m})^2}{4(0.1\text{m}^2\text{s}^{-1})10,000\text{m}} = 2.5 \text{ mg m}^{-3}\right)$$

TCE:

$$C_{\max} = \frac{83 \text{ gs}^{-1}}{2\pi\sqrt{(1\text{m}^2\text{s}^{-1})(0.1\text{m}^2\text{s}^{-1})10,000\text{m}}} \exp\left(-\frac{5\text{ms}^{-1}(20\text{m})^2}{4(0.1\text{m}^2\text{s}^{-1})10,000\text{m}}\right) \exp\left(-\frac{10000\text{m}}{5\text{ms}^{-1}}(0.1\text{d}^{-1})\left(\frac{d}{86400\text{s}}\right)\right) = 2.5 \text{ mg m}^{-3} \times 0.998 \approx 2.5 \text{ mg m}^{-3}$$

A TCE nagyon kis mennyiségben indul bomlásnak, kizárólag csak 10,000m távolságon túl.

30.3.2. Megoldás

Egy tökéletesen nedvszívó felület úgy lehet kezelni, mint egy oldódó felületet, ahol $C_{\text{eq}} = 0$. Esetünkben a festékanyag a folyamatos pontforrásban kerül be és a kialakuló csóva a felszívó felületen elnyelési pontot észlel. Amennyiben a rendszer gyorsan elegyedő, akkor feltételezhetjük, hogy $\partial C/\partial z = \partial C/\partial y = 0$ és a gyorsan kavarodó modellt használjuk a réteg cserefolyamatra. A felületsüllyedés S . Állandósult állapot elérése érdekében $Pe \gg 1$, és a transzport egyenlet a következő

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} D_z \frac{\partial C}{\partial z} \pm S$$

Mindez egyszerűbb alakra hozható,

$$(1) \quad u \frac{\partial c}{\partial x} = -S$$

Viszont ha a festékanyag lassan keveredik a keresztmetszetnél, nem él a feltételezésünk miszerint $\partial C/\partial z = \partial C/\partial y = 0$ a mederben. Ezen feltételek alapján a háromdimenziós állandó kibocsátás modellt használjuk (27.1, 8. egyenlet) pozitív képforrásokkal, hogy az áramlásmentes felületnek eleget tegyünk, és negatív képforrásokkal, hogy a tökéletesen nedvszívó rétegnek is megfeleljünk.

Mielőtt az (1) egyenletet megoldjuk, minden feltételezésünket le kell ellenőrizni. Először is meghatározzuk, hogy az áramlás turbulens vagy sem, és amennyiben igen, úgy megbecsüljük a turbulens diffúziós értékeket. A hidraulikus sugár $(5\text{cm} \times 10\text{cm}) / (10\text{cm} + (2 \times 5\text{cm})) = 2.5\text{cm}$. A Reynold-szám a hidraulikus sugáron alapul, $Re_H = (10\text{cm s}^{-1} \times 2.5\text{cm}) / (0.01\text{ cm}^2\text{s}^{-1}) = 2500$, ami azt jelzi, hogy az áramlás valószínűleg turbulens. Minden egyes felület mellett van egy lamináris alsó réteg, amelynek vastagsága, $\delta_s = 5\text{ v}/u^*$. A sebességfüggvény becslő alakja $u^* \approx 0.1U = 1\text{ cm s}^{-1}$. Ez alapján $\delta_s = 0.05\text{ cm}$.

Most megbecsüljük a turbulens diffúziós együtthatót az empirikus relációkat használva, amelyet a 28.1 1. táblázatában találunk.

$$D_{t,x} = 0.45 u^* h = 2.3\text{ cm}^2\text{s}^{-1}$$

$$D_{t,y} = 0.15 u^* h = 0.75\text{ cm}^2\text{s}^{-1}$$

$$D_{t,z} = 0.067 u^* h = 0.34\text{ cm}^2\text{s}^{-1}$$

A gyorsan vegyülő réteg cserefolyamat modelljének bizonyítása

Ahhoz, hogy meg tudjuk határozni a réteg cserefolyamatok gyorsan vagy lassan vegyülőek, össze kell hasonlítani a vertikális vegyülés időskáláját a lamináris rétegben végbemenő diffúziós áramlás időskálájával.

$$\frac{T_{\delta_s}}{T_L} = \frac{\delta_s^2/D}{h^2/D_t} = \frac{(0.05\text{ cm})^2(0.34\text{ cm}^2\text{s}^{-1})}{(5\text{ cm})^2(10^{-5}\text{ cm}^2\text{s}^{-1})} = 3.4$$

Hogy biztosak lehessünk abban, hogy a gyorsan elegyedő modell a megfelelő, elvárjuk, hogy T_{δ_s} nagy jelentőséggel bír és értéke nagyobb, mint T_L . Ebben az esetben az időskálák csak egy vagy két tényezőben térnek el. Mivel a rendszer közelebb áll a gyorsan vegyülő modell tulajdonságaihoz, így ezzel a feltevessel folytatjuk tovább.

A csóva kialakulásához szükséges feltételek bizonyítása ($\partial C/\partial y = \partial C/\partial z = 0$).

A csóva kialakulásának leírásához az (1) egyenletet használjuk, de előbb igazolni kell, hogy a csóva gyorsan vegyül a meder keresztmetszetében. Meg kell találni azt a távot, ahol a csóva egyenletes y és z koordinátáknál. Ezek a következők lesznek:

$$X_{\text{mix},y} = b^2 u / (4 D_{t,y}) = (10\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 10\text{ cm}^2\text{s}^{-1}) / (4 \times 0.75\text{ cm}^2\text{s}^{-1}) = 333\text{ cm}$$

$$X_{\text{mix},z} = h^2 u / (4 D_{t,z}) = (5\text{ cm} \times 5\text{ cm} \times 10\text{ cm}^2\text{s}^{-1}) / (4 \times 0.34\text{ cm}^2\text{s}^{-1}) = 183\text{ cm}$$

Ez azt jelenti, hogy a csóva 333 cm-nél nagyobb távolságban állandó. Megvizsgáljuk az $x = 2000$ cm pontban az állítást, így a koncentrációt egydimenziós forrásként tudjuk modellezni, ahol $x = 0$. Tehát feltételezzük, hogy $\partial C/\partial y = \partial C/\partial z = 0$.

A $Pe \gg 1$ feltételezés bizonyítása

Ha $Pe = UL_x/K_x \gg 1$, a hosszanti irányú diszperziót figyelmen kívül hagyhatjuk. A megfelelő hosszskála az lesz, ahol a koncentráció, $L = 2000$ cm. A hosszirányú diszperzió $K_x = 5.9u_*h = 30 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ és $Pe = (10 \text{ cms} \times 2000 \text{ cm})/(30 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}) = 666 \gg 1$. Tehát a feltételezésünket bebizonyítottuk.

Azt a feltételezést is bebizonyítottuk, ami az (1) egyenlethez vezetett. Ezután kicserélhetjük a elnyelési pontot (S) az (1) egyenletben, melyet a **20.1** (16) egyenletében találunk meg.

$$(2) \quad S = - \left[\frac{D_m A}{V \delta_s} \right] (C - C_{eq}) = -k(C - C_{eq})$$

Mivel $V/A = h$, ezért a réteg-csere folyamatok sebességét állandónak tekintjük $k = 10^{-5} \text{ cm}^2\text{s}^{-1} / (5 \text{ cm} \times 0.05 \text{ cm}) = 4 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Ebben a rendszerben $C_{eq} = 0$, és így az (1) egyenlet a következőképpen alakul

$$(3) \quad u \frac{\partial C}{\partial x} = -kC$$

Amint az a **27.1** olvasható, hogy (a (13) egyenletben foglaltak szerint) az eredeti koncentráció a pontforrásnál $C(x = 0) = \dot{m}$

Ezzel a feltevéssel a (3) egyenlet megoldása:

$$(4) \quad C(x) = \frac{\dot{m}}{ubh} \exp\left(-\frac{kx}{u}\right)$$

Figyeljük meg, hogy a (4) egyenlet általános alakja az elsőrendű reakcióval történő, egydimenziós állandó, folyamatos kibocsátás esetében is igaz, ezt a **30.1** (11) egyenletében találjuk.

A (4) egyenletet felhasználva a koncentráció $x = 2000$ pontban,

$$C(x = 2000 \text{ cm}) = \frac{1 \text{ gs}^{-1}}{(10 \text{ cms}^{-1})(10 \text{ cm})(5 \text{ cm})} \exp\left(-\frac{(4 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1})(2000 \text{ cm})}{10 \text{ cms}^{-1}}\right) = 0.00198 \text{ gc m}^{-3}$$

Sőt, a felületi elnyelési pont nem járul hozzá jelentősen az $x = 0$ és 2000 cm közötti szakaszon, mivel az előzetes koncentráció értéke 0.002 gcm^{-3} . Csupán 1%-a a festékanyagnak szívódott fel az aljzat rétegben.

30.3.3. Megoldás

A PCE vertikális diffúziója érdekel minket a $z = 0$ pontból a akvifer irányába felfelé indulva. A talajvíz mozdulatlan (stagnáló), tehát $u = v = w = 0$. Továbbá minden talajvíz lamináris, így a bomlás lamináris modelljét (lassan vegyülő) alkalmazzuk. A felületi pontforrást egy rögzített koncentrációs felület feltételével modellezzük. Feltételezzük, hogy PCE meder laterális kiterjedése nagy és egyenletes a koncentráció, tehát a PCE laterális gradiensei elhanyagolhatóak ($\partial C/\partial x = \partial C/\partial y = 0$). Nincs további forrás vagy elnyelés, így $S = 0$. A rendszer nem kerülhet állandósult állapotba, mivel az alsó felületen van egy forrás és nincs elnyelés, tehát $\partial M/\partial t > 0$ az akvifer-en belül. Közvetlenül a felszínen $z = 0$, a koncentráció pedig feltételezetten

oldhatósági helyzetbe kerül $C_0 = 150 \text{ mg l}^{-1} = 150 \text{ ppm}$. Feltételezzük, hogy a teljes PCE a mederben elég nagy ahhoz, hogy CO rállandó maradjon, még akkor is, ha PCE a medren kívül szívódik fel. Ezekkel a feltevésekkel a transzport egyenlet és a felületi körülmények felírhatóak,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

$C = 0$, for all z , at $t < 0$

$C = C_0$ 150 ppm at $z = 0$ for $t \geq 0$

A PCE koncentrációs profilja létrejön az alábbiak szerint:

$$C(z, t) = C_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

Az akvifer-ben található maximális koncentráció a ($z = 0$) pontforrásnál lesz, és a minimális koncentráció a $z = 2\text{m}$ pontnál alakul ki addig, ameddig az akvifer-en belül az egyenletes koncentráció szintje létrejön. Tehát hogy megtaláljuk a $C > 5 \text{ ppb}$ értéket az akvifer-en keresztül, a $C(z=2 \text{ m}) = 5 \text{ ppb}$ pontot kell megtalálni. A fenti egyenlet alapján meg kell találni a következő értéket:

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right) = \frac{0.005}{150} = 0.000033$$

A **30.1** végén található táblázatból interpretálva,

$$\operatorname{erfc}(2.94) \approx 0.000033$$

$$\frac{2 \text{ m}}{2\sqrt{(4.4 \times 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})t}} = 2.94$$

$$t = 2.6 \times 10^7 \text{ s} = 304 \text{ nap}$$

30.3.4. Megoldás

Mivel a propán és a TCE is víz oldalról vizsgált, így [$H \gg 0.01$]. A leírtakból kiindulva, mindkét anyag atmoszférával kapcsolatos cserefolyamataik értékeit állandónak várjuk, és ez alapján a következők az arányok:

Vékonyréteg modell, vízóoldali kontroll

$$\frac{K_{TCE}}{K_{Propán}} = \frac{D_{wTCE}}{D_{wPropán}}$$

Felületmegújító Modell, vízóoldali kontroll

$$\frac{K_{TCE}}{K_{Propán}} = \sqrt{\frac{D_{wTCE}}{D_{wPropán}}}$$

A hidraulikus sugáron alapuló Reynold-szám a mederben ($Re_{RH}=13,000$), ami arra utal, hogy az áramlás turbulens. A szövegben leírtak alapján az empirikus bizonyíték értelmében a surface renewal model is more appropriate for turbulent flows. Using this model, $KTCE = 1.1 \times 10^{-4} s^{-1}$.

Adott, hogy a TCE esetében az atmoszféra koncentráció elhanyagolható, a TCE atmoszférába történő áramlása az elsőrendű elnyelési pont mutatja, $S = -KTCEC$, a patak tömegmérleg egyenletben. Első találgatásra azt feltételezzük, hogy a TCE egyetlen forrása a patak mentén van, valamint a keresztmetszetben egyenletes a koncentráció, pl. gyors vegyülés esetében, $\partial C/\partial y = \partial C/\partial z = 0$. Feltételezzük még, hogy a rendszer nincs állandósult állapotban ($\partial C/\partial t = 0$). Ezt követően a tömegmérleg egyenlet a következő lesz $u\partial C/\partial x = -KTCEC$. Az áramlással ellentétel felületi kondíció, $C = C_0 = 10 \text{ ppb}$ $x = 0$ pontban, az áramlással megegyező koncentráció pedig $C(x) = C_0 \exp(-KTCEx/u)$. Mindezt az $x = 2000\text{m}$ pontra behelyettesítve, $C(x = 2\text{km}) = 10\text{ppb} \exp(-(1.1 \times 10^{-4}\text{s}^{-1}(2000\text{m})/(0.1\text{ms}^{-1})) = 1.1 \text{ ppb}$.

A becsült koncentráció sokkal alacsonyabb, mint az ebben a pontban mért koncentráció ($C = 5 \text{ ppb}$). Ebből az következik, hogy van még egy TCE pontforrás az $x = 0$ és 2 km között.

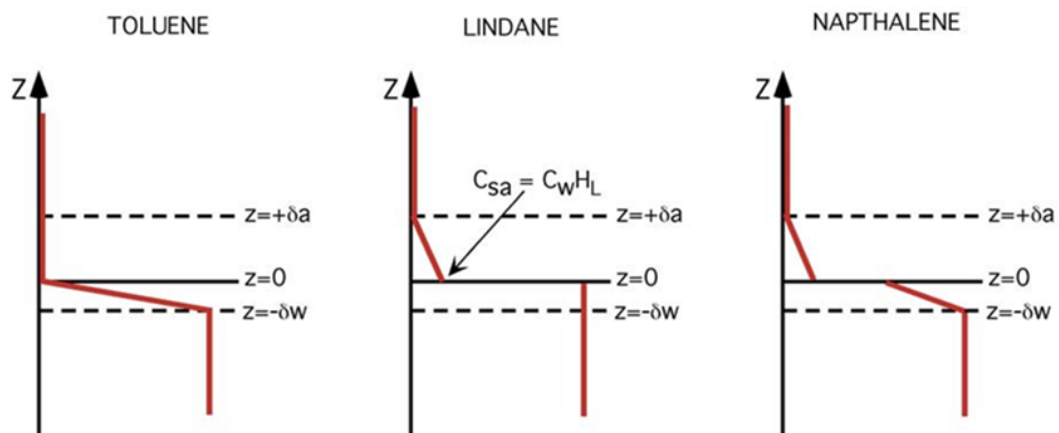
30.3.5. Megoldás

Toluol [$HT = 0.28 \gg 0.01$] víz oldalról vizsgált

Lindane [$HL = 2.2 \times 10^{-5} \ll 0.01$] levegő oldalról vizsgált

Naftalin [$HN = 0.04 \approx 0.01$] mind víz és levegő feltételek mellett vizsgált.

- Vázold fel a $C(z)$ profilt minden egyes vegyszer esetében.
-



- Írd fel egyenletben a tömegáramlást minden egyes vegyszer esetében a levegő-víz felületen.
- Határozd meg azt az időpontot, ahol minden egyes folyadék csak 5%-át veszíti el az eredetileg megmaradt tömegnek.

TOLUOL	LINDANE	NAFTALIN
$m\dot{Y} = D_w A \frac{C_w}{\delta_w}$	$m\dot{Y} = D_a A \frac{C_w H_L}{\delta_a}$	$m\dot{Y} = A \frac{C_w}{[(\delta_w/D_w) + \delta_a/(H_N D_{aw})]}$
$\frac{\partial C_w}{\partial t} = - \left[\frac{D_w}{\delta_w h} \right] C_w$	$\frac{\partial C_w}{\partial t} = - \left[\frac{D_a H_L}{\delta_a h} \right] C_w$	$\frac{\partial C_w}{\partial t} = - \frac{C_w/h}{(\delta_w/D_w) + \delta_a/(H_N/D_a)}$

TOLUOL	LINDANE	NAFTALIN
$C_w(t) = C_o \exp\left(-\frac{D_w}{\delta_w h} t\right)$	$C_w(t) = C_o \exp\left(-\frac{D_a H_L}{\delta_a h} t\right)$	$C_w = C_o \exp\left(-\frac{t}{\left[\frac{\delta_w}{D_w} + \frac{\delta_a}{H_N D_a}\right] h}\right)$
$T_{5\%} = \frac{3\delta_w h}{D_w} = 3 \times 10^5 \text{ s}$	$T_{5\%} = 3 \frac{\delta_a h}{D_a H_L} = 1.4 \times 10^8 \text{ s}$	$T_{5\%} = 3h \left[\frac{\delta_w}{D_w} + \frac{\delta_a}{H_N D_a}\right] = 3.8 \times 10^5 \text{ s}$

- e. Melyik kémiai anyag esetében alkalmazható az egyenletes koncentráció feltétele?
A vegyülési idő $TD = h^2/(4Dt) = (1\text{m})^2/(4 \times 0.001 \text{ m}^2\text{s}^{-1}) = 250 \text{ s}$. Mindegyik kémiai anyagra igaz, hogy $TD \ll T_{5\%}$, tehát a az egyenletes koncentráció (tökéletes vegyülés) feltételezés mindegyik esetében alkalmazható.

30.3.6. Megoldás

1. sz. vegyszer egy konzervatív jelölőanyag, ami egyáltalán nem lép kémiai reakcióba.
A fel nem szívódó, le nem bomló vegyszer maximális pontja következik be a legkorábban és a legmagasabb koncentrációval. Ezt a piros színű görbe mutatja a lenti ábrán. A maximális érkezési időpontból következtetni tudunk a sebességre, $u = 8\text{m}/4\text{nap} = 2 \text{ md}^{-1}$.
2. sz. vegyszer nem szívódik fel, viszont az akvifer-ben élő mikróbák lebontják.
Ez a típusú vegyszer nem szívódik fel, és ezáltal nem kerül akadályba sem. A maximális érkezési ideje az 1. sz. vegyszerével megegyezik, de csökkentett koncentrációval. Ezt jól láthatjuk a zöld színű függvény alakjából. Pontosítva: $C_2(t) = C_1(t) \exp(-kt)$. UA maximális értékeket alkalmazva $T_{1,2} = 4 \text{ nap}$, $C_{2\text{max}}/C_{1\text{max}} = (10.5/15.8) = \exp(-kt)$, amiből

$$k_2 = -\ln(C_2/C_1)/t = -\ln(10.5/15.8)/(4 \text{ nap}) = 0.1 \text{ d}^{-1}$$

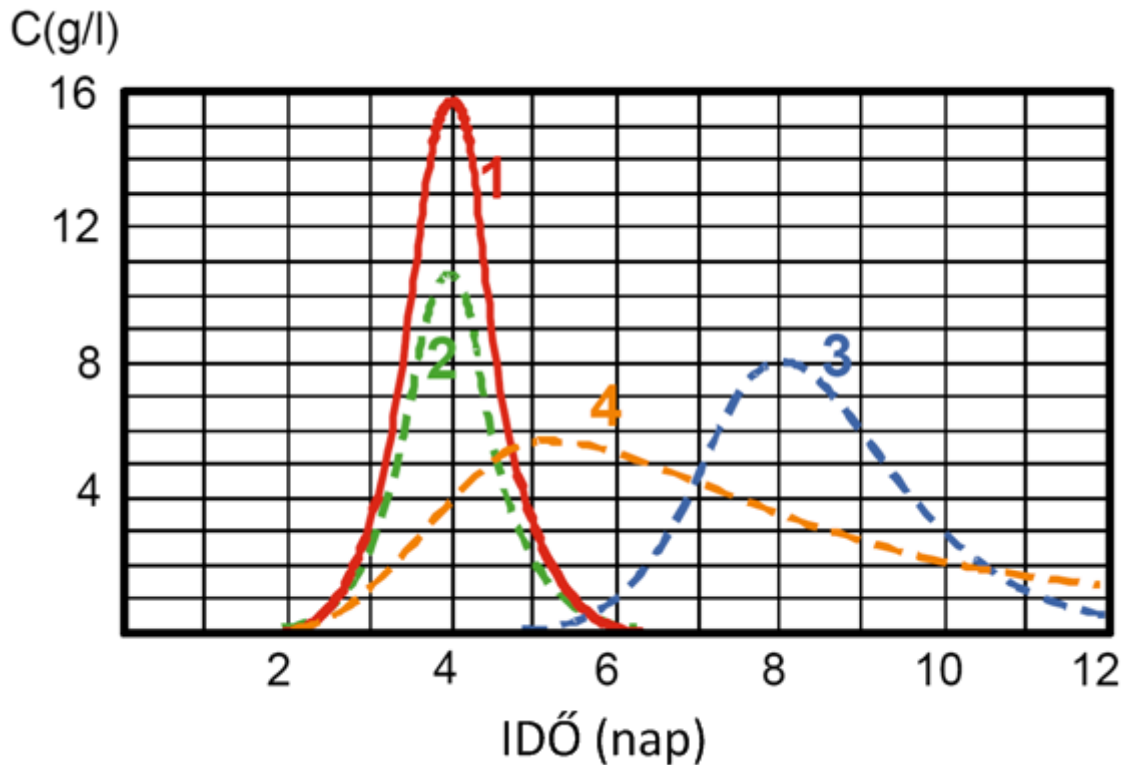
Mind a 3. sz. és 4. sz. vegyszer a talajállományba kerülnek, éppen ezért kisebb mértékű lassulás figyelhető meg (narancsszínű és kék színű görbék) Bár a 4. sz. vegyszer lassú felszívódású, és ezért nem kerül egyensúlyba. Lassú szorpció további diszperzióhoz vezet, ez a narancsszínű görbén jól látható. Ebből kifolyólag, a 3. sz. vegyszer reakcióját a kék színű görbe szemlélteti.

3. sz. vegyszer gyorsan felszívódik, és a partíció mindig egyensúlyban van.

Kék színű függvény az ábrán. A csóva transzportja lelassul, mivel bármelyik időpontban csak az f tömegfüggvény kerül az oldódási fázisba a folyadéktranszportnak köszönhetően. Sőt, a csóva inkább fu sebességnél áramlik, nem pedig u sebességnél. Megbecsülhetjük f értékét oly módon, hogy a maximális érkezési időt összevetjük a nem felszívódó vegyszer érkezési idejével. Vagyis $T_{1,2} = L/u$ and $T_3 = L/(fu)$, ebből következik, hogy $f = T_{1,2} / T_3 = 4 \text{ d} / 8 \text{ d} = 0.5$.

4. sz. vegyszer felszívódik, tehát a partíció nincs egyensúlyban.

A fenti diszkusszióból kiderül, hogy ezt a folyamatot a narancsszínű görbe szemlélteti. Az adszorpció/deszorpció folyamatoknak a transzport időarányhoz képest relatíve lassúnak kell lenni. A megfigyelt transzport arányokat használva, $k_4^{-1} \gg 5 \text{ d}$, vagy $k_4 \ll 0.2 \text{ d}^{-1}$.



30.3.7. Megoldás

- a. Ha a Toluol minden esetben és mindenhol egyensúlyban van a szilárd anyaggal, akkor a transzport egyenlet a következőképpen alakul:

$$(1) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + fu \frac{\partial C}{\partial x} + fv \frac{\partial C}{\partial y} + fw \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} fK_x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} fK_y \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} fK_z \frac{\partial C}{\partial z}$$

ahol C az összes koncentráció és f a mobilizáló hányad. A $v = w = 0$ egyenlőség adott, és a $\partial C / \partial z = 0$ egyenletbe helyettesítjük. Ha azt is feltételezzük, hogy K és f homogének, akkor az [\(1\) egyenletből](#) a következőt kapjuk:

$$(2) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + fu \frac{\partial C}{\partial x} = fK \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + fK \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

Ahhoz, hogy f értékét meghatározzuk, tudnunk kell a tömegsűrűséget is, ami

$$\rho_B = \rho_S(1-n) = 2.6 \times (1-0.3) = 1.82 \text{ g/mL}$$

Ezt követően

$$f = \frac{n}{n + \rho_B K_d} = \frac{0.3}{0.3 + (1.82 \text{ g/mL})(0.5 \text{ mL/g})} = 0.25$$

Vegyük észre, hogy $Pe = fU L / K = (0.25)(1 \text{ m d}^{-1})(1000 \text{ m}) / (0.1 \text{ m}^2 \text{ d}^{-1}) = 2500 \gg 1$, ami azt jelzi, hogy a hosszanti irányú diszperzió kisebb az advekciónál. Bár úgy tűnik, hogy a kibocsátott anyag pillanatnyi kibocsátásként viselkedik. Amennyiben ez így van,

meg kell határozni a hosszirányú diszperziós időtartamot, hogy a felhő hosszirányú alakját meg tudjuk állapítani.

- b. Ahhoz, hogy meg tudjuk állapítani a kibocsátás reakcióját mint egy pillanatnyi pontforrás, meg kell becsülni a transzport időskáláját, $TU = L/fU = (1000\text{m})/(0.25 \times 1 \text{ md}^{-1}) = 4000 \text{ d}$. Mivel TU sokkal hosszabb, mint a kibocsátás időtartama (2 óra), beigazolódik, hogy a kibocsátás pillanatnyi pontforrásként viselkedik. Továbbá, mivel $TU \gg 24$ óra (a Toluol vertikális elosztatásához szükséges idő), kijelenthetjük, hogy a koncentrációs egyenletes a z tartományban. Egy pillanatnyi tömegforrásra (M), $(x,y) = (0,0)$ pontban történő kibocsátás esetén a [\(2\) egyenlet](#) megoldása a következőképpen alakul,

$$(3) \quad C(x, y, t) = \frac{M}{Lz4\pi t f K} \exp\left(-\frac{(x-fut)^2 + y^2}{4fKt}\right)$$

ahol LZ 5m az akvifer vertikális mélysége.

- c. A kútban a legmagasabb koncentrációs érték a $t = TU = L/fu$ és $y = 0$ koordináták esetében jelentkezik.

$$C_{csúcs} = \frac{2000 \text{ g}}{(5 \text{ m})4\pi(4000 \text{ d})(0.25)(0.1 \text{ m}^2\text{d}^{-1})} = 0.32 \text{ gm}^{-3}$$

A pórusvíz koncentrációja $CW = (f/n) C$. Tehát a pórusvíz maximális koncentrációja

$$C_{w,csúcs} = (f/n) C_{csúcs} = (0.25 \times 0.32 \text{ gm}^{-3})/(0.3) = 0.26 \text{ gm}^{-3}$$

A kitettség hosszát akkor tudjuk megbecsülni, ha definiáljuk a Toluol felhő hosszát úgy, hogy 4σ -t értékeljük a maximális időértéknél (T_U)

$$T_{exposure} = \frac{4\sigma}{fu} = \frac{4\sqrt{fKT_U}}{fu} = \frac{4\sqrt{2KL/u}}{fu} = \frac{4\sqrt{2(0.1 \text{ m}^2\text{d}^{-1})(1000 \text{ m})(1 \text{ md}^{-1})}}{(0.25)(l\text{md}^{-1})} = 226 \text{ d}$$

31. Részecsketranszport



Ebben a fejezetben betekintést nyerünk a részecsketranszport folyamatába, ami lehet sűrűbb (pl. ásványi üledék) vagy kevésbé sűrűbb (pl. buborékok) mint a folyadék. A részecskék ülepedési sebességére irányuló becslési módszerekkel ismerkedünk meg, majd összehasonlítjuk a réteges áramlás ülepedő részecskéinek csökkenését a turbulens áramlás részecskéinek hasonló folyamatával. Egy egyszerű arányszámítással megtudhatjuk, ha a részecskék ülepedési sebessége sokkal kisebb az áramlás súrlódási sebességénél, valamint azt is, hogy a turbulencia elég erőteljes-e ahhoz, hogy a részecskék mozgását késleltesse.

Típushibák alapján a felhasználó képes megmérni a késleltetett részecskék ülepedési (vagy emelkedési) sebességét, és meghatározni az áramlat részecskekoncentrációra kifejtett hatását.

31.1. Bevezetés a részecsketranszportba

Aktív, kis méretű részecskék pontosan követik a folyadékáramot (u, v, w), tehát a rájuk vonatkozó transzportfolyamatot ugyanazzal az egyenlettel írjuk fel, mint amit a oldott vegyszereknél használtunk. A folyadéktól eltérő, vagy több (pl. ásványi szemcsék) vagy kevesebb (pl. gázbuborékok) sűrűséggel rendelkező részecskék vertikális sebességgel (w_p) rendelkeznek a folyadékhoz képest, ami egy pótlólagos advekciós komponenst képez a részecskékben. A részecske sebessége a részecske és a folyadék közti sűrűség különbségével

és a részecske átmérőjével (d) arányos. A vertikális koordinátát z -vel jelöljük, és a pótlólagos sebességkomponens az advektív áramlás harmadik hányadában jelenik meg.

$$(1a) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + (w + w_p) \frac{\partial C}{\partial z} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

Az (1a) egyenletben feltételezzük, hogy a részecskék mérete és sűrűsége kis terjedelmű, tehát w_p értéke ugyanaz az áramlás minden részecskéjére. Amennyiben a részecskék mérete és sűrűsége nagy terjedelmű, úgy többszörösen összetett transzportegyenletet kell kiértékelni, külön minden részecske részalmazának esetében, amely összehasonlítható w_p -vel. Az (1a) egyenletben a koncentráció adott C [kg m^{-3}]. Néhány esetben sokkal megfelelőbb a részecskekoncentráció jelölése: n [részecske m^{-3}]. Amennyiben a részecske átmérője (d) és sűrűsége (ρ_p) normális eloszlású, akkor $C = \rho_p(\pi/6)d^3 n$. Ha az (1) egyenletet a $\rho_p(\pi/6)d^3$ komponenssel osztjuk, a következőt kapjuk:

$$(1b) \quad \frac{\partial n}{\partial t} + u \frac{\partial n}{\partial x} + v \frac{\partial n}{\partial y} + (w + w_p) \frac{\partial n}{\partial z} = D_x \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}$$

A turbulens áramlatban a részecskék diffúziós együtthatója feltételezésünk szerint ugyanakkora, mint az oldott módosulatok diffúziós együtthatója. Lamináris áramlási feltételek mellett a részecske diffúzió a részecske méretének függvényében alakul, ahogy a következőkben azt bemutatjuk.

Részecskesebesség.

A részecskesebesség meghatározásánál vertikális nyomatókat alkalmazunk a részecskénél, figyelembe véve a tömeget, a felhajtó erőt és az ellenállást. Az egyszerűség kedvéért vegyünk egy szilárd, gömb alakú részecskét, amelynek átmérője d és sűrűsége ρ_p . A folyadék sűrűsége ρ_F . Egy koordinátarendszerben ábrázolva

$$\text{Tömeg} = \rho_p g (\pi/6) d^3$$

$$\text{Felhajtó erő} = \rho_F g (\pi/6) d^3$$

$$\text{Ellenállás} = - (1/2) \rho_F C_D (\pi/4) d^2 w_p |w_p| \text{ [az ellenállást a sebességgel szemben jelöljük]}$$

C_D , a gömb ellenállási együtthatója, amely a részecskesebesség által meghatározott Reynold számtól függ, pl. $Re_p = d w_p / \nu$. Így a vertikális nyomatók ezután,

$$(2) \quad \rho_p (\pi/6) d^3 \frac{\partial w_p}{\partial t} (\rho_F - \rho_p) g (\pi/6) d^3 - \frac{1}{2} \rho_F C_D (\pi/4) d^2 w_p |w_p|$$

Vegyünk egy részecskét, ami ($w_p = 0$) pontból indul. Amennyiben $\rho_p > \rho_F$ a részecske lefelé irányban gyorsulni kezd ($\partial w_p / \partial t < 0$). Amint w_p növekszik, a részecske ellenállása is növekszik, és az ellentétes irányban hat ki w_p -re. Valójában az ellenállás olyan mértékben megnő, hogy a részecske tömegét és a felhajtó erőt egyensúlyban tudja tartani, így a (2) egyenlet jobb oldalának értéke 0 lesz. Ennél a pontnál a részecske gyorsulása is 0 és w_p állandósul. Ez az ún. határsebesség. Tulajdonképpen, a határsebesség eléréséhez szükséges idő nagyon rövid a befolyási időskálához viszonyítva.

Amikor a határsebesség eléri a $\partial w_p / \partial t = 0$ pontot, a (2) egyenletet megoldjuk w_p -re,

$$(3) \quad |w_p| = \left[\frac{4 g d (\rho_p - \rho_F)}{3 \rho_F C_D} \right]^{1/2}$$

ahol $C_D = f(Re_p)$ a következő empirikus becsléssel határozható meg $Re_p < 104$.

$$(4) \quad C_D = \frac{24}{Re_P} + \frac{3}{\sqrt{Re_P}} + 0.34 \quad \text{for } Re < 104$$

Az $Re < 1$ egyenlőtlenségre (kúszó áramlás) egy analitikai megoldás létezik az ellenállásra, ami a következőket eredményezi:

$$(5) \quad C_D = \frac{24}{Re_P} \quad \text{for } Re < 1 \text{ [kúszó áramlás]}$$

Az (5) egyenletet felhasználva a (3) egyenletet leegyszerűsíthetjük:

$$(6) \quad w_P = \frac{gd^2(\rho_P - \rho_F)}{18\mu_F} \quad \text{for } Re < 1 \text{ [kúszó áramlás]} \quad \mu_F = \rho_F \nu_F$$

Így a (6) egyenletben kapott sebességet Stokes-féle sebességnek nevezzük. Mivel Re_P w_P , nagyságától függ, így nem tudjuk deduktíve, hogy a (6) egyenlőség érvényesül-e vagy sem. Azután feltételezhetünk kúszó áramlást, ha w_P a (6) egyenletbe behelyettesíthető. Ha a kúszó áramlás nem valósul meg, akkor ismételt megoldás szükséges (lásd a 2. példát alul)

1.példa: Számold ki a részecske ülepedési sebességét egy 0.01mm átlójú kvarc homokszemcse esetében.

A kvarc sűrűsége 2600 kgm^{-3} . The A víz sűrűsége és súrlódási mozgása (ν) $\approx 1000 \text{ kgm}^{-3}$ és $10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Tételezzük fel, hogy $Re_P < 1$, majd

$$w_P = (9.8 \text{ ms}^{-2}) (10^{-5})^2 (2600 - 1000 \text{ kgm}^{-3}) / (18 \times 1000 \text{ kgm}^{-3} \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}) = 9 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$$

Ellenőrizzük a kúszó áramlás meglétét.

$$Re_P = w_P d / \nu = (9 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-1})(10^{-5} \text{ m}) / (10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}) = 9 \times 10^{-4} \ll 1$$

2.példa: Számold ki a részecske ülepedési sebességét egy 1mm átlójú kvarc homokszemcse esetében .

Azt állítjuk, hogy $Re_P < 1$, majd a (6) egyenletbe behelyettesítve

$$w_P = (9.8 \text{ ms}^{-2}) (10^{-3})^2 (2600 - 1000 \text{ kgm}^{-3}) / (18 \times 1000 \text{ kgm}^{-3} \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}) = 9 \times 10^{-1} \text{ ms}^{-1} .$$

Ellenőrizzük a kúszó áramlás meglétét

$$Re_P = w_P d / \nu = (9 \times 10^{-1} \text{ ms}^{-1}) (10^{-3} \text{ m}) / (10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}) = 900 \gg 1 \text{ nem kúszó áramlás}$$

Használjuk az $Re_P = 900$ becsült értéket, hogy megbecsüljük C_D értékét (4) egyenletből $C_D (Re_P = 900) = 0.47$

Ezután a (4) egyenletből következik, hogy $w_P = 0.2 \text{ ms}^{-1}$

$$\text{Az új érték } Re_P = (0.001 \text{ m})(0.2 \text{ ms}^{-1}) / 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} = 200$$

Ha $Re_P = 900$ nincs egyezés $Re_P = 200$. Használjuk Re_P változót az ismétléshez.

Ha $Re_P = 200$; akkor $C_D = 0.67$; és $w_P = 0.17 \text{ ms}^{-1}$; $Re_P = 170$ eredményez

Ha $Re_P = 200$ nincs egyezés $Re_P = 170$. Ismételjük meg még egyszer.

Ha $Re_P = 170$; akkor $C_D = 0.71$; and $w_P = 0.17 \text{ ms}^{-1}$; $Re_P = 170$ eredményez

Amikor az Re_P kapott eredmény megegyezik a becsült Re_P értékével 10% eltéréssel, nem kell tovább próbálkozni.

A részecske formájának hatásai

A legtöbb kvarc homokszemcse (strandhomok) gömb formájú és szilárd, éppen ezért a (6) és (3) egyenletek bizonyítottak. A buborékok is ugyanígy megfelelnek a (6) és (3) hipotéziseknek. Mindezek ellenére, többféle ásványi szemcsének lapos vagy lapos jellegű alakja van, pl. nem gömbölyű. Az ilyen típusú részecskék nem egyenes irányban zuhannak, hanem inkább cikk-

cakk irányban sodródhatnak, akár egy hulló falevél. Tehát a (3) és (6) egyenletek eredményeit durva becslésként kezeljük, a pehely és a gömb jellegűek közti eltérésekből adódó sebességkülönbségek miatt. Amennyiben ez az eltérés nő, úgy az Re_P értéke is nő. Végül, sok szemcse nem tömör, hanem több kisebb részecske együttese (pehely), ami lehet elég porózus is. Amikor a pehelyek nagyon porózusak, az effektív sűrűségük lecsökken a víz sűrűségének közeli értékéhez és ez által w_P is csökken.

Részecske diffúzió

Ha a folyadékáramlás lamináris, a részecskék diffúziója, valamint az oldott molekulák diffúziója is a folyadék részecskék Brown-féle mozgásától függ. A részecske diffúziós együtthatója (D_P) a Stokes-Einstein egyenlettel írható fel,

$$\text{Stokes-Einstein Egyenlet: (7)} \quad D_P = \frac{kT}{6\pi\mu r}$$

ahol r a részecske sugara, T [°K] az abszolút hőmérséklet és k a Boltzmann állandó, melynek értéke $k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/°K}$. Ez az egyenlet a véletlenszerű mozgás elméleti modelljén alapul, ahol minden egyes szuszpendált részecske mozgására a folyadékmolekulák hatással vannak. Az áramlás átviszi a kinetikus energiát a folyadékmolekulákból a részecskékbe, tehát azok szinte mindjárt rendelkeznek kinetikus energiával,

$$(8) \quad (1/2)mu^2 = (1/2)kT$$

ahol u_0 a részecske elsődleges sebessége a becsapódást követően, és m a részecske tömege. A részecskék pótlólagos mozgását a nyomaték egyenlet magyarázza.

$$(9) \quad \frac{d}{dt}(mu) = -\frac{1}{2}\rho_F C_D \pi r^2 u^2$$

Feltételezzük, hogy $Re_P < 1$ és $C_D = 24/Re_P$ a, akkor a (9) egyenletből

$$(10) \quad m \frac{du}{dt} = -6\pi\mu r u$$

Ezekből a részecske mozgása az alábbiak szerint alakul,

$$(11) \quad u(t) = u_0 \exp(-t/\tau)$$

ahol $\tau = m/(6\pi\mu r)$ az időskálát jelöli, amely részecske visszatérését megelőző időskálát írja le. Ezt az időskálát használjuk, e kezdeti sebesség u_0 , valamint a becsapódást követően a létrejött távolság:

$$(12) \quad \ell = u_0 \tau = \frac{\sqrt{mkT}}{6\pi\mu r}$$

A szuszpendált részecske folyamatos sorozatos becsapódást tapasztal, minden egyes becsapódást követően kis időnek kell eltelni, hogy a becsapódási vonal mentén τ pontból ℓ egység távolságot megtegyen. Az eredmény a véletlenszerű mozgásból ered, ahol a lépték $\Delta x = \ell$ és idő $\Delta t = \tau$ ami együttesen Fick-féle diffúziót eredményez **(22.1)**.

$$D_P = \frac{\Delta x^2}{\Delta t} = \frac{\ell^2}{\tau} = \frac{kT}{6\pi\mu r}$$

A részecskék pillanatnyi pontforrása.

Előző fejezetekben a pontforrás által kialakított koncentrációs mezővel foglalkoztunk. A fenti szempontok alapján ezek a megoldások részecskekoncentráció leírására is alkalmasak. Példaként vegyünk egy N számú felhőt, melynek részecskéit $z = h$, és $x = y = 0$ magasságból bocsátunk ki egy végtelen tartományba. A felhőáramlás középsebessége u , és az izotróp turbulencia szórása D . Feltételezzük, hogy minden olyan részecske, ami földet ér ($z = 0$) pontban letelepszik, és nem lehet szuszpendált újra, tehát a talaj tökéletes nedvszívó. A felhő TA felhőtömeg közepe ($x = ut$, $y = 0$, $z = h - w_p t$) pontoknál lesz, a negatív oldalon pedig ($x = ut$, $y = 0$, $z = -h + w_p t$). A részecske-koncentráció n [részecske m^{-3}]

$$(13) \quad n = \frac{N}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x-ut)^2 + y^2 + (z-(h-w_p t))^2}{4Dt}\right) - \frac{N}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x-ut)^2 + y^2 + (z+(h-w_p t))^2}{4Dt}\right)$$

Ülededés – szuszpendált részecske-koncentráció süllyedése.

Amint az a fenti példából is látható, a részecskék ülededése egy felületen a folyadék tartományból kiáramló részecskék mozgására utal (süllyedés). A pozitív z -tengely felfelé mutat, az áramlás a felületnél $m = -w_p C A_H$, ahol A_H a felület horizontális vetülete és C a felület közelében található koncentráció a folyadékban. Néhány rendszerben a már leülepedett részecskék is lehetnek szuszpendált részecskék. Ez a folyamat egy áramlatot képez a folyadék tartományában (forrás). Az áramlás azon képessége, hogy a már leülepedett részecskéket újra felszabadítja vagy sem, a felületen létrejött nyírési nyomatóktól és a részecskék fizikai jellemvonásaitól függ. Az ülededés relatív terjedelme és az újbóli szuszpenzió meghatározza a folyadék nettó részecske veszteségét vagy nyereségét. Ebben a fejezetben figyelmen kívül hagyjuk az újbóli szuszpenziót és csak az áramlás ülededését vizsgáljuk.

Lamináris áramlással vagy lassú kavarróval történő ülededés egy rendszeren belül.

Vegyünk egy egyszerű derékszögű rendszert, ahol a horizontális terület A , mélység h és $(u, v, w) = (0, 0, 0)$. Legyen z be vertikális felfelé irányuló és $z = 0$ a fenéken. A rendszer kezdeti koncentrációja C_0 t , ami végig egyenletes a folyadék közegben. Ha a diffúzió lassú az ülededéshez viszonyítva, akkor figyelmen kívül hagyjuk a diffúziót (keveredés), és azt feltételezzük, hogy részecskefelhőn belüli koncentráció változatlan az ülededés folyamatában. Egyenletes részecskeméretet és sűrűséget feltételezve, a részecskék ugyanakkora sebességnél üledednek (w_p .)

A részecskeáramlás a meder alján a vertikális advekciónak függvénye, $m(z = 0) = -w_p C_0 A$. Ez az áramlás addig tart, ameddig a teljes vízmélység részecskétől mentes. E feltételek mellett a részecsketömeg veszteség M , amit zéró bomlás követ.

$$(14) \quad \partial M / \partial t = -w_p C_0 A = \text{konstans, és nem a megmaradó } M \text{ tömeg függvénye}$$

Ha az átlagmélység koncentrációt $C = M/hA$ –ben határozzuk meg, akkor

$$(15) \quad \partial C / \partial t = -(w_p/h) C_0$$

Ezt átrendezve a következőt kapjuk,

$$(16) \quad C(t) = C_o \left(1 - \frac{w_p}{h} t\right), t < h/w_p \text{ esetén}$$

Minden részecske elveszik a rendszerben a következő érték mellett: $T_{\text{ülepédés}} = h/w_p$.

Turbulens áramlással vagy gyors kavarródással történő ülepedés egy rendszeren belül.

Az előzőekben jellemzett rendszert feltételezzük, de most azzal a kikötéssel, hogy a keveredés elég gyors ahhoz, hogy egyenletes koncentráció (C) jöjjön létre a rendszeren belül, még akkor is, ha néhány részecske elveszik és leülepedik a meder aljára. A meder alján keletkező áramlás most $m(z=0) = -w_p C A$. Bár a diffúziót nem hagyhatjuk figyelmen kívül ebben a rendszeren belül, feltételezzük, hogy C állandó, tehát a diffúziós tagokat kihagyhatjuk, mivel $\partial C/\partial z = \partial C/\partial y = \partial C/\partial x = 0$. A tömegmegmaradás egyenlete erre a rendszerre a következő lesz:

$$(17) \quad \partial M/\partial t = A h \partial C/\partial t - w_p C A$$

amelyből

$$(18) \quad \partial C/\partial t = -(w_p/h) C$$

ami egy elsőrendű bomlási folyamatra utal, állandó bomlási sebességnél $k[\text{idő}^{-1}] = w_p/h$. A részecske koncentráció exponenciálisan bomlik úgy, hogy 95%-a az eredeti tömegnek $3h/w_p$ idő mellett elveszik.

A megfelelő ülepedési modell kiválasztása.

A fentiekben jellemzett két modell a kavarródás és ülepedés közti relatív eltérésekben különböznek egymástól. Az alapján hasonlítjuk őket össze, hogy az ülepedési időskálájukat vizsgáljuk $T_{\text{ülepédés}} \sim h/w_p$ mélységben, valamint a keveredési időskálákat nézzük meg $T \sim h^2/D$ mélységben. Ha $T \gg T_{\text{ülepédés}}$, akkor a lassú kavarródású modellt alkalmazzuk. Ha $T_D \ll T_{\text{ülepédés}}$, akkor a gyorskeveredésű modell lép érvénybe.

A turbulens áramláshoz használt skála $D \sim u_* h$, aminek a következő lesz a megoszlása

$$(19) \quad \frac{h \text{ feletti leülepedés időmértéke}}{h \text{ feletti felkavarródás időmértéke}} = \frac{h/w_p}{h^2/D} = \frac{w_p}{u_*}$$

Majd a turbulens áramlásra vonatkozóan, ha $w_p \ll u_*$, a vízoszlopban lévő turbulencia elég erős ahhoz, hogy a részecskéket összekevert állapotban tartja; ekkor a gyors kavarródású modell érvényesül, és a szuszpendált üledék exponenciálisan bomlik. Ha $w_p \gg u_*$, a turbulencia túl gyenge ahhoz, hogy az üledék vertikálisan is keveredjen, így a lassú kavarródással történő modellt alkalmazzuk és a szuszpendált üledékréteg lineáris bomlásnak indul.

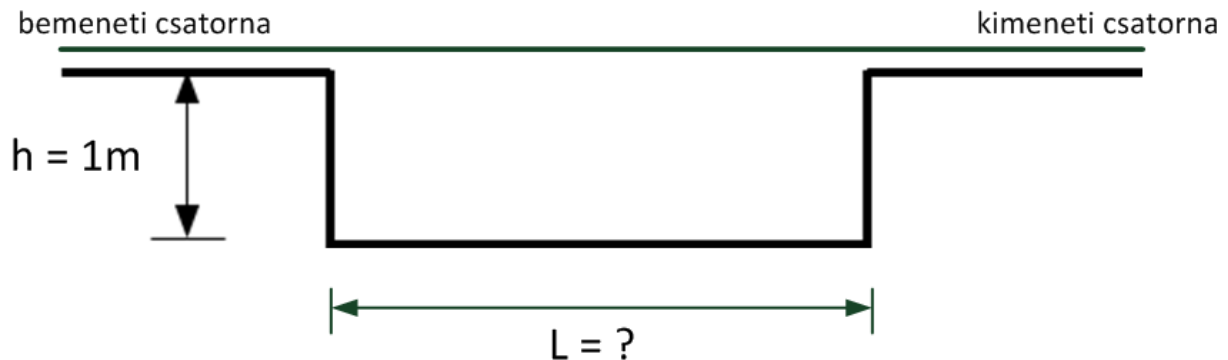
31.2. Feladatsor

31.2.1. Feladat

Ön egy környezetvédelmi menedzser egy vezető építési területen. A helyhatóság azt írja elő, hogy az összes szuszpendált szilárd anyag 85%-át el kell távolítani minden olyan vízből, ami építési területen kívül távozik. Ahhoz, hogy ez megvalósítható legyen, azt tervezi, hogy a vizet egy ülepedési tartályon keresztül átfolyatják.

Feltételezzük, hogy a szuszpendált szilárd anyag nagy része iszap, $d = 62$ micron átmérőjű és $\rho_P = 2.6 \text{ gcm}^{-3}$ sűrűségű. Egy normál folyamatnál 100 m^3 víz folyik át a tartályon óránként

vagy kb. $Q = 0.03 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$. A rendelkezésre álló terület egy 2 m széles és 1 m mély tó kiásását teszi lehetővé. Milyen hosszú legyen ez a tó?



31.2.2. Feladat

Vegyünk egy 20 cm mély csatornát, melynek átlagos áramlási sebessége 0.1 cm/s , és lamináris áramlás feltételei adottak. N számú részecskét azonnal kibocsátunk abból a pontforrásból, amely a csatornafének aljától számított $h = 5 \text{ cm}$ magasságban helyezkedik el. A részecskék gömb alakúak és átmérőjük $d = 10 \mu\text{m}$ valamint sűrűségük $\rho_P = 2000 \text{ kg m}^{-3}$. Jellemezd a áramlást és a csatorna alján maradt részecskefolt helyzetét és hosszát. A részecskékhez tartozó diffúziós ráta $10\text{-}13 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

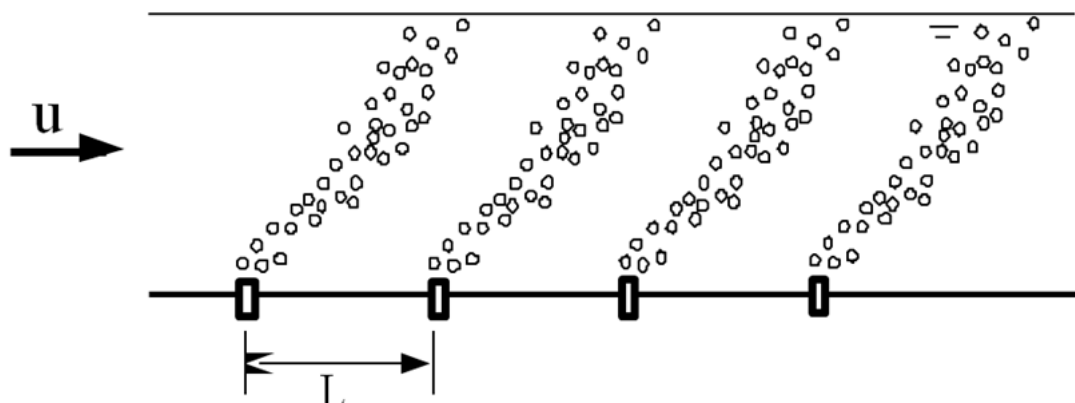
31.2.3. Feladat

Egy fa egyszer egy évben lehullajtva magvait, amelyek $H = 10$ méterre helyezkednek el a felszín fölött. Ebben a magasságban az ágak horizontális kiterjedése 4 m^2 . A maghüvelyek egy hőmérsékletváltozás hatására nyílnak ki, majd egy újabb változást követően 5 másodpercen belül az összes mag kihull a maghüvelyekből. A magok gömb alakúak, átmérőjük $d = 50 \mu\text{m}$ és sűrűségük $\rho_s = 600 \text{ kgm}^{-3}$. A kibocsátás során a szél $U = 2 \text{ m/s}$ sebességgel fúj, amit magasságban állandónak feltételezünk. Tovább állandó, egyenletes és turbulens diffúziót is feltételezünk vertikálisan ($DZ = 0.1 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$) és horizontálisan ($DX = DY = 1 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$). A levegő sűrűsége $\rho_a = 1.2 \text{ kgm}^{-3}$, és az abszolút súrlódás $\mu_a = 1.8 \times 10^{-5} \text{ N s m}^{-2}$. Tegyük fel, hogy N számú mag hullott le. Mindezek alapján írd fel egyenletben a kibocsátás utáni magkoncentrációt (seeds m^{-3}) a levegőben. Jellemezd a magok hosszanti irányú terjedését a földfelszínen.

31.2.4. Feladat

Egy feldolgozóüzem buborékokat használ ahhoz, hogy a vízcsatornában a magas kavardási feltételeket fenn tudja tartani. Maximális teljesítményt akkor lehet elérni, ha az egyes buborékok közti távolságot (L) úgy választjuk meg, hogy új buborékok csak akkor lépnek be a tartományba, amikor az előző áram buborékai elhagyják a felszínt.

Határozd meg a távolságot (L), ha a csatornában a középsebesség $u = 1 \text{ ms}^{-1}$, a víz mélysége $h = 1 \text{ m}$ és egy átlag buborék átmérője $D = 1 \text{ mm}$.



31.2.5. Feladat

Egy kis tóban lévő foszforregeget ellenőrzöd. Néhány korábbi mérési adatot találsz alul. Becsüld meg, hogy az epilimnion (legfelső) rétegben található koncentráció növekedni vagy csökkenni fog, esetleg ugyanakkora marad a jövőben. Az epilimnion (legfelső) réteg alja a metalimnion mélységében van megállapítva, ahogyan azt az alábbi ábrán jelöltük.

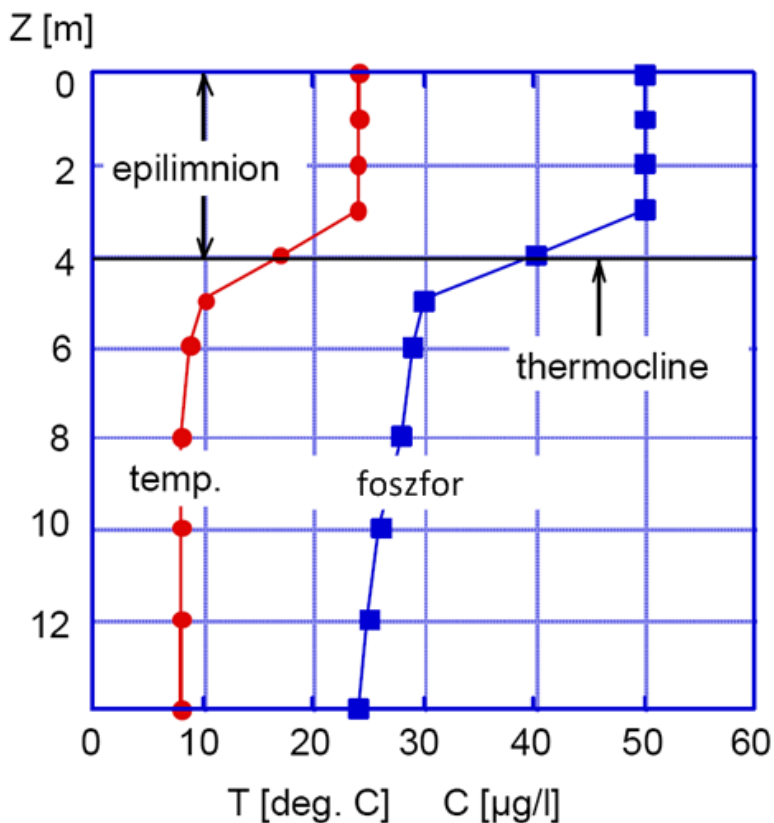
Részecske ülepedési sebessége: $w_P = 2.0 \times 10^{-6} \text{ m/s}$

Vertikális diffúzió: $D_t = 2.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Folyó beáramlás: $Q_I = 0.1 \text{ m}^3/\text{s}$, $C_I = 100 \mu\text{g/L}$ foszforkoncentrációval

Folyó kiáramlás: $Q_O = 0.1 \text{ m}^3/\text{s}$, $C_O = 50 \mu\text{g/L}$ foszforkoncentrációval

A tó felszín területe: $2 \times 10^4 \text{ m}^2$



31.3. Megoldások

31.3.1. Megoldás

Először kiszámítjuk a részecskék ülepedési sebességét w_P , feltételezve azt, hogy $Re_P < 1$. Ezt követően

$$w_P = \frac{gd^2(\rho_P - \rho_F)}{18\mu_F} = \frac{9.8ms^{-2}(62 \times 10^{-6}m)^2(2600 - 1000)kgm^{-3}}{18(1000kgm^{-3})(10^{-6}m^2s^{-1})} = 0.0033 ms^{-1}$$

Majd ellenőrizzük a feltételezésünket: $Re_P = (62 \times 10^{-6}m)(0.0033ms^{-1})/(10^{-6}m^2s^{-1}) = 0.2 < 1$. OK.

Másodszor meghatározzuk, hogy a rendszer lamináris vagy turbulens azért, hogy a megfelelő ülepedési modellt tudjuk kiválasztani. A középsebesség $u = Q/(b h) = 0.03m^3s^{-1}/(2m \times 1m) = 0.015 ms^{-1}$. Ebből következtetünk a súrlódási sebességre $u^* \approx 0.1u = 0.0015ms^{-1}$. Mivel $u^* < w_P$, az ülepedés közelebb áll a lamináris vagy lassú kavargású modell feltételeihez. Különösképpen, hogy a vízoszlopban létrejött koncentráció gyenge keveredése állandó marad még akkor is, ha a tömeg az ülepedés során az alsó rétegben elvész.

Továbbá azt is feltételezzük, hogy a hosszanti irányú keveredés gyenge, és ezért a dugószerű áramlási modellt alkalmazzuk (23.1). Az áramlás vékony folyadéklemezek sorozatos áramlása, ahol minden egyes hosszanti irányú vastagság dx . Ahogy minden egyes lemezke bekerül az áramlatba, szuszpendált részecskéket tartalmaz CO koncentrációs szinten. A lemezek lefelé áramlanak u sebességgel, és az ülepedés során a tömeg $\partial M/\partial t = -w_P C_0 b dx$ sebességnél elvész. Ha a lemez $t = 0$ időben kerül a tóba, a kezdeti tömeg $M_0 = C_0 h b dx$, akkor a tömegre, ami a lemezekben marad az a > 0 egyenlőtlenség igaz.

$M(t) = C_0 h b dx - (w_P C_0 b dx)t$ vagy másképpen felírva, $(M/M_0) = 1 - (w_P/h)t$.

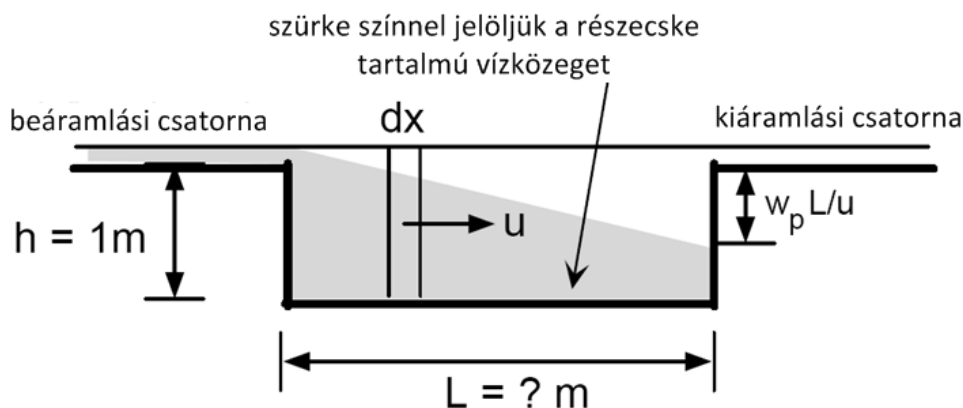
A lemezek $t = L/u$ időben érik el a kiáramlást, amikor is $M/M_0 = 0.15$.

Ezeket az értékeket használva a kívánt L érték elérhető lesz.

$$\frac{M}{M_0} = 1 - \frac{w_P L}{h u}$$

amiből az következik, hogy

$$L = \frac{h u (1 - M/M_0)}{w_P} = \frac{(1 m)(0.015 ms^{-1})(1 - 0.15)}{0.0033 ms^{-1}} = 3.9 m$$



A fenti ábrán látható, hogy a részecske tartalmú közeg hogyan alakul ki a tóban. Az ábra szerint, ha a kiáramlás a felszínen valósul meg, akkor részecske mentes közegeként távozik. Pl. az effektív eltávolítás akár 100%-os is lehet.

31.3.2. Megoldás

Kezdjük azzal, hogy megbecsüljük a részecskék ülepedési sebességét kúszó áramlást feltételezve.

$$w_P = \frac{gd^2(\rho_P - \rho_F)}{18\mu_F} = \frac{9.8ms^{-2}(10^{-5}m)^2(2000 - 998 kgm^{-3})}{18(10^{-3}kgm^{-1}s^{-1})} = 5.5 \times 10^{-5} ms^{-1}$$

Ellenőrizzük le a kúszó áramlás feltételezésünket:

$Re = \frac{\rho_F w_P d}{\mu_F} = 0.0005 < 1$, tehát a kúszó áramlás feltétele rendben van. Ezt követően olyan időskálát kell találni, aminél a részecskefelhő közepe leülepszik.

$$T_{leüledés} = h/w_s = 0.05 m / (5.5 \times 10^{-5} ms^{-1}) = 910 s$$

Ezzel az időskálával és a közép advekción értékkel, $u = 0.1$ cm/s (feltételezett állandósult mélység), a felhő közepe az $x = u \cdot T_{leüledés} = 91$ cm távon ülepedik le a forrástól lefelé irányulva. A részecskefelhő nyomata, pl. a hosszúsága és a szélessége, a felhő attól a méretétől függ, amikor a meder aljához ér. A szuszpenzió során a részecskék minden irányban áramlanak az izotrop diffúzió következtében. $D = 10^{-13} m^2s^{-1}$.

A felületi korlátokat figyelmen kívül $t = T_{leüledés}$ időben a részecskefelhő gömb alakú és átlója megközelítőleg $4\sigma = 4 \sqrt{(2 \times 10^{-13} m^2s^{-1} \times 910 s)} = 5.4 \times 10^{-5} m$. Mivel a felhő vertikálisan oszlik el $\approx 4\sigma$ távon, az egyes részecskék leülepedhetnek a megjelölt időkorlát előtt vagy után. Az ülepedési időintervallum $\Delta T = 4\sigma/w_s = 1$ s. Ha az advekción $u = 0.1$ cm/s, akkor a megadott intervallumon belül a részecskék hosszanti irányban áramlanak ΔT $u = 0.1$ cm távolságon. Továbbá, a felhő már eloszlott 4σ hosszanti távon és leülepedett. Viszont a hosszanti áramlás viszonylag kicsi – a szuszpenzió közben diffúzió következtében – a hosszanti irányú eloszláshoz képest, ahol a differenciális ülepedési idő 0.1 cm. Így az előző értéket figyelmen kívül hagyjuk. A felhő méretétől azt várjuk el, hogy 0.1 cm hosszú és 0.005 cm széles legyen, 91 cm középponttal a kibocsátás pontjaként. Adott, hogy a hosszanti távolság (91 cm) sokkal nagyobb, mint a diffúzió okozta eloszlás, így először a részecske sorsát teljes mértékben az ülepedési sebesség és a jelenlegi sebesség határozza meg, pl. advekción keresztül. Ezt már előzetesen is megjósolhattuk volna úgy, hogy a részecske ülepedési sebességén alapuló Peclet számot meghatározzuk:

$$Pe = w_P h / D = 3 \times 10^{-7} \gg 1,$$

Ez azt jelzi, hogy advekción transzport van jelen ebben az esetben.

31.3.3. Megoldás

Kezdjük azzal, hogy megbecsüljük a magok esési sebességét, kúszó áramlást feltételezve

$$w_P = \frac{gd^2(\rho_P - \rho_F)}{18\mu_F} = \frac{9.8ms^{-2}(5 \times 10^{-5}m)^2(600 - 1.4 kgm^{-3})}{18(1.8 \times 10^{-5}kgm^{-1}s^{-1})} = 0.045 m/s$$

Ellenőrizzük le a kúszó áramlás feltételezésünket a magok esetében: $Re = \rho awPd/\mu_a = 0.15 < 1$, tehát a kúszó áramlás feltétele rendben van.

Ha azt feltételezzük, hogy a kibocsátás pillanatnyi és egy bizonyos pontban történik, akkor a következő egyenlőséget írhatjuk fel a kibocsátás lefelé irányuló koncentrációjával kapcsolatban. Az ülepedési sebesség effektív advekción sebességhez vezet, wP , tehát a magfelhő tömegközéppontja az $(x = Ut, y = 0, z = H - wPt)$ pályát követi. Egy negatív elképzelést is szükséges alkotni: vagyis a talaj tökéletes nedvszívó legyen, és bármely mag ami eléri a földet leülepszik és légáramlat hatására mozdul el. Az elképzelt helyzet esetében a tömegközéppont a következő pályát követi: $(x = Ut, y = 0, z = -H + wPt)$. Az első és második sora az egyenletnek a valós és a kitalált esetet szemlélteti:

$$C(x, y, zt) = \frac{N}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}} \sqrt{D_x D_y D_z}} \exp\left(-\frac{(x-ut)^2}{4D_x t} - \frac{(y)^2}{4D_y t} - \frac{(z-(H-wPt))^2}{4D_z t}\right) -$$

$$\frac{N}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}} \sqrt{D_x D_y D_z}} \exp\left(-\frac{(x-ut)^2}{4D_x t} - \frac{(y)^2}{4D_y t} - \frac{(z-(-H+wPt))^2}{4D_z t}\right)$$

Ez az egyenlőség azokra a fáról lefelé irányuló távolságokra érvényes, amelyek esetében 1) az utazási idő hosszabb a kibocsátási időnél, és 2) a felhő horizontális keresztmetszete viszonylag nagy a kibocsátott áramlat területéhez képest. Az első feltétel az, hogy $x \gg U t_{\text{kibocsátás}} = 10$ m. Az $x \gg 10$ m egyenlőtlenségre a levegő koncentrációja olyan, mint a pillanatnyi forrásból történt volna. A második feltétel akkor teljesül, ha a kibocsátott felhő horizontálisan nagyobb, mint a kibocsátáskori mérete. A fa területe 4 m². Egy kerek fát feltételezve, ez a terület egy 2m átmérőjű körnek felel meg. Tehát a kibocsátás oldalirányú dimenziója is 2m. A kibocsátás hosszanti irányú dimenziója a fa 2 méteres skálájához mérten, a kibocsátás közbeni advekción folyamaton keresztül (10-m). A kibocsátott terület 2 m széles és 12 m hosszú. Mivel $D_x = D_y$, a legszigorúbb feltétel a felhő hosszanti kiterjedéséhez köthető. A kibocsátás távolságok pontjaként jelenik meg, ahol $4\sigma_x = 4\sqrt{(2D_x x/U)} \gg 12$ m, vagy $x \gg 9$ m.

Amikor a magok elkezdnek ülepedni, két folyamat a talajon történő hosszanti szóródásához járul hozzá: 1) a felhő hosszanti kiterjedése, ahogy leülepedik ($4\sigma_x$) és 2) a különbségek a leülepedési idők között, ami a vízszintes távolságok közti különbségekhez vezet. Ez utóbbit úgy becsülhetjük meg, hogy a felhő vertikális terjedését meghatározzuk ($4\sigma_z$). Az ülepedési intervallumokon belül $\Delta T = 4\sigma_z/w_s$, hosszanti terjedést eredményez $\Delta x = U \Delta T$. Értékeljük ezeknek a folyamatoknak a relatív hozzájárulását, a közép ülepedési időintervallumban (H/wP):

$$\frac{\text{longitudinális diffúzió}}{\text{differenciális ülepedés és advekción}} = \frac{\sigma_x}{U(\sigma_z/w_s)} = \frac{w_s \sqrt{2D_x H/w_s}}{U \sqrt{2D_z H/w_s}} = \frac{w_s}{U} \sqrt{\frac{D_x}{D_z}} = 0.07$$

Az alacsony érték azt tükrözi, hogy a magok hosszanti irányú disztribúciója a talajon túlnyomóan az advekción kombinált differenciális ülepedési időknek köszönhető. A hosszanti irányú diffúzió pedig további terjedést eredményez. Ahhoz, hogy a hosszanti disztribúciót meg tudjuk becsülni, ismernünk kell az első és az utolsó mag ülepedési idejét és távolságát. Ezt az alábbiak alapján a következő lesz:

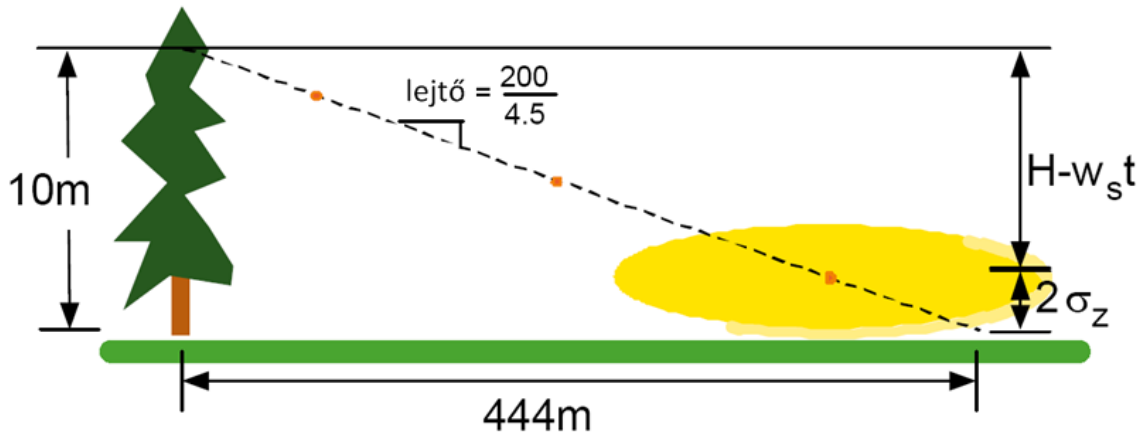
$$w_p t + 2\sqrt{2D_z t} = H$$

Az első mag ülepedésekor:

$$w_p t - 2\sqrt{2D_z t} = H$$

Az utolsó mag ülepedésekor:

Vegyük észre, hogy a 2σ kontúrt használva a felhő széleinek meghatározásához, a magok 95%-ának sorsát meg tudjuk határozni. A két egyenlet megoldásával azt kapjuk, hogy a magok a következő értékek között ülepednek: $t = 64$ és 776 s. A magok tehát eloszlanak az $x = 128$ m-től 1552 m távolsáig, az eloszlás mértéke távolságban így 1424 m. Ez egy túlzott becslés, mert a sebesség a talaj közelében eléri a zéró értéket, az ott jelenlévő csúszásmentes közegnek köszönhetően. A figyelmen kívül hagyott sebességi nyírás, nyírási diszperzióhoz vezetne, ami hosszanti terjedést váltana ki.



Végül, az összehasonlítás kedvéért, megbecsüljük a hosszirányú áramlást, kizárólag a hosszanti diffúzióknak köszönhetően, pl figyelmen kívül hagyás. A felhő kiterjedésének tömegközéppontja pl. H/w_P , értéknél $4\sqrt{(2 \times 10^2 \text{s} - 1 \times 222 \text{s})} = 84$ m. Ez az érték sokkal kisebb, mint az advekcio és differenciális ülepedés által kiváltott érték (1.4 km), ami a fenti számításokat alátámasztja.

31.3.4. Megoldás

Legyen a buborék-képződés sebessége w_B , amelyhez a buboréknak $T_{\text{képződés}} = h/w_B$ időre van szüksége, hogy elérje a felszínt. Ekkor a buborék lefelé irányuló mozgást végez $T_{\text{képződés}}$ távolságban. Tehát a kívánt térbeli skála:

$$(1) \quad L = uh/w_B$$

Ahhoz hogy megtaláljuk a w_B értékét, kúszó áramlást feltételezünk,

$$w_p = \frac{gd^2(\rho_p - \rho_f)}{18\mu_f} = \frac{9.8 \text{ms}^{-2}(10^{-3} \text{m})^2(1.4 - 998 \text{kgm}^{-3})}{18(10^{-3} \text{kgm}^{-1} \text{s}^{-1})} = 0.54 \text{ms}^{-1}$$

Ellenőrizzük le, hogy $Re_B = (0.54 \text{ms}^{-1})(0.001 \text{m})/(10^{-6} \text{m}^2 \text{s}^{-1}) = 540 \gg 1$, tehát a kúszó áramlás nem jön létre. Ezt a folyamatot mindaddig ismétljük, amíg meg nem találjuk buborék sebességét.

$$C_D = \frac{24}{Re_B} + \frac{3}{\sqrt{Re_B}} + 0.34 \quad \text{és} \quad w_B = \left[\frac{4gd(\rho_B - \rho_F)}{3\rho_F C_D} \right]^{1/2}$$

Legyen $Re_B = 540$

$$C_D = \frac{24}{540} + \frac{3}{\sqrt{540}} + 0.34 = 0.51$$

$$w_B = \left[\frac{4 (9.8 \text{ ms}^{-1})(0.001 \text{ m})(1.4 - 998 \text{ kgm}^{-3})}{3 (998 \text{ kgm}^{-3})(0.51)} \right]^{1/2} = 0.16 \text{ m/s}$$

$$Re_B = (0.16 \text{ ms}^{-1})(0.001 \text{ m})(10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}) = 160 \neq 540$$

Legyen $Re_B = 160$

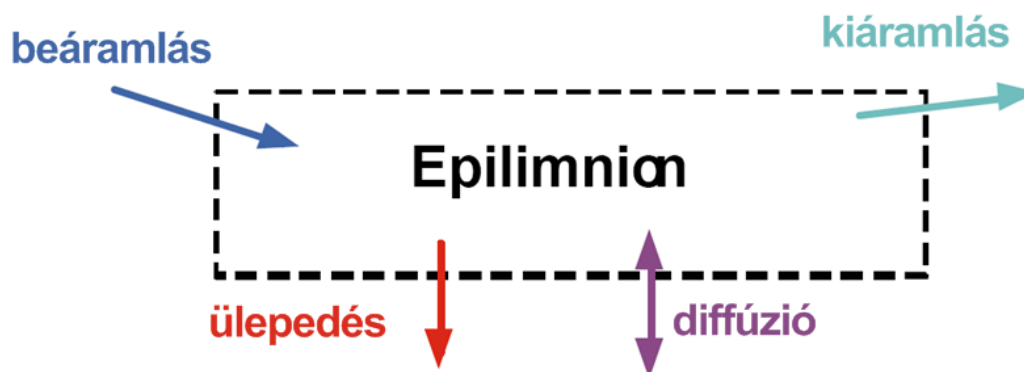
$$C_D = \frac{24}{160} + \frac{3}{\sqrt{160}} + 0.34 = 0.73$$

$$w_B = \left[\frac{4 (9.8 \text{ ms}^{-1})(0.001 \text{ m})(1.4 - 998 \text{ kgm}^{-3})}{3 (998 \text{ kgm}^{-3})(0.73)} \right]^{1/2} = 0.13 \text{ m/s}$$

$Re_B = (0.13 \text{ ms}^{-1})(0.001 \text{ m})(10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}) = 130 \approx 160$, elég közel járunk hozzá, hogy megálljunk.
Visszatérve az (1) egyenlethez, $L = u_h/w_B = (1 \text{ ms}^{-1})(1 \text{ m})(0.13 \text{ ms}^{-1}) = 7.6 \text{ m}$

31.3.5. Megoldás

Ahhoz, hogy meg tudjuk becsülni a foszfortömeg jövőbeni változását az epilimnion (felső rétegben, erre a területre tömegegyensúlyt feltételezünk. Összesen négy áramlás van, ami a felső rétegben lévő foszfor mozgását befolyásolják.



$$\text{Beáramlási fluxus} = Q_I C_I = (0.1 \text{ m}^3\text{s}^{-1})(100 \text{ } \mu\text{gL}^{-1})(1000 \text{ Lm}^{-3}) = 10 \text{ mgs}^{-1}$$

$$\text{Kiáramlási fluxus} = Q_O C_O = (0.1 \text{ m}^3\text{s}^{-1})(50 \text{ } \mu\text{gL}^{-1})(1000 \text{ Lm}^{-3}) = 5 \text{ mgs}^{-1}$$

Az üledési áramlás a felső réteg alsó rétegében van jelen. Az ábrán ez a pont 4m mélységben található, ahol $C_{4m} = 40 \text{ } \mu\text{gL}^{-1}$. Ha egy henger alakú tófeneket feltételezünk, akkor az epilimnion alsó részének területe megegyezik a vízfelszín területével (A). Ezt követően

$$\text{Ülepedési fluxus} = w_p AC = (0.2 \times 10^{-6} \text{ ms}^{-1})(2 \times 10^4 \text{ m}^2)(40 \text{ } \mu\text{gL}^{-1})(1000 \text{ Lm}^{-3}) = 1.6 \text{ mgs}^{-1}$$

A diffúziós áramlás a felső réteg legalján is jelen van. Meg kell becsülni a réteg alján elhelyezkedő koncentrációs gradienseket. Ehhez felhasználjuk a középső különbözetet, vagyis hogy $z = 4\text{m}$,

$$(\partial C/\partial z)_{4\text{m}} = (C_{3\text{m}} - C_{5\text{m}})/(3-5 \text{ m}) = (50-30 \text{ } \mu\text{gL}^{-1})/(3-5 \text{ m}) = -10 \text{ } \mu\text{gL}^{-1}\text{m}^{-1}$$

$$\text{Diffúzióv fluxus} = -D_t A \partial C/\partial z = -(2 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1})(2 \times 10^4 \text{ m}^2)(-10 \text{ } \mu\text{gL}^{-1}\text{m}^{-1})(1000 \text{ Lm}^{-3}) = + 0.4 \text{ mgs}^{-1}$$

A pozitív előjel azt jelzi, hogy a diffúziós áramlás lefelé irányul a pozitív z tengely mentén. Ez az áramlás a vezértömeg elvesztését jelenti.

Ezen áramlások összessége adja a felső rétegben lévő foszfor változási rátáját,

$$\partial M/\partial t = + \text{Beáramlás} - \text{Kiáramlás} - \text{Ülepedés} - \text{Diffúziós áramlás} = (+10 - 5 - 1.6 - 0.4) = +3 \text{ mgs}^{-1}. \text{ Az } \partial M/\partial t > 0, \text{ egyenlőtlenség következtében a felső rétegben található foszfor rétegek emelkedni kezdenek.}$$